УДК 517.977.56

© *А. В. Чернов*

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ УИНТНЕРА ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Для однородной задачи Дирихле, связанной с управляемым полулинейным эллиптическим уравнением в частных производных второго порядка типа стационарного уравнения диффузии–реакции, устанавливается аналог классической теоремы Уинтнера о разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: управляемое полулинейное эллиптическое уравнение, тотальное сохранение разрешимости.

Введение

Вспомним классическую теорему Уинтнера, см. [1, § III.5, теор. 5.1, с. 43].

Т е о р е м а 0.1. *Пусть функция $F(t,\xi)$ непрерывна в области $t\in[t_0,T]$, $\xi\geqslant 0$ и максимальное решение задачи*

$$\begin{cases} x'(t)=F(t,x), & t\in[t_0,T],\\ x(t_0)=x_0\geqslant x_0, \end{cases}$$

существует $(*)$. *Тогда если $f(t,\xi)$ непрерывна при $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\xi\in\mathbb{R}$, и $\bigl|f(t,\xi)\bigr|\leqslant F(t,|\xi|)$, то максимальный интервал существования решения задачи*

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y), & t\in[t_0,T],\\ y(t_0)=y_0, & |y_0|\leqslant x_0, \end{cases}$$

совпадает с отрезком $[t_0;T]$.

Для выполнения условия $(*)$ достаточно, чтобы $F(t,\xi)=\psi(\xi)$, где функция $\psi(\xi)$ строго положительна и непрерывна при $\xi\geqslant 0$, причем $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{\psi(\xi)}=\infty$, $x_0\geqslant 0$.

В частности, справедлив следующий вариант теоремы Уинтнера.

Т е о р е м а 0.2. *Пусть функция $\psi(\xi)$ строго положительна и непрерывна при $\xi\geqslant 0$, причем $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{\psi(\xi)}=\infty$, $x_0\geqslant 0$. Тогда задача Коши*

$$\begin{cases} x'(t)=\psi(x), & t\in[t_0,T],\\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

имеет максимальное решение на $[t_0,T]$ $(T>t_0)$. Более того, если функция $f(t,y)$ непрерывна при $t_0\leqslant t\leqslant T$, $y\in\mathbb{R}$, и $\bigl|f(t,y)\bigr|\leqslant\psi(|y|)$, то максимальный интервал существования решения задачи

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y), & t\in[t_0,T],\\ y(t_0)=y_0, & |y_0|\leqslant x_0 \end{cases}$$

совпадает с отрезком $[t_0,T]$.

З а м е ч а н и е 1. Как известно, несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau}$ расходится. Согласно предельному признаку сравнения, если положительная непрерывная функция $\psi(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\psi(\tau)}{\tau}=K\in[0,+\infty)\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\tau}{\psi(\tau)}=\frac{1}{K}\in(0,+\infty],$$

[1]Работа поддержана МОН РФ в рамках госзадания в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

то получаем расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)}$.

Данная работа посвящена обобщению теоремы 0.2, с учетом сделанного замечания, на случай однородной задачи Дирихле, связанной с управляемым полулинейным эллиптическим уравнением в частных производных второго порядка типа стационарного уравнения диффузии–реакции. В качестве предварительного результата, представляющего самостоятельный интерес, формулируется аналог теоремы 0.2 для управляемого функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна. Указанное уравнение является удобной формой описания широкого класса управляемых распределенных систем.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $n \geqslant 2$, область $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и выпукла. Далее будем предполагать, что задано число $2 < q < \dfrac{2n}{n-2}$ (следовательно, имеет место непрерывное вложение $W_2^1(\Pi) \subset L_q(\Pi)$); $\mathcal{D}$ — заданное множество измеримых управляющих функций $u \in L_r^s(\Pi)$; $s \in \mathbb{N}$, $r > 2$; $\gamma > 0$; $\mathcal{G}(\gamma)$ — класс всех вектор-функций $G = G(\cdot) = \{g_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$ таких, что $G(t)\xi\cdot\xi \geqslant \gamma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в. $t \in \Pi$. Кроме того, определим класс $\mathbb{F}$ всех функций

$$f(t,\xi,\upsilon)\colon \Pi\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R},$$

измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $\{\xi,\upsilon\} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^s$ и таких, что $f(\cdot,x,u) \in L_2(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$, $u \in \mathcal{D}$.

Для $G \in \mathcal{G}(\gamma)$, $b \in L_\infty^+(\Pi)$, $f \in \mathbb{F}$, $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$, $\mathcal{L}[x] \equiv -\mathrm{div}\,\big(G\nabla x\big) + bx$ рассмотрим задачу Дирихле для стационарного уравнения диффузии–реакции:

$$\mathcal{L}[x](t) = f\big(t,x(t),u(t)\big) - \mathrm{div}\,\vec{Q}(t),\ t\in\Pi,\ u\in\mathcal{D};\ x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \qquad (d)$$

Решение задачи (d) понимаем как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую тождеству $B[x,\omega] = \mathcal{F}_u[x,\omega]$ для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$, где

$$B[x,\omega] \equiv \int_\Pi \big[G\nabla x\cdot\nabla\omega + bx\omega\big]\,dt, \quad \mathcal{F}_u[x,\omega] \equiv \int_\Pi \Big\{f\big(t,x(t),u(t)\big)\,\omega(t) + \vec{Q}(t)\cdot\nabla\omega(t)\Big\}\,dt.$$

Будем предполагать, что существуют функция $g\colon\ \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \to \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$, $g(\tau) \geqslant \overline{g} > 0$ для всех *достаточно больших* (д.б.) $\tau > 0$, и семейство функций $\psi_\tau \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$, такие, что

F$_0$) для всех $\xi,\eta \in \mathbb{R}_+$, $\xi \leqslant \eta$, и для п.в. $t \in \Pi$ и всех $u \in \mathcal{D}$ имеем

$$f\big(t,\xi,u(t)\big) \leqslant f\big(t,\eta,u(t)\big), \quad f\big(t,0,u(t)\big) \geqslant 0;$$

F$_1$) для п.в. $t \in \Pi$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$f\big(t,\tau\xi,u(t)\big) \leqslant g(\tau)\,\psi_\tau\big(t,\xi,u(t)\big);$$

F$_2$) существует константа $M > 0$ такая, что $\|\psi_\tau(\cdot,x,u)\|_{L_2} \leqslant M$ для всех $u \in \mathcal{D}$, $x \in L_q^+$, $\|x\|_{L_q} = 1$, и для всех д.б. $\tau > 0$;

F$_3$) существует предел $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \dfrac{\tau}{g(\tau)} = +\infty$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены все сделанные выше предположения. Тогда задача* (d) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u]$ *для всех управлений* $u \in \mathcal{D}$. *Это решение можно найти как предел последовательности* $\{x_k\}$, *определяемой рекуррентной формулой:*

$$x_k = \theta + A\big[f(\cdot,x_{k-1},u)\big], \quad k \in \mathbb{N}; \quad x_0 = 0.$$

При этом существует число $N > 0$ *такое, что справедлива равномерная оценка* $\|x[u]\| \leqslant N$ *для всех* $u \in \mathcal{D}$.

Здесь θ — решение (d) при $f \equiv 0$; $A[z]$ — решение (d) при $\vec{Q} \equiv 0$ и замене f на $z = z(t)$.

П р и м е р 1.1. В качестве простейшего примера функции, удовлетворяющей перечисленным условиям $\mathbf{F}_0$–$\mathbf{F}_3$ (при $r = 2$), укажем

$$f(t, \xi, \upsilon) = \sqrt{\xi^\beta + \upsilon^2}, \quad 1 \leqslant \beta < 2.$$

Здесь

$$g(\tau) = \tau^{\beta/2}, \quad \psi_\tau(t, \xi, \upsilon) = \sqrt{\xi^\beta + \frac{\upsilon^2}{\tau^\beta}} \leqslant \sqrt{\xi^\beta + \upsilon^2} \quad \text{для всех } \tau \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\left\|\psi_\tau(\cdot, x, u)\right\|_{L_2}^2 \leqslant \|x\|_{L_\beta}^\beta + \|u\|_{L_2}^2,$$

откуда ясно, что условие $\mathbf{F}_2$ выполняется. Выполнение условий $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ очевидно.

§ 2. Тотальное сохранение разрешимости

Теорема 1.1 дает достаточные условия *тотального сохранения разрешимости* (ТСР) управляемой системы (d).

О п р е д е л е н и е 2.1. *Тотальное сохранение разрешимости* — это свойство управляемой системы сохранять разрешимость для всех допустимых управлений.

Понятие ТСР было введено в работе [4]. Нарушение разрешимости распределенной системы (в эволюционном случае — глобальной разрешимости) весьма вероятно в случае, когда порядок роста правой части соответствующего дифференциального уравнения по фазовой переменной превышает линейный. В [5, пример к теореме 2.2, с. 87–88, § 4, с. 95–100; 6, § 1; 7, введение, п. 2] приводятся достаточно показательные примеры на этот счет.

Между тем вопрос о сохранении разрешимости (тотально или локально) неизбежно возникает в теории оптимизации (в частности, при выводе необходимых условий оптимальности, обосновании численных методов оптимизации, в дифференциальных играх и т. д.), но различными исследователями решается (снимается) по-разному. Что касается ТСР, то (помимо простого постулирования) другими авторами чаще всего используются следующие подходы.

1. Требуют равномерной ограниченности и липшицевости правой части уравнения (либо делают какие-то родственные предположения). Для сосредоточенных систем это позволяет воспользоваться теоремами существования и единственности Каратеодори (см., например, [8, с. 236]).

2. Используют теорию монотонных операторов (см., например, [9, 10]).

Для распределенных систем эволюционного типа в [4] было введено понятие *тотального сохранения глобальной разрешимости* (ТСГР) и доказан мажорантный признак ТСГР. В [11] доказан еще один признак ТСГР мажоратно-минорантного типа (тоже для эволюционных систем). Отличие состояло в том, что мажорантная система (так же как и минорантная) имела точно такую же структуру, как исходная. Менялась фактически только правая часть, в частности, таким образом, что зависимость от управления удалялась. Признак ТСР для не обязательно эволюционных систем, основанный на одном обобщении метода монотонных операторов, был доказан в [12]. Помимо собственно ТСГР/ТСР в [4,11] доказывалась равномерная (по множеству допустимых управлений) поточечная оценка решений, а в [12] — равномерная оценка по норме соответствующего пространства. Свойство ТСР управляемых распределенных систем использовалось автором при исследовании следующих вопросов:

1) при обосновании численных методов оптимального управления [13–15];

2) при доказательстве управляемости [16];

3) при доказательстве существования равновесия в дифференциальных играх [17–19].

З а м е ч а н и е 2. Система стационарных уравнений диффузии–реакции имеет важное прикладное значение и потому является объектом пристального изучения (см., например, [9, 10, 20–22]; там же см. дальнейшую библиографию).

З а м е ч а н и е 3. В рамках теории оптимального управления вопросы ТСР для задач, связанных с эллиптическими уравнениями типа диффузии–реакции, рассматривались и раньше. Как правило, предполагалось, что

$$f(t,\xi,v) = z(t,v) - d(t,\xi),$$

где $d(t,\xi)$ возрастает (не убывает) по $\xi \in \mathbb{R}$, следовательно, $f(t,\xi,v)$ убывает (не возрастает) по $\xi \in \mathbb{R}$. Это было нужно, чтобы использовать теорию монотонных операторов (см., например, [9,10]).

§ 3. Абстрактный аналог теоремы Уинтнера

Пусть $n, m, s, \ell \in \mathbb{N}$; подмножество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу и ограничено; $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Pi)$ — лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1,+\infty)$; $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — ограниченное множество допустимых управлений; $\mathcal{F}$ — класс функций

$$f(t,\xi,v)\colon \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m,$$

измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $\{\xi, v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и таких, что для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$ суперпозиция $f\Big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\Big) \in \mathcal{Z}^m$.

Пусть, кроме того, $A\colon \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — изотонный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Рассмотрим уравнение типа Гаммерштейна

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{Г}$$

управляемое с помощью выбора функции $u \in \mathcal{D}$. Здесь $\theta \in \mathcal{X}^\ell_+$, $f \in \mathcal{F}$.

Сделаем дополнительные предположения.

H) Существует банахово пространство $\mathcal{H}$, компактно вложенное в $\mathcal{X}$, и при этом $\theta \in \mathcal{H}^\ell$, а оператор A можно рассматривать как ЛОО $\mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell$.

Будем предполагать, что существуют функция $g\colon\ \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \to \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$, $g(\tau) \geqslant \overline{g} > 0$ для всех д.б. $\tau > 0$, и семейство функций $\psi_\tau \in \mathcal{F}$, $\tau > 0$, такие, что

G$_0$) для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^\ell_+$, $\xi \leqslant \eta$, и для п.в. $t \in \Pi$ и всех $u \in \mathcal{D}$ имеем

$$f\big(t,\xi,u(t)\big) \leqslant f\big(t,\eta,u(t)\big), \quad f\big(t,0,u(t)\big) \geqslant 0;$$

G$_1$) для п.в. $t \in \Pi$, $\xi \in \mathbb{R}^\ell_+$, $u \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$f\big(t,\tau\xi,u(t)\big) \leqslant g(\tau)\,\psi_\tau\big(t,\xi,u(t)\big);$$

G$_2$) существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\psi_\tau(\cdot,x,u)\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant M$$

для всех $u \in \mathcal{D}$, $x \in \mathcal{X}^\ell_+$, $\|x\|_{\mathcal{X}^\ell} = 1$, и для всех д.б. $\tau > 0$;

G$_3$) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \dfrac{\tau}{g(\tau)} = K$, где

$$K > L = \|\theta\|_{\mathcal{X}^\ell}/\overline{g} + M\,\|A\|.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнены все сделанные выше предположения относительно уравнения* (Г). *Тогда уравнение* (Г) *имеет по крайней мере одно решение $x = x[u]$ для всех $u \in \mathcal{D}$. Это решение можно найти как предел последовательности $\{x_k\}$, определяемой рекуррентной формулой:*

$$x_k = \theta + A\big[f(\cdot, x_{k-1}, u)\big], \quad k \in \mathbb{N}; \quad x_0 = 0.$$

При этом существует число $N > 0$ такое, что справедлива равномерная оценка $\|x[u]\| \leqslant N$ для всех $u \in \mathcal{D}$.

Доказательство является довольно громоздким, поэтому здесь не приводится.

§ 4. Сведение задачи (d) к уравнению типа Гаммерштейна

Вспомним некоторые известные утверждения. Первое — это теорема вложения Соболева–Кондрашова (см., например, [2, глава II, теорема 2.2]).

Л е м м а 4.1. *Для всех ограниченных выпуклых областей* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *(и конечных сумм таких областей) ограниченные множества функций* $x \in W_p^1(\Pi)$ *относительно компактны в* $L_q(\Pi)$ *для всех* $q < \dfrac{pn}{n-p}$ *при* $p \leqslant n$ *и относительно компактны в* $\mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Pi})$ *для всех* $\alpha < 1 - \dfrac{n}{p}$ *при* $p > n$.

Следующее — это теорема Лакса–Мильграма (см., например, [3, § 5.8, теорема 5.8, с. 84]).

Л е м м а 4.2. *Пусть* H *— вещественное гильбертово пространство;* $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ *— билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, то есть существуют константы* $\gamma_1,\ \gamma_2 > 0$ *такие, что*

$$\bigl|B[x,y]\bigr| \leqslant \gamma_2 \|x\|\,\|y\|, \quad B(x,x) \geqslant \gamma_1 \|x\|^2 \quad \text{для всех } x, y \in H.$$

Тогда для любого $\Psi \in H^*$ *существует единственный элемент* $x \in H$ *такой, что выполняется равенство* $B[x,\cdot] = \Psi$.

И наконец — *принцип максимума* для эллиптических уравнений (см., например, [3, теорема 8.1]).

Л е м м а 4.3. *Для любых* $G \in \mathcal{G}(\gamma)$ *и* $b \in L_\infty^+(\Pi)$, *при условии, что*

$$B[x,\omega] \equiv \int_\Pi \bigl[G\nabla x \cdot \nabla\omega + bx\omega\bigr]\,dt \geqslant 0 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbf{C}_0^1(\Pi), \quad \omega \geqslant 0,$$

имеем $\inf\limits_{\Pi} x \geqslant \inf\limits_{\partial\Pi} x^-$, *где* $x^- = \min\{x, 0\}$.

Непосредственно из леммы 4.3 следует

Л е м м а 4.4. *Для любых* $G \in \mathcal{G}(\gamma)$, $b \in L_\infty^+(\Pi)$, $z \in L_2^+(\Pi)$ *и, соответственно,*

$$\mathcal{L}[x] \equiv -\operatorname{div}\bigl(G\nabla x\bigr) + bx$$

всякое обобщенное решение задачи

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t),\ t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0 \tag{4.1}$$

неотрицательно: $x \geqslant 0$.

Разрешимость задачи (4.1), равно как и задачи более общего вида

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t) - \operatorname{div}\vec{Q}(t),\ t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{4.2}$$

для любых $z \in L_2(\Pi)$, $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$, доказывается стандартным образом на основе леммы 4.2. Прежде всего напомним *неравенство Пуанкаре–Фридрихса*: существует константа

$$R_\Pi = R(\operatorname{mes}\Pi)^{1/n},$$

где $R > 0$ зависит лишь от n, такая, что для любой функции $x \in H_0^1(\Pi)$ имеет место оценка

$$\|x\|_{L_2(\Pi)} \leqslant R_\Pi \|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)}.$$

С помощью этого неравенства нетрудно сконструировать положительную константу μ такую, что

$$\|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)} \geqslant \sqrt{\mu}\,\|x\|_{W_2^1(\Pi)} \quad \text{для всех } x \in H_0^1(\Pi). \tag{4.3}$$

Однако сделать это можно разными способами. Далее для определенности константу μ будем считать заданной. Теперь для произвольно фиксированных $z \in L_2(\Pi)$, $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$ рассмотрим задачу (4.2). Так же, как и раньше, элемент $x \in H_0^1(\Pi)$ называем обобщенным решением такой задачи, если и только если для каждого $\omega \in H_0^1(\Pi)$ выполняется тождество $B[x,\omega] = \psi[\omega]$, где

$$\psi[\omega] \equiv \int_\Pi \Big\{ z(t)\omega(t) + \vec{Q}(t) \cdot \nabla\omega(t) \Big\}\, dt.$$

Ясно, что $\psi[\omega]$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathcal{H} = H_0^1(\Pi)$, то есть $\psi \in \mathcal{H}^*$. Действительно, пользуясь неравенствами Гельдера и Коши–Буняковского, можем оценить

$$\big|\psi[\omega]\big| \leqslant \|z\|_{L_2(\Pi)}\|\omega\|_{L_2(\Pi)} + \|\vec{Q}\|_{L_2^n(\Pi)}\|\nabla\omega\|_{L_2^n(\Pi)} \leqslant 2\max\big\{\|z\|_{L_2(\Pi)}, \|\vec{Q}\|_{L_2^n(\Pi)}\big\}\|\omega\|_{W_2^1(\Pi)}$$

для всех $\omega \in W_2^1(\Pi)$ и, в частности, для всех $\omega \in \mathcal{H}$.

Пользуясь определением класса $\mathcal{G}(\gamma)$, а также неравенствами Коши–Буняковского и Гельдера, аналогичным образом нетрудно показать, что билинейная форма $B[x,y]$ является ограниченной. Пользуясь определением класса $\mathcal{G}(\gamma)$, неотрицательностью функции $b \in L_\infty^+(\Pi)$ и неравенством (4.3), для произвольного $x \in \mathcal{H}$ можем оценить

$$B[x,x] = \int_\Pi \big[G\nabla x \cdot \nabla x + bx^2\big]\, dt \geqslant \gamma\|\nabla x\|_{L_2^n}^2 \geqslant \gamma_1\|x\|_{W_2^1}^2,\ \gamma_1 = \gamma\mu.$$

Это означает, что билинейная форма $B[x,y]$ коэрцитивна. Таким образом, согласно теореме Лакса–Мильграма (лемме 4.2), при данных (произвольно фиксированных) $z \in L_2(\Pi)$, $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$, существует единственное решение $x \in H_0^1(\Pi)$ задачи (4.2).

Для всякого $z \in L_2(\Pi)$ обозначим: $A[z]$ — обобщенное решение задачи (4.1); θ — обобщенное решение задачи

$$\mathcal{L}[x](t) = -\operatorname{div}\vec{Q}(t),\ t \in \Pi, \qquad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{4.4}$$

Тогда сумма $x = \theta + A[z]$ будет обобщенным решением задачи (4.2). Соответственно, решение исходной задачи (d) можно понимать как решение уравнения типа Гаммерштейна (Г) при $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$ (см. лемму 4.1 и условия относительно функции f), $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\ell = m = 1$. Из леммы 4.4 следует изотонность оператора A, а из леммы 4.1 — выполнение условия **H** при $\mathcal{H} = H_0^1(\Pi)$.

Таким образом, можно пользоваться теоремой 3.1, откуда получаем теорему 1.1.

Список литературы

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
3. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
4. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 3. С. 95–107.
5. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
6. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
7. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
8. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.
9. Casas E. Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Control Optim. 1993. Vol. 31. P. 993–1006.
10. Tröltzsch F. Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications / Graduate Studies in Mathematics. Vol. 112. Providence, R.I.: American mathematical society, 2010. xv+399 p.

11. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
12. Чернов А.В. Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.
13. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
14. Чернов А.В. О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.
15. Чернов А.В. О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.
16. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
17. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
18. Чернов А.В. Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 316–328.
19. Чернов А.В. О существовании ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями, управляемыми многими игроками // Матем. теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 1. С. 91–115.
20. Воробьев А.Х. Диффузионные задачи в химической кинетике. М.: МГУ, 2003. 98 с.
21. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 1. С. 20–46.
22. Вахитов И.С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии–реакции // Дальневосточный матем. журн. 2010. Т. 10. № 2. С. 93–105.

Поступила в редакцию 01.09.2015

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23; кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: chavnn@mail.ru

A. V. Chernov

On the analogue of Wintner's theorem for a controlled elliptic equation

Keywords: controlled semilinear elliptic equation, total preservation of solvability.

MSC: 35B30, 35B37, 47J35

For a homogeneous Dirichlet problem associated with a controlled semilinear partial differential elliptic equation of the second order, referred as a stationary diffusion–reaction equation, we state analogue of the classical Wintner's theorem concerning the solvability of the Cauchy problem for an ordinary differential equation.

REFERENCES

1. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*, New York: John Wiley & Sons, 1964, xiv+612 p. Translated under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.
2. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations*, New York–London: Academic Press, 1968, xviii+495 p. Original Russian text (2nd revised ed.) published in Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa*, Moscow: Nauka, 1973, 576 p.
3. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Berlin: Springer, 1983, xiii+513 p. Translated under the title *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka*, Moscow: Nauka, 1989, 464 p.
4. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. DOI: 10.3103/S1066369X11030108
5. Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A. On the appearance of collapses for quasilinear equations of the parabolic and hyperbolic types, *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 1977, vol. 69, pp. 77–102 (in Russian).

6. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15.
7. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhni Novgorod: NNSU, 1992, 110 p.
8. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Semina E.A. *Teoriya igr* (Game Theory), Moscow: Vysshaya Shkola, 1998, 304 p.
9. Casas E. Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 1993, vol. 31, pp. 993–1006.
10. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 112, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010, xv+399 p.
11. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65.
DOI: 10.3103/S1066369X12030085
12. Chernov A.V. On a generalization of the method of monotone operators, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 517–527. DOI: 10.1134/S0012266113040125
13. Chernov A.V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523.
DOI: 10.1134/S0965542511090077
14. Chernov A.V. Smooth finite-dimensional approximations of distributed optimization problems via control discretization, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1839–1852.
DOI: 10.1134/S096554251312004X
15. Chernov A.V. On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 305–321 (in Russian).
16. Chernov A.V. Sufficient conditions for the controllability of nonlinear distributed systems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1115–1127. DOI: 10.1134/S0965542512050053
17. Chernov A.V. On Volterra functional operator games on a given set, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 787–803. DOI: 10.1134/S0005117914040195
18. Chernov A.V. On ε-equilibrium in noncooperative functional operator n-person games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 316–328 (in Russian).
19. Chernov A.V. On existence of ε-equilibrium in noncooperative n-person games associated with elliptic partial differential equations, *Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya*, 2014, vol. 6, issue 1, pp. 91–115 (in Russian).
20. Vorob'ev A.Kh. *Diffuzionnye zadachi v khimicheskoi kinetike* (Diffusion problems in chemical kinetics), Moscow: Moscow State University, 2003, 98 p.
21. Lubyshev F.V., Manapova A.R. Difference approximations of optimization problems for semilinear elliptic equations in a convex domain with controls in the coefficients multiplying the highest derivatives, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 1, pp. 8–33. DOI: 10.1134/S0965542513010053
22. Vakhitov I.S. Inverse identification problem for unknown coefficient in the diffusion–reaction equation, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 93–105 (in Russian).

Received 01.09.2015

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Nizhni Novgorod State University named after N. I. Lobachevskii, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia; Department of Applied Mathematics, Nizhni Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru