УДК 517.9

© *А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, И. И. Савенков*

ЗАДАЧА О ДОСТИЖИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА[1]

Рассматривается задача о построении и исследовании свойств областей достижимости линейной управляемой системы с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях и задача о достижимости «в среднем» (имеется в виду достижимость в классе математических ожиданий случайных векторов). Упомянутые варианты изучаются с единых позиций; основное внимание уделяется постановке с ограничениями асимптотического характера. В частности, этим ограничениям отвечает режим управления в классе «узких» импульсов. Рассматриваются задачи управления с ограничениями импульсного характера и требованием обязательного расходования энергоресурса в течении промежутка (времени) исчезающей длительности.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

§ 1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), к.-а. — конечно-аддитивная (мера), МО — математическое ожидание, МП — множество притяжения, НМ — направленное множество, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, СВ — случайная величина, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, у/ф — ультрафильтр.

В работе исследуются некоторые варианты задачи о достижимости, включая задачу о построении и исследовании свойств ОД линейной управляемой системы с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях и задачу о достижимости «в среднем» (имеется в виду достижимость в классе математических ожиданий случайных векторов). Упомянутые варианты рассматриваются с единых позиций; основное внимание уделяется постановке с ОАХ, которые могут возникать при последовательном ослаблении стандартных для теории управления ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения), но могут возникать и изначально. В частности, один из случаев «непосредственного» возникновения ОАХ рассматривается ниже: исследуются режимы управления в классе «узких» импульсов. Точнее, обсуждаются задачи управления с ограничениями импульсного характера и требованием обязательного расходования энергоресурса в течении промежутка (времени) исчезающей длительности. При исследовании комплекса разнородных ограничений, которые должны соблюдаться с высокой, но всё же конечной, степенью точности возникают совокупные ОАХ, которые могут включать компоненты, отвечающие ослаблению стандартных ограничений, и компоненты, которые по самому своему определению отвечают асимптотическим режимам. В результате возникает постановка, ориентированная на построение асимптотических аналогов ОД в виде МП, которые в практическом отношении могут рассматриваться как естественные «заменители» упомянутых ОД с точки зрения вопросов оценки возможностей управляющей стороны.

Отметим, что в [1, гл. III] для задачи оптимального управления введены три типа решений (управлений): точные, обобщенные и приближенные. Последние можно при несущественной модификации применять и в задачах о достижимости, имея в виду реализацию с их помощью точек МП. Правда, упомянутые конструкции [1] являются по смыслу секвенциальными: приближенные решения [1] определяются в виде последовательностей обычных решений. В задачах о построении МП решения-последовательности могут не исчерпывать всех возможностей управляющей стороны; требуются более общие конструкции, которые можно связывать с направленностями [2, гл. 2] или с фильтрами [3, гл. I]. Такие конструкции см. в [4, 5] и в ряде других работ; основное внимание уделяется при этом использованию (в качестве аналогов прибли-

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 15–01–07909-а и 16–01–00505-а.

женных решений Дж. Варги; см. [1, гл. III]) фильтров и, в частности, ультрафильтров. Возникают, однако, серьезные затруднения с практической реализацией так называемых свободных у/ф [6, 3.6], которые как раз и ответственны за реализацию нетривиальных асимптотических эффектов. Эти затруднения касаются у/ф семейства всех п/м (исходного) пространства обычных решений. Остается, однако, возможность использования (в не столь общих случаях) у/ф того или иного семейства упомянутых п/м. Эта возможность рассматривалась в большой серии работ одного из авторов; сейчас отметим [5, 7–11]. В этой связи полезно упомянуть конкретные результаты [12], связанные с представлением компакта Стоуна (пространство у/ф алгебры множеств) для невырожденного отрезка вещественной прямой в оснащении алгеброй п/м данного отрезка, порожденной семейством промежутков (открытых, полуоткрытых, замкнутых), содержащихся в упомянутом отрезке (см., например, [12, предложение 6.1]). Данная конструкция развивалась, с одной стороны, в сторону получения конструктивного описания компактов Стоуна большой мощности (см., например, [10,11,13]), а с другой — в сторону построения представлений к.-а. управлений-мер специального вида [14]. Развитию этого последнего направления посвящена настоящая работа: у/ф используются для целей построения МП не напрямую, а лишь опосредованно, определяя нужные к.-а. меры, которые и будут использоваться далее в виде ОЭ (в этом смысле здесь продолжается развитие конструкций [15–18] и целого ряда других работ). В то же время сами используемые ниже к.-а. меры в своей существенной части определяются у/ф; в этом смысле имеем здесь естественное продолжение исследований [14,19].

В то же время по своей направленности настоящая работа продолжает [20]: в ней рассматривается режим управления в классе «узких» импульсов при наличии ограничений моментного характера, которые могут, в частности, возникать в результате учета краевых и промежуточных условий на траектории процесса.

Другая интерпретация излагаемой ниже процедуры отвечает задаче о достижимости «в среднем», когда задаются два набора СВ, а вероятность, напротив, не задается, но должна определять на одном из упомянутых случайных векторов в виде системы МО элемент заданного множества; при этом условии требуется определить совокупность возможных значений для МО второго случайного вектора. Две упомянутые весьма различные задачи удается объединить общей абстрактной постановкой, которая и будет предметом последующего рассмотрения. В то же время предлагаемая конструкция будет более частной в сравнении с [15–18] и позволяющей за счет этого получить решение (в виде соответствующего МП) в терминах исходной задачи. По ходу исследования на случай управления в классе «узких» импульсов удается распространить положения [15–18], относящиеся к условиям, обеспечивающим асимптотическую нечувствительность (по сути дела — грубость) по результату при ослаблении части ограничений.

§ 2. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Выражение def заменяет фразу «по определению», а $\exists!$ (как обычно) — фразу «существует и единственно». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора.

Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем множество, содержащее x,y и не содержащее никаких других элементов. Пусть $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ для каждого объекта z; получаем синглетон, содержащий z. Для всяких двух объектов a и b полагаем [23, с. 67], что $(a,b) \triangleq \big\{\{a\};\{a;b\}\big\}$, получая УП с первым элементом a и вторым элементом b. Если z есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$. Разумеется, в случае $z = A \times B$, где A и B — множества, непременно $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. Для каждого множества X через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если $\mathcal{M}$ — непустое семейство и N — множество, то

$$\mathcal{M}|_N \triangleq \{M \cap N : \ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(N)\big) \tag{2.1}$$

есть след $\mathcal{M}$ на множество N (в дальнейшем (2.1) используется, как правило, в том случае, когда $\mathcal{M}$ есть топология некоторого множества H, для которого $N \in \mathcal{P}(H)$).

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (следуем [23, с. 77]); для $f \in B^A$ используем также общепринятое обозначение $f\colon A \to B$ и для $a \in A$ через $f(a)$, $f(a) \in B$, обозначаем значение f в точке a. Если A, B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то (см. [23]) $f^1(C) \triangleq \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f, $f^1(C) \in \mathcal{P}'(B)$ при $C \in \mathcal{P}'(A)$.

Всюду в дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, промежутки в $\mathbb{R}$ (открытые, полуоткрытые и замкнутые) обозначаем только посредством квадратных скобок; см. [3, гл. I], [24, § 1.3]. Полагаем, что $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и, при $m \in \mathbb{N}$, $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} |\, k \leqslant m\}$ и $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} |\, m \leqslant k\}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, не являются множествами, условимся для всякого множества T вместо $T^{\overline{1,m}}$ использовать более традиционное обозначение T^m, получая при этом множество всех кортежей $(t_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1,m} \to T$, которые, строго говоря, являются отображениями из $\overline{1,m}$ в T. В частности, элементы $\mathbb{R}^m$, то есть m-мерные вектора, далее определяются в виде кортежей «длины» m, что является, конечно, модификацией, не существенной для всех последующих построений.

Специальные семейства множеств. В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество E и полагаем, что

$$\pi[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big) |\, (\varnothing \in \mathcal{L}) \,\&\, (E \in \mathcal{L}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{L} \ \ \forall A \in \mathcal{L} \ \ \forall B \in \mathcal{L})\}, \tag{2.2}$$

получая (в (2.2)) семейство всех π-систем [25, с. 14] п/м E (короче: π-систем на E с «нулем» и «единицей»). Определение (2.2) является очень общим; полезно отметить некоторые частные случаи, важные для дальнейших построений. Так, посредством

$$(\mathrm{top})[E] \triangleq \{\tau \in \pi[E] \,|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}, \quad (\mathrm{alg}[E] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[E] |\, E \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A})\}$$

определены семейство всех топологий на E и семейство всех алгебр п/м E.

Всюду в дальнейшем через $\beta[E]$ (через $\beta_o[E]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(E)\big)$), для каждого из которых

$$\forall B_1 \in \mathcal{B} \ \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \ \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Элементы $\beta[E]$ суть направленные семейства п/м E, а элементы $\beta_o[E]$ — БФ множества E.

Фиксируя до конца настоящего пункта $\mathcal{L} \in \pi[E]$, введем также $\beta^o_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_o[E] | \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\}$, получая (в виде семейств $\mathfrak{B} \in \beta^o_{\mathcal{L}}[E]$) БФ широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}\backslash\{\varnothing\}) | \, (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F}) \,\&\, \big(\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall L \in \mathcal{L} \ \ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F})\big)\big\}$$

имеем множество всех фильтров, а в виде

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \, \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\big) \tag{2.3}$$

семейство всех у/ф $(E, \mathcal{L})$. Элементы семейства (2.3) играют в дальнейшем важную роль. При $x \in E$ в виде

$$\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} | \, x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

имеем тривиальный фильтр $(E, \mathcal{L})$, отвечающий точке x. Отметим, что

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta^o_{\mathcal{L}}[E] \subset \beta_o[E]. \tag{2.4}$$

Условия максимальности тривиальных фильтров π-систем см., например, в [10, раздел 2]. Имеем

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} | \, \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} | \, \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_o[E]; \tag{2.5}$$

в частности, в (2.5) можно использовать БФ из $\beta^o_{\mathcal{L}}[E]$ (вообще же (2.5) — стандартный способ построения фильтров с помощью баз).

Стоун–чеховские ультрафильтры. В пределах настоящего пункта используем (2.3) при $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. В этой связи отметим, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}[E] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(E)\big) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(E)\big) | \, (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F}) \,\& \\ \&\, \big(\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall L \in \mathcal{P}(E) \ \ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F})\big)\}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Элементы (2.6) называем фильтрами множества E. Соответственно

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*_o\big(\mathcal{P}(E)\big) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[E] | \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.7}$$

есть множество всех у/ф E. При этом

$$(E - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \Big(\big(E, \mathcal{P}(E)\big) - \mathrm{ult}\Big)[x] = \{L \in \mathcal{P}(E) | \, x \in L\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \ \forall x \in E.$$

Тем самым введены тривиальные у/ф множества E. Множество (2.7) непусто. Отметим здесь же, что

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} | \, \mathcal{P}(E)] = \{L \in \mathcal{P}(E) | \, \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset L\} \in \mathfrak{F}[E] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_o[E].$$

Полагаем, кроме того, что

$$\mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[E | \, \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] | \, \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{2.8}$$

В связи с (2.6), (2.7) отметим конструкцию [26, с. 165–167], связанную с компактификацией Стоуна–Чеха.

Элементы топологии. В пределах настоящего пункта фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Тогда, в частности, $\tau \in \pi[E]$. При этом (E, τ) есть ТП. Если $x \in E$, то $N^o_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau | \, x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, а $N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[N^o_\tau(x)] \in \mathfrak{F}[E]$ есть фильтр окрестностей точки x, понимаемых в смысле [3, гл. I]. Если $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$ и $x \in E$, то

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Rightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{2.9}$$

С учетом (2.4) отметим, что в (2.9) можно в качестве $\mathcal{B}$ использовать у/ф произвольной π-системы множества E. Кроме того, $\mathfrak{F}[E] \subset \beta_o[E]$, а потому (2.9) применимо в случае $\mathcal{B} = \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$; тогда, кстати,

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F}.$$

С (2.9) полезно связать сходимость по Мору–Смиту [2, гл. 2]. Для этого напомним, что НМ называют произвольную пару $(D, \preceq)$, где D есть непустое множество, а $\preceq$ — направление на D. Направленностью в множестве E называем всякий триплет $(D, \preceq, g)$, где $(D, \preceq)$ есть (непустое) НМ, а $g \in E^D$. Каждой направленности $(D, \preceq, g)$ в множестве E сопоставляем фильтр

$$(E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g] \stackrel{\triangle}{=} \{M \in \mathcal{P}(E) | \, \exists d \in D \;\; \forall \delta \in D \;\; (d \preceq \delta) \Longrightarrow \big(g(\delta) \in M\big)\} \in \mathfrak{F}[E] \qquad (2.10)$$

(напомним [2, гл. 2], что $\preceq \in \mathcal{P}'(D \times D)$ и при $d_1 \in D, d_2 \in D$ как обычно $d_1 \preceq d_2$ означает, что $(d_1, d_2) \in \preceq$; подробнее см. в [17, раздел 2.2]); тогда $\forall x \in E$

$$\big((D, \preceq, g) \xrightarrow{\tau} x\big) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]\big). \qquad (2.11)$$

В (2.11) определена «обычная» сходимость по Мору–Смиту. Легко видеть, что при условиях, определяющих (2.11) ($(D, \preceq, g)$ — направленность в ТП (E, τ), $x \in E$)

$$\big((D, \preceq, g) \xrightarrow{\tau} x\big) \Longleftrightarrow \big((E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} x\big); \qquad (2.12)$$

см. в этой связи (2.11). Посредством (2.12) устанавливается естественная связь сходимости по Мору–Смиту и сходимости БФ в смысле [3, гл. I] (см. (2.9)). В частном случае последовательностей обозначения естественным образом упрощаем: если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ и $x \in E$, то

$$\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} x\big) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall H \in N_\tau(x) \; \exists m \in \mathbb{N} : \; x_k \in H \;\; \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}\big).$$

Если при этом $E = \mathbb{R}$ и τ есть обычная $|\cdot|$-топология $\tau_{\mathbb{R}}$ множества $\mathbb{R}$, то вместо $\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} x\big)$ в последнем выражении используем $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \to x$. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$(\mathcal{E} - \mathrm{seq})[E] \stackrel{\triangle}{=} \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} | \, \forall \Sigma \in \mathcal{E} \;\; \exists k \in \mathbb{N} : \; x_j \in \Sigma \;\; \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}\} \;\; \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \qquad (2.13)$$

Напомним (см. (2.1)), что $\tau|_S = \{S \cap G : \, G \in \tau\} \in (\mathrm{top})[S] \;\; \forall S \in \mathcal{P}'(E)$. Если $S \in \mathcal{P}'(E)$, то $(S, \tau|_S)$ есть подпространство исходного ТП (E, τ).

Кроме того, если $H \in \mathcal{P}(E)$, то $\mathrm{cl}(H, \tau)$ есть def замыкание множества H в ТП (E, τ). Наконец, через $(\tau - \mathrm{comp})[E]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в ТП (E, τ) п/м множества E; см. [6, с. 196].

§ 3. Множества притяжения

До конца настоящего раздела фиксируем непустые множества $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, топологию $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$ и отображение $r \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$. Рассматриваем в настоящем разделе $\mathbb{X}$ в качестве пространства решений, а $\mathbb{Y}$ — в качестве пространства состояний, которые мы стремимся достигать на значениях отображения r при наличии тех или иных ОАХ. Сами же ОАХ определяем как семейства из $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{X})\big)$, не связывая уже обязательно эти семейства с ослаблением каких-то стандартных ограничений.

Следуя [7, определение 3.1], при $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{X})\big)$ полагаем, что $(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; r; \mathcal{X}]$ есть def множество всех $y \in \mathbb{Y}$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, q)$ в $\mathbb{X}$, что

$$\big(\mathcal{X} \subset (\mathbb{X} - \mathrm{ass})[D; \preceq; q]\big) \& \big((D, \preceq, r \circ q) \stackrel{\tau}{\longrightarrow} y\big). \qquad (3.1)$$

Известно [5,7], что $(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; r; \mathcal{X}] = \{y \in \mathbb{Y} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[\mathbb{X} | \, \mathcal{X}] \colon \, f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} y\}$; в этой связи см. (2.9). В случае $\mathcal{X} \in \beta[\mathbb{X}]$ $(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; r; \mathcal{X}]$ есть [5, (3.7)] пересечение всех множеств $\mathrm{cl}\big(r^1(B), \tau\big)$, $B \in \mathcal{X}$, то есть

$$(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; r; \mathcal{X}] = \bigcap_{B \in \mathcal{X}} \mathrm{cl}\big(r^1(B), \tau\big). \qquad (3.2)$$

Связь построений на основе (3.1) и (3.2) весьма очевидна (см. [5, (3.8)]): располагая семейством $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{X})\big)$, для применения аналога (3.2) следует только (в правой части (3.2)) заменить $\mathcal{X}$ семейством всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{X}$.

Особо остановимся на возможностях представления МП, использующих только последовательности (см. [16, с. 38]) обычных решений. Условимся о соглашении: если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{X})\big)$, то (см. (2.13))

$$(\mathbf{sas})[\mathbb{X};\mathbb{Y};\tau;r;\mathcal{X}] \overset{\triangle}{=} \{y \in \mathbb{Y} \,|\, \exists (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{X}-\mathrm{seq})[\mathbb{X}] : \big(r(x_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} y\}. \tag{3.3}$$

В дальнейшем (3.3) называем секвенциальным МП. Ясно, что всегда

$$(\mathbf{sas})[\mathbb{X};\mathbb{Y};\tau;r;\mathcal{X}] \subset (\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathbb{Y};\tau;r;\mathcal{X}] \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{X})\big). \tag{3.4}$$

Отметим, что достаточные условия совпадения множеств, используемых в (3.4), указаны, в частности, в [16, с. 38] (имеется в виду случай, когда семейство $\mathcal{X}$, используемое в (3.3), направлено и имеет счетную базу, а $(\mathbb{Y},\tau)$ есть ТП с первой аксиомой счетности); данные условия несколько обобщены в [5, предложение 3.2].

Отметим теперь важное свойство, связанное с компактифицируемостью задачи о построении МП; см., например, [5, (4.1)]. Если $E, \mathbf{H}$ и $\mathbf{K}$ — непустые множества, $\tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, $\tau_2 \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}]$, причем $(\mathbf{H},\tau_1)$ — хаусдорфово, а $(\mathbf{K},\tau_2)$ — компактное ТП, $p \in \mathbf{K}^E$ и $q \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$, причем отображение q непрерывно в смысле ТП $(\mathbf{K},\tau_2)$ и $(\mathbf{H},\tau_1)$, то

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau_1;q\circ p;\mathcal{E}] = q^1\big((\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tau_2;p;\mathcal{E}]\big) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{3.5}$$

§ 4. Проблема асимптотической достижимости: содержательное обсуждение

Всюду в дальнейшем фиксируем $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a < b$. Полагаем далее

$$I \overset{\triangle}{=} [a,b], \tag{4.1}$$

получая невырожденный замкнутый промежуток вещественной прямой, который можно, в частности, рассматривать в качестве промежутка управления. Эту интерпретацию рассматриваем в качестве основной. Итак, обсудим вариант задачи о построении и исследовании свойств ОД, намеченной во Введении.

При этом $a = t_o$ есть начальный, а $b = \vartheta_o$ — конечный моменты времени; система

$$\dot{x}(t) = u(t)M(t) + m(t), \qquad x(a) = x_o, \tag{4.2}$$

может быть задана изначально, а может возникать после неособого линейного преобразования [21, с. 160]. В (4.2) $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$ — размерность фазового пространства, $u(t)$ — скаляр, $M(t) \in \mathbb{R}^n$ и $m(t) \in \mathbb{R}^n$. Полагаем при этом, что $u = u(\cdot)$ есть кусочно-постоянная (к.-п.) в/з функция, являющаяся программным управлением, специально предполагаемым простейшим и, стало быть, реализуемым. Это управление может выбираться из заданного множества U обычных управляющих программ. Вектор-функции $M = M(\cdot)$ и $m = m(\cdot)$ полагаем такими, что все их компоненты — суть равномерные пределы к.-п. в/з функций, вектор $x_o \in \mathbb{R}^n$ полагаем заданным.

Полагаем, однако, что помимо требования $u \in U$ имеются еще и другие условия на выбор программного управления, причем допускаются и условия асимптотического характера, в которых указывается скорее желаемое «направление», а степень продвижения в данном «направлении» не задается. Если условий последнего типа нет, а имеются лишь ограничения, определяемые в виде $u \in U_o$, где U_o есть п/м U (то есть $U_o \in \mathcal{P}(U)$), то в виде множества всех состояний

$$\mathbf{x}_u(b) \overset{\triangle}{=} x_o + \int_a^b u(t)M(t)\,dt + \int_a^b m(t)\,dt, \qquad u \in U_o, \tag{4.3}$$

мы получаем ОД системы (4.2) в момент b. Данная ОД, однако, может скачкообразно изменяться при «малом» изменении U_o и, в частности, при ослаблении данного ограничения отсутствует свойство устойчивости. Поскольку при ослаблении ограничений ОД «расширяется», логично ориентироваться на соблюдение ограничений, определяемых посредством U_o, с высокой, но все же конечной степенью точности. Таким образом, мы приходим к целесообразности рассмотрения задачи о достижимости с ОАХ (это тем более актуально в случае, когда «асимптотические» изначально компоненты присутствуют в совокупной системе ограничений). Будем рассматривать далее случай, когда U есть множество всех неотрицательных к.-п. в/з функций на I, у которых интеграл совпадает с заданным числом $\mathbf{d} \in]0, \infty[$. Последнее можно рассматривать как запас топлива, которое должно быть израсходовано полностью. С учетом (4.2) можно, однако, полагать, что $\mathbf{d} = 1$, прибегая, если это не так, к перенормировке $M = M(\cdot)$. Принимаем данное соглашение, имея в виду и некоторые другие конкретизации рассматриваемой ниже общей постановки.

Будем рассматривать следующие дополнительные ограничения на выбор $u \in U$: 1) управление $u = u(\cdot)$ должно быть импульсом исчезающе малой продолжительности; 2) данное управление должно удовлетворять ограничению моментного характера. Компонента 1) совокупных ограничений изначально имеет асимптотический характер и является условием на выбор приближенного решения, которое может определяться по аналогии с [1, гл. III]. Компонента 2) имеет вид условия

$$\int_a^b u(t)s(t)\,dt \in Y, \tag{4.4}$$

где $s = s(\cdot)$ есть N-вектор-функция при $N \in \mathbb{N}$, у которой все компоненты являются равномерными пределами к.-п. в/з функций на I, а Y — непустое замкнутое п/м $\mathbb{R}^N$. Ограничение (4.4) стандартно, однако и здесь представляет интерес рассмотрение асимптотической версии, когда Y в правой части (4.4) заменяется той или иной окрестностью. Тогда, намеренно ослабляя (4.4), мы приходим к совокупному ОАХ (при этом множество U_o, о котором говорилось в начале раздела, теряет смысл: если пытаться воспроизвести его с учетом 1), то придется отождествить это множество с $\varnothing$; если же 1) игнорируется, то U_o можно определить в виде совокупности всех $u \in U$, соблюдающих (4.4)). Данному ОАХ сопоставляется (секвенциальное) МП на значениях n-вектор-функционала

$$u \longmapsto \mathbf{x}_u(b) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{4.5}$$

(здесь терминальные состояния $\mathbf{x}_u(b), u \in U$, определяются подобно (4.3)). Впрочем, для построения данного МП вполне достаточно определить аналогичное МП на значениях n-вектор-функционала

$$u \longmapsto \int_a^b u(t)M(t)\,dt : U \longrightarrow \mathbb{R}^n; \tag{4.6}$$

по этой причине мы и ограничимся рассмотрением конструкций, реализующих МП на значениях (4.6). При этих построениях будем допускать различные варианты ослабления Y-ограничения (4.4), следуя идейно [15,16,18], но учитывая (в отличие от [15,16,18]) влияние компоненты 1) совокупной системы ограничений. Именно, свойство асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений, подробно рассматриваемое в [15,16,18], исследуется здесь в режиме «узких импульсов»; будет установлено, что и в этом, характерном для многих задач импульсного управления, режиме упомянутое свойство имеет место.

Сейчас, (более кратко) обсудим еще одну возможную интерпретацию постановки, связанной с построением МП на значениях отображения (4.6), связывая эту постановку и с ограничениями вида (4.4).

Итак, будем рассматривать элементы $u \in U$ как плотности вероятности; при этом учитывается сделанное ранее предположение относительно U (и, в частности, требование $\mathbf{d} = 1$). Тогда (4.6) можно рассматривать как операцию построения МО случайного вектора M. Соответственно N-вектор-функционал

$$u \longmapsto \int_a^b u(t)s(t)\,dt : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{4.7}$$

есть операция построения МО случайного вектора s, а условие (4.4), допускающее определенную аналогию с известной проблемой моментов (см. [22] в связи с проявлениями данной проблемы в задачах управления), трактуем как ограничение на выбор плотности $u \in U$. При отсутствии других требований к выбору упомянутой плотности получаем следующую задачу о достижимости «в среднем»: имея заданное множество Y, определить множество возможных значений МО M при условии, что МО s есть элемент Y (см. (4.4)). При этом плотности $u \in U$ рассматриваются как реализуемые «инструменты» формирования случайности. Ослабляя (4.4), приходим к релаксации задачи о достижимости «в среднем».

Допустим теперь, что в этой последней задаче нас интересует ситуация «исчезающей» случайности: мы рассматриваем случай, когда плотность u локализована в пределах промежутка «малой» длины. Данное условие формирует асимптотическое по существу ограничение на реализацию плотности и не может быть введено в терминах релаксации какого-либо стандартного ограничения. Тем не менее оно легко встраивается в ОАХ в виде соответствующей компоненты, дополняющей компоненту, возникающую при последовательном ослаблении Y-ограничения (см. (4.4)).

§ 5. Конечно-аддитивные меры в обобщенной задаче о достижимости

Следуем соглашению (4.1) относительно I; полагаем (см. [12, (4.1]), что

$$\mathcal{J} \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{P}(I) | \exists\, c \in I\ \exists\, d \in I :\ (]c, d[\subset L) \,\&\, (L \subset [c, d])\},$$

получая полуалгебру п/м I (семейство всех промежутков (открытых, полуоткрытых и замкнутых), содержащихся в I). Через $\mathcal{A}$ всюду в дальнейшем обозначаем алгебру п/м I, порожденную полуалгеброй $\mathcal{J}$: имеем алгебру

$$\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[I], \tag{5.1}$$

для которой справедливы следующие свойства

$$(\mathcal{J} \subset \mathcal{A}) \,\&\, \big(\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]\ (\mathcal{J} \subset \mathcal{L}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{L})\big).$$

В виде $(I, \mathcal{A})$ имеем ИП с алгеброй множеств, которое фиксируется в дальнейшем.

Если $L \in \mathcal{P}(I)$, то через χ_L обозначаем индикатор L, рассматриваемый как в/з функция на $I : \chi_L \in \mathbb{R}^I$ и при этом

$$\big(\chi_L(x) \overset{\triangle}{=} 1 \quad \forall x \in L\big) \,\&\, \big(\chi_L(\tilde{x}) \overset{\triangle}{=} 0 \quad \forall \tilde{x} \in I \setminus L\big). \tag{5.2}$$

В качестве L в (5.2) можно использовать множества из $\mathcal{A}$, получая $\{\chi_L :\ L \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^I)$. Линейную оболочку $\{\chi_L :\ L \in \mathcal{A}\}$ в $\mathbb{R}^I$ (с поточечно определяемыми линейными операциями) обозначаем через $B_o(I, \mathcal{A})$, получая многообразие ступенчатых относительно $(I, \mathcal{A})$ в/з функций на I. При этом $B_o(I, \mathcal{A}) \subset \mathbb{B}(I)$, где $\mathbb{B}(I)$ — множество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}^I$, являющееся очевидно линейным пространством, оснащаемым обычной sup-нормой $\|\cdot\|$ [27, с. 261]. Более того, $\big(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|\big)$ есть банахово пространство [27, гл. IV]. Ясно, что замыкание $B(I, \mathcal{A})$ многообразия $B_o(I, \mathcal{A})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|$ само является банаховым пространством в норме подпространства $\big(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|\big)$. Хорошо известно [27, гл. IV] (см. также [24, § 3.6]), что топологическое сопряженное пространство к $B(I, \mathcal{A})$, обозначаемое через $B^*(I, \mathcal{A})$, отождествимо с пространством ограниченных в/з к.-а. мер на алгебре $\mathcal{A}$. В этой связи введем ряд определений, согласующихся с [24, гл. 3.4] (обозначение $B(I, \mathcal{A})$ соответствует [27, гл. IV]).

Через $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ обозначаем множество всех ограниченных в/з к.-а. мер на $\mathcal{A}$, являющееся, как легко видеть, линейным пространством, порождаемым конусом $(\mathrm{add})_+(\mathcal{A})$ (всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{A}$ (см. [24, § 4.11]). Тогда $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ оснащается традиционной (сильной) нормой-вариацией: каждой к.-а. мере из $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ сопоставляется ее полная вариация (см. [24, предложение 3.6.1, (4.11.6)]). Получающееся таким образом (полное) нормированное пространство изометрически изоморфно $B^*(I, \mathcal{A})$, а сам конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{A})$

в сильной норме на $B^*(I,\mathcal{A})$ при традиционном нормировании [24, предложение 3.5.4] определяется в виде оператора

$$\mu \longmapsto \Big(\int_I f\,d\mu\Big)_{f\in B(I,\mathcal{A})}\colon\ \mathbb{A}(\mathcal{A}) \longrightarrow B^*(I,\mathcal{A}),$$

где (здесь и ниже) операция интегрирования определяется простейшей схемой [24, гл. 3]. В виде

$$\big(B(I,\mathcal{A}),\mathbb{A}(\mathcal{A})\big)$$

получаем таким образом обычную (в теории топологических векторных пространств) двойственность, в связи с чем $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ оснащаем $*$-слабой топологией

$$\tau_*(\mathcal{A})\in(\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})],$$

получая при этом в виде ТП

$$\big(\mathbb{A}(\mathcal{A}),\tau_*(\mathcal{A})\big) \tag{5.3}$$

локально выпуклый σ-компакт; условия компактности в ТП (5.3) определяются известной теоремой Алаоглу (см. [27, гл. V, раздел 4]; в конкретизированном виде данные условия определены в [16, (3.4.19)]). Отметим, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{A})\overset{\triangle}{=}\{\mu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]\,|\,\mu(I)=1\}\in\big(\tau_*(\mathcal{A})-\mathrm{comp}\big)[\mathbb{A}(\mathcal{A})], \tag{5.4}$$

$$\mathbb{T}(\mathcal{A})\overset{\triangle}{=}\{\mu\in\mathbb{P}(\mathcal{A})|\,\forall A\in\mathcal{A}\ \ (\mu(A)=0)\vee(\mu(A)=1)\}\in\big(\tau_*(\mathcal{A})-\mathrm{comp}\big)[\mathbb{A}(\mathcal{A})]. \tag{5.5}$$

В (5.4) имеем компакт к.-а. вероятностей на $\mathcal{A}$, а (5.5) определяет компакт нормированных двузначных (точнее (0,1)-значных) к.-а. мер на $\mathcal{A}$. Компакт (5.5) является гомеоморфом пространства Стоуна, соответствующего алгебре $\mathcal{A}$ (5.1); см. [19].

В этой связи условимся о соглашении: при $\mathcal{L}\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$ введем индикатор $\mathbb{X}_\mathcal{L}\in\mathbb{R}^\mathcal{A}$ семейства $\mathcal{L}$, полагая, что

$$\big(\mathbb{X}_\mathcal{L}(L)\overset{\triangle}{=}1\ \ \forall L\in\mathcal{L}\big)\,\&\,\big(\mathbb{X}_\mathcal{L}(A)\overset{\triangle}{=}0\ \ \forall A\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{L}\big); \tag{5.6}$$

получили функцию множеств, определенную на $\mathcal{A}$. В качестве $\mathcal{L}$ можно, в частности, использовать у/ф $\mathcal{A}$. При этом

$$\mathbb{X}_\mathcal{U}\in\mathbb{T}(\mathcal{A})\ \ \forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A});$$

(см. (2.3), (5.6)). Более того, отображение

$$\kappa\overset{\triangle}{=}(\mathbb{X}_\mathcal{U})_{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})}\in\mathbb{T}(\mathcal{A})^{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})} \tag{5.7}$$

есть, как легко видеть, биекция $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ (в [19, предложение 4.2] показано, что κ (5.7) является гомеоморфизмом пространства Стоуна с «единицей» $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ с топологией подпространства ТП (5.3)). Поэтому представление $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$, установленное в [12], исчерпывающим образом характеризует $\mathbb{T}(\mathcal{A})$, рассматриваемое как подпространство (5.3). Напомним данное представление.

Если $t\in]a,b]$, то БФ $\mathcal{J}_t^{(-)}\overset{\triangle}{=}\{[c,t[\colon\ c\in[a,t[\}\in\beta_\mathcal{A}^o[I]$ порождает у/ф

$$\mathcal{U}_t^{(-)}\overset{\triangle}{=}(I-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\,\mathcal{A}]=\{A\in\mathcal{A}|\,\exists\,c\in[a,t[\colon\ [c,t[\subset A\}\in\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}) \tag{5.8}$$

алгебры $\mathcal{A}$ с пустым пересечением всех своих множеств. Иными словами, $\mathcal{U}_t^{(-)}$ — свободный [6, 3.6] у/ф алгебры $\mathcal{A}$.

Аналогичным образом при $t\in[a,b[$ БФ $\mathcal{J}_t^{(+)}\overset{\triangle}{=}\{]t,c]:\ c\in]t,b]\}\in\beta_\mathcal{A}^o[I]$ порождает у/ф

$$\mathcal{U}_t^{(+)}\overset{\triangle}{=}(I-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\,\mathcal{A}]=\{A\in\mathcal{A}|\,\exists\,c\in]t,b]:]t,c]\subset A\}\in\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}) \tag{5.9}$$

алгебры $\mathcal{A}$ с пустым пересечением всех своих множеств ($\mathcal{U}_t^{(+)}$ — свободный [6, 3.6] у/ф алгебры $\mathcal{A}$). Оказывается [12, предложение 6.1] у/ф вида (5.8) и (5.9) исчерпывают все возможности построения свободных у/ф $\mathcal{A}$. Иными словами [12, (6.21)],

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}) = \big\{\big((I,\mathcal{A}) - \mathrm{ult}\big)[t] : t \in I\big\} \cup \{\mathcal{U}_t^{(-)} : t \in]a,b]\} \cup \{\mathcal{U}_t^{(+)} : t \in [a,b[\}. \qquad (5.10)$$

Представление (5.10), установленное в [12], играет определяющую роль в последующих построениях (вместе с отождествлением у/ф $\mathcal{A}$ и (0,1)-значных к.-а. мер на $\mathcal{A}$, устанавливаемым посредством (5.7)).

Через η обозначаем след меры Лебега на алгебру $\mathcal{A}$; данная мера счетно-аддитивна и, в частности, $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$. С учетом теоремы Алаоглу имеем, что

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \overset{\triangle}{=} \{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) | \forall A \in \mathcal{A} \ \ \big(\eta(A) = 0\big) \Longrightarrow \big(\mu(A) = 0\big)\} \in \big(\tau_*(\mathcal{A}) - \mathrm{comp}\big)[\mathbb{A}(\mathcal{A})]. \qquad (5.11)$$

В дальнейшем наряду с топологией $\tau_*(\mathcal{A})$, реализующей локально выпуклый σ-компакт (5.3), широко используются топологии

$$\big(\tau_\otimes(\mathcal{A}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]\big) \,\&\, \big(\tau_o(\mathcal{A}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]\big),$$

определяемые в [15, (4.2.8), (4.2.9)]. Заметим, $\tau_\otimes(\mathcal{A})$ — топология поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{A})$, а $\tau_o(\mathcal{A})$ является топологией подпространства тихоновской степени $\mathbb{R}$ в дискретной топологии при условии, что алгебра $\mathcal{A}$ используется в качестве индексного множества. Отметим, что база $\tau_\otimes(\mathcal{A})$ может быть определена как семейство всех множеств следующего вида: если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$, $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A})$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то рассматриваем

$$\{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) \big| \ |\mu(A) - \nu(A)| < \varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{K}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{A}(\mathcal{A})\big). \qquad (5.12)$$

При переборе $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$, $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A})$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$ множества (5.12) в своей совокупности образуют требуемую базу.

Топология $\tau_o(\mathcal{A})$ определяется [16, с. 45] следующим образом

$$\tau_o(\mathcal{A}) = \big\{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{A}(\mathcal{A})\big) | \forall \mu \in G \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}) : \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) | \, \mu(A) = \nu(A) \ \ \forall A \in \mathcal{K}\} \subset G\big\}.$$

Таким образом, базу топологии $\tau_o(\mathcal{A})$ составляют всевозможные множества

$$\{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) | \ \mu(A) = \nu(A) \ \ \forall A \in \mathcal{K}\}, \ \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}), \ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}).$$

В [19, § 4] указаны полезные представления (нульмерного хаусдорфова) ТП

$$\big(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_o(\mathcal{A})\big). \qquad (5.13)$$

Напомним, что топологии $\tau_*(\mathcal{A})$ и $\tau_o(\mathcal{A})$ являются, вообще говоря, несравнимыми [15, § 4.4]. Однако для целого класса п/м $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ соответствующие подпространства оказываются уже сравнимыми (см. [15, § 4.2], [28]). Для наших целей достаточно заметить, что топологии $\tau_\eta^*(\mathcal{A}) \overset{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{A})\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]$, $\tau_\eta^o(\mathcal{A}) \overset{\triangle}{=} \tau_o(\mathcal{A})\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]$ сравнимы и при этом [16, (3.5.6)]

$$\tau_\eta^*(\mathcal{A}) \subset \tau_\eta^o(\mathcal{A}). \qquad (5.14)$$

Свойство (5.14) дополняется также весьма очевидным [15, (4.2.11)] равенством

$$\tau_\eta^*(\mathcal{A}) = \tau_\otimes(\mathcal{A})\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})}. \qquad (5.15)$$

Заметим здесь же, что ТП

$$\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau_\eta^*(\mathcal{A})\big) \qquad (5.16)$$

есть непустой компакт (см. (5.11), играющий важную роль в дальнейших построениях.

Если $f \in B(I,\mathcal{A})$, то, следуя [15, § 3.4], через $f*\eta$ обозначаем неопределенный η-интеграл f (интеграл как функция множеств); в этой связи отметим также построения в [24, § 3.7]. В силу счетной аддитивности η имеем, конечно, что

$$f*\eta = \Big(\int_A f\,d\eta\Big)_{A\in\mathcal{A}} \tag{5.17}$$

есть счетно-аддитивная мера на $\mathcal{A}$ (см. [24, предложение 3.4.4]); в частности, $f*\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$. Вводя в рассмотрение конус

$$B_o^+(I,\mathcal{A}) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in B_o(I,\mathcal{A}) |\, 0 \leqslant f(t) \ \ \forall t \in I\}$$

всех неотрицательных ступенчатых в смысле $(I,\mathcal{A})$ в/з функций на I, мы получаем в виде

$$\mathbf{F} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{f \in B_o^+(I,\mathcal{A}) \,\Big|\, \int_I f\,d\eta = 1\Big\} \in \mathcal{P}'\big(B_o^+(I,\mathcal{A})\big) \tag{5.18}$$

(непустое) множество, которое при использовании (см. (5.17)) оператора погружения $\mathfrak{I}$ вида

$$f \longmapsto f*\eta : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tag{5.19}$$

реализует «универсально» всюду плотное п/м $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$:

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{A})\big) = \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F}), \tau_o(\mathcal{A})\big); \tag{5.20}$$

см. [15, теорема 4.3.4]. Полезно отметить также еще одно свойство, установленное в [14, теорема 7.1]: полагая, что

$$\mathbb{T}_\eta(\mathcal{A}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) |\, \forall A \in \mathcal{A} \ \ \big(\eta(A) = 0\big) \Longrightarrow \big(\mu(A) = 0\big)\},$$

имеем следующую цепочку равенств:

$$\mathbb{T}_\eta(\mathcal{A}) = \mathbb{T}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{A})\big) = \{\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) : t \in]a,b]\} \cup \{\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) : t \in [a,b[\}. \tag{5.21}$$

Свойства (5.20), (5.21) являются базовыми. Отметим сейчас некоторые простейшие следствия.

Если $t \in]a,b[$, то всюду в дальнейшем полагаем $\zeta_t^o \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{t-a; b-t\})$; тогда $\zeta_t^o \in]0,\infty[$ и

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) |\, \mu(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[) = 1 \ \ \forall \varepsilon \in]0,\zeta_t^o]\} \tag{5.22}$$

(учитываем в (5.22), что при $\xi \in]0,\zeta_t^o]$ $a \leqslant t-\xi$ и $t+\xi \leqslant b$, а потому $]t-\xi, t+\xi[\in \mathcal{J}$, где $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ по определению $\mathcal{A}$). Напомним, что (см. (5.11)) $\mu(\{t\}) = \mu([t,t]) = 0 \ \ \forall \mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \ \ \forall t \in I$. Как следствие получаем следующее очевидное свойство: если $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и $t \in]a,b[$, то $\mu([a,t[) \in [0,\infty[$ и $\mu(]t,b]) \in [0,\infty[$ таковы, что

$$\mu([a,t[) + \mu(]t,b])) = 1. \tag{5.23}$$

Отметим очевидное, но полезное в дальнейшем

Предложение 5.1. *Если $t \in]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$, то*

$$\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})$ и $\nu \stackrel{\triangle}{=} \kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})$; нас интересует к.-а. мера

$$\xi \stackrel{\triangle}{=} \alpha\mu + (1-\alpha)\nu.$$

С учетом (5.21) получаем, что $\xi \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$. Выберем произвольно $\theta \in]0,\zeta_t^o]$, получая

$$]t-\theta, t+\theta[\in \mathcal{U}_t^{(-)} \cap \mathcal{U}_t^{(+)} \tag{5.24}$$

(в самом деле, имеем для множества

$$[t-\frac{\theta}{2},t[\in\mathcal{J}_t^{(-)}$$

очевидное свойство $[t-\frac{\theta}{2},t[\subset]t-\theta,t+\theta[$, а для множества $]t,t+\frac{\theta}{2}]\in\mathcal{J}_t^{(+)}$ получаем, что

$$]t,t+\frac{\theta}{2}[\subset]t-\theta,t+\theta[;$$

поскольку $]t-\theta,t+\theta[\in\mathcal{A}$, реализуется (5.24)). Из (5.7) и (5.24) вытекает, что

$$\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(]t-\theta,t+\theta[)=\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})(]t-\theta,t+\theta[)=1,$$

то есть $\mu(]t-\theta,t+\theta[)=\nu(]t-\theta,t+\theta[)=1$, что означает справедливость цепочки равенств

$$\xi(]t-\theta,t+\theta[)=\alpha\mu(]t-\theta,t+\theta[)+(1-\alpha)\nu(]t-\theta,t+\theta[)=1.$$

Поскольку выбор θ был произвольным, имеем из (5.22), что $\xi\in\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t)$. □

Из предложения 5.1 следуют, конечно, следующие вложения:

$$\{\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})+(1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}):\ \alpha\in[0,1]\}\subset\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t)\quad\forall t\in]a,b[.\tag{5.25}$$

Предложение 5.2. *Если* $t\in]a,b[$ *и* $\mu\in\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t)$, *то*

$$\mu=\mu([a,t[)\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})+\mu(]t,b])\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}).\tag{5.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha\triangleq\mu([a,t[)$ и $\beta\triangleq\mu(]t,b])$. Тогда $\alpha\in[0,\infty[,\beta\in[0,\infty[$ и согласно (5.23)

$$\alpha+\beta=1.\tag{5.27}$$

Отметим, что по выбору μ имеем очевидные равенства

$$\mu(L)=\mu(L\cap[a,t[)+\mu(L\cap]t,b])\quad\forall L\in\mathcal{A}.\tag{5.28}$$

В связи с (5.28) введем в рассмотрение следующие две неотрицательные в/з функции множеств:

$$\nu_1\triangleq\big(\mu(L\cap[a,t[)\big)_{L\in\mathcal{A}},\qquad\nu_2\triangleq\big(\mu(L\cap]t,b])\big)_{L\in\mathcal{A}}.\tag{5.29}$$

Заметим, что $\nu_1(I)=\alpha$ и $\nu_2(I)=\beta$. С учетом (5.28) получаем равенство

$$\mu=\nu_1+\nu_2,\tag{5.30}$$

где $\nu_1\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$ и $\nu_1\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$ (данные свойства наследуются от μ в силу (5.29)). Далее, отметим, что $\forall L\in\mathcal{A}$

$$\big(\eta(L)=0\big)\Longrightarrow\big((\nu_1(L)=0)\,\&\,(\nu_2(L)=0)\big).$$

Рассмотрим свойства ν_1, выделяя для отдельного рассмотрения случаи $\alpha=0$ и $\alpha\neq0$.

При $\alpha=0$ имеем, что $0\leqslant\nu_1(L)\leqslant\nu_1(I)=\alpha=0\quad\forall L\in\mathcal{A}$. Следовательно, в данном очевидном случае $\nu_1=\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})$. Итак,

$$(\alpha=0)\Longrightarrow\big(\nu_1=\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big).\tag{5.31}$$

Пусть $\alpha\neq0$. Тогда, как легко видеть,

$$\tilde{\nu}_1\triangleq\frac{1}{\alpha}\nu_1\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}).$$

Если $c\in[a,t[$, то в силу аддитивности μ

$$\alpha=\mu([a,t[)=\mu([a,c[)+\mu([c,t[).$$

Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$. Тогда в силу (5.29)

$$\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{\alpha}\,\nu_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{\alpha}\,\mu(\mathbf{A} \cap [a,t[). \tag{5.32}$$

Поскольку $\mathcal{U}_t^{(-)} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$, то (см. (5.1), [29, предложение 10.4.5])

$$(\mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}) \vee (I \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}). \tag{5.33}$$

Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}$. Тогда по аксиомам фильтра $\mathbf{A} \cap [a,t[\in \mathcal{U}_t^{(-)}$ и для некоторого $\mathbf{c} \in [a,t[$

$$[\mathbf{c},t[\subset \mathbf{A} \cap [a,t[. \tag{5.34}$$

При этом $t - \mathbf{c} \leqslant t - a$, а тогда имеем, что

$$\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \inf(\{t-\mathbf{c}; b-t\}) \in]0,\zeta_t^o]$$

и (по выбору μ) получаем равенство

$$\mu(]t-\varepsilon_*, t+\varepsilon_*[) = 1,$$

где $\varepsilon_* \leqslant t - \mathbf{c}$, а тогда $[a,\mathbf{c}] \subset [a, t-\varepsilon_*]$ (при этом $a \leqslant t - \varepsilon_*$). Как следствие

$$\mu([a,\mathbf{c}]) \leqslant \mu([a,t-\varepsilon_*]). \tag{5.35}$$

Вместе с тем $t + \varepsilon_* \leqslant b$ и, с учетом (5.35) и аддитивности μ,

$$1 = \mu(I) = \mu([a,t-\varepsilon_*]) + \mu(]t-\varepsilon_*, t+\varepsilon_*[) + \mu([t+\varepsilon_*, b]) \geqslant \mu([a,\mathbf{c}]) + 1,$$

откуда следует равенство $\mu([a,\mathbf{c}]) = 0$. Поэтому $\mu([a,\mathbf{c}[) = 0$, где

$$\alpha = \mu([a,t[) = \mu([a,\mathbf{c}[) + \mu([\mathbf{c},t[).$$

В итоге $\alpha = \mu([\mathbf{c},t[)$. С учетом (5.34) получаем, что

$$\alpha \leqslant \mu(\mathbf{A} \cap [a,t[) \leqslant \mu([a,t[) = \alpha,$$

то есть $\mu(\mathbf{A} \cap [a,t[) = \alpha$ и согласно (5.32) $\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = 1 = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A})$ (при условии $\mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}$). Итак, установлено, что

$$(\mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}) \Longrightarrow \big(\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A})\big). \tag{5.36}$$

Пусть теперь $I \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}$. Тогда $\mathbf{A} \notin \mathcal{U}_t^{(-)}$ по аксиомам фильтра и, стало быть,

$$\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A}) = 0. \tag{5.37}$$

С учетом (5.8) получаем, что для некоторого $\tilde{\mathbf{c}} \in [a,t[$ имеет место

$$[\tilde{\mathbf{c}},t[\subset I \setminus \mathbf{A}, \tag{5.38}$$

где $t - \tilde{\mathbf{c}} \leqslant t - a$ и $\tilde{\varepsilon}_* \overset{\triangle}{=} \inf(\{t-\tilde{\mathbf{c}}; b-t\}) \in]0,\zeta_t^o]$. Тогда $]t-\tilde{\varepsilon}_*, t+\tilde{\varepsilon}_*[\in \mathcal{J}$, где $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$, и (по выбору μ)

$$\mu(]t-\tilde{\varepsilon}_*, t+\tilde{\varepsilon}_*[) = 1. \tag{5.39}$$

При этом $\mathbf{A} \cap [a,t[= \mathbf{A} \cap ([a,\tilde{\mathbf{c}}[\cup [\tilde{\mathbf{c}},t[) = \mathbf{A} \cap [a,\tilde{\mathbf{c}}[$ в силу (5.38), где

$$[a,\tilde{\mathbf{c}}[\cap]t-\tilde{\varepsilon}_*, t-\tilde{\varepsilon}_*[= \varnothing,$$

поскольку $\tilde{\mathbf{c}} \leqslant t - \tilde{\varepsilon}_*$ по определению $\tilde{\varepsilon}_*$. Поскольку $\mu(I) = 1$, имеем в силу (5.39), что

$$0 \leqslant \mu(\mathbf{A}\cap [a,t[) = \mu(\mathbf{A}\cap [a,\tilde{\mathbf{c}}[) \leqslant \mu(\mathbf{A}\setminus]t-\tilde{\varepsilon}_*, t+\tilde{\varepsilon}_*[) \leqslant \mu(I\setminus]t-\tilde{\varepsilon}_*, t+\tilde{\varepsilon}_*[) = \mu(I) - \mu(]t-\tilde{\varepsilon}_*, t+\tilde{\varepsilon}_*[) = 0.$$

Как следствие (см. (5.32)), $\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = 0$. С учетом (5.37) имеем равенство

$$\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A})$$

и в случае $I \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}$. Тем самым установлена импликация

$$(I \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{U}_t^{(-)}) \Longrightarrow \big(\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A})\big). \tag{5.40}$$

Из (5.33), (5.36) и (5.40) имеем во всех возможных случаях равенство $\tilde{\nu}_1(\mathbf{A}) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\mathbf{A})$. Поскольку выбор $\mathbf{A}$ был произвольным, установлено, что

$$\tilde{\nu}_1 = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}). \tag{5.41}$$

Как следствие из (5.41) и определения $\tilde{\nu}_1$ получаем равенство

$$\nu_1 = \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \tag{5.42}$$

и в случае $\alpha \neq 0$. Итак, установлена импликация

$$(\alpha \neq 0) \Longrightarrow \big(\nu = \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big).$$

С учетом (5.31) получаем теперь во всех возможных случаях равенство (5.42).

Аналогичным образом устанавливается равенство $\nu_2 = \beta\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})$. Итак,

$$\big(\nu_1 = \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) \,\&\, \big(\nu_2 = \beta\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big). \tag{5.43}$$

Из (5.30) и (5.43) получаем (с учетом определения α и β требуемое равенство (5.26). Предложение доказано. $\square$

Из (5.23) и предложения 5.2 вытекает, что

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t) \subset \{\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) :\ \alpha \in\ [0,1]\}\ \ \forall t \in]a,b[.$$

Следовательно (см. (5.25)), имеет место свойство

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t) = \{\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) :\ \alpha \in\ [0,1]\}\ \ \forall t \in]a,b[. \tag{5.44}$$

С учетом (5.44) полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \Big(\bigcup_{t \in\,]a,b[} \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)\Big) \cup \{\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}); \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\}. \tag{5.45}$$

Множество (5.45) играет важную роль в последующих построениях, определяя пространство ОЭ. Подчеркнем, что в силу (5.21), (5.22) и (5.45)

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \subset \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tag{5.46}$$

разумеется, множество (5.45) непусто, а потому (см. (5.46))

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big).$$

Мы рассматриваем к.-а. меры из множества (5.45) как обобщенные режимы в классе «узких» импульсов.

Глава 2.
ПРОБЛЕМА ДОСТИЖИМОСТИ В КЛАССЕ «УЗКИХ» ИМПУЛЬСОВ

§ 6. Краткое введение

В настоящей главе исследуются вопросы, связанные с представлением эффектов, возникающих при реализации импульсов исчезающе малой протяженности. Если при этом иметь в виду интерпретацию, связанную с задачей о достижимости при ОАХ и рассмотренную в разделе 4, в настоящей главе обсуждается только случай, когда дополнительные ограничения на выбор управления $u \in U$ сводятся к компоненте 1) и, таким образом, изначально имеют асимптотический характер.

§ 7. Приближенные решения и проблема достижимости (подготовительные конструкции)

Напомним, что в (5.18) определено множество обычных решений, которые могут (см. раздел 4) рассматриваться в качестве обычных управлений, либо (в другой конкретизации) в качестве реализуемых инструментов создания случайных воздействий. Сейчас на выбор $f \in \mathbf{F}$ будут накладываться дополнительные условия в соответствующем асимптотическом варианте. В этой связи условимся о некоторых дополнительных обозначениях.

Если $f \in \mathbf{F}$, то $\mathrm{supp}(f) \stackrel{\triangle}{=} \{t \in I |\, f(t) \neq 0\} \in \mathcal{P}'(I)$, что позволяет ввести

$$\Big(\mathbf{t}_o(f) \stackrel{\triangle}{=} \inf\big(\mathrm{supp}(f)\big)\Big) \,\&\, \Big((\mathbf{t}^o(f) \stackrel{\triangle}{=} \sup\big(\mathrm{supp}(f)\big)\Big) \tag{7.1}$$

$\mathbf{t}_o(f) \in I, \mathbf{t}^o(f) \in I$; в этих терминах введем «медиану» импульса

$$\mathbf{t}_f \stackrel{\triangle}{=} \frac{\mathbf{t}_o(f) + \mathbf{t}^o(f)}{2} \in I. \tag{7.2}$$

При этом, конечно, $\mathbf{t}_o(f) \leqslant \mathbf{t}_f \leqslant \mathbf{t}^o(f)$. С учетом (7.1) и (7.2) полагаем, что

$$\mathbf{F}_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{F} |\ \mathbf{t}^o(f) - \mathbf{t}_o(f) < \varepsilon\} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{7.3}$$

Легко видеть, что $\forall \varepsilon_1 \in]0, \infty[\;\; \forall \varepsilon_2 \in]0, \infty[$

$$(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2) \Longrightarrow (\mathbf{F}_{\varepsilon_1} \subset \mathbf{F}_{\varepsilon_2}). \tag{7.4}$$

Заметим, кстати, что $\mathbf{F}_\varepsilon \neq \varnothing \;\; \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. В самом деле, пусть $\varepsilon_o \in]0, \infty[$ и

$$\xi_o \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\frac{\varepsilon_o}{2}; b - a\}).$$

Тогда $\xi_o \in]0, \infty[$ и $a + \xi_o \in I$. Полагаем

$$f_o \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\xi_o} \chi_{[a, a+\xi_o]};$$

тогда $f_o \in B_o^+(I, \mathcal{A})$ и при этом

$$\int_I f_o \, d\eta = \frac{1}{\xi_o} \eta([a, a + \xi_o]) = 1.$$

Получили свойство $f_o \in \mathbf{F}$. При этом $\mathrm{supp}(f_o) = [a, a + \xi_o]$, а потому

$$\mathbf{t}_o(f_o) = a, \;\; \mathbf{t}^o(f_o) = a + \xi_o$$

и, стало быть, $\mathbf{t}^o(f_o) - \mathbf{t}_o(f_o) = \xi_o < \varepsilon_o$. В итоге, $f_o \in \mathbb{F}_{\varepsilon_o}$ и, стало быть, $\mathbb{F}_{\varepsilon_o} \neq \varnothing$. Нужное свойство непустоты установлено, а тогда с учетом (7.4) получаем, что

$$\widetilde{\mathfrak{F}} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{F}_\varepsilon : \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \beta_o[\mathbf{F}], \tag{7.5}$$

то есть семейство всех множеств (7.3) является БФ множества $\mathbf{F}$.

Если теперь (H,τ) — ТП, $H \neq \varnothing$ и $r \in H^{\mathbf{F}}$, то определено (см. (3.2)) соответствующее БФ $\widetilde{\mathfrak{F}}$ МП:

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; H; \tau; r; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \bigcap_{U \in \widetilde{\mathfrak{F}}} \mathrm{cl}\big(r^1(U), \tau\big) \in \mathcal{P}(H); \tag{7.6}$$

кроме того, определено секвенциальное МП (см. (3.3))

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F}; H; \tau; r; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \big\{h \in H \,|\, \exists (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}] : \big(r(f_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} h\big\} \in \mathcal{P}(H). \tag{7.7}$$

При этом, конечно (см. (3.4)), множества (7.6), (7.7) связаны вложением

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F}; H; \tau; r; \widetilde{\mathfrak{F}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F}; H; \tau; r; \widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{7.8}$$

Напомним, что условия совпадения множеств в (7.8) указаны в [16, с. 38].

В наших конструкциях будут использоваться различные варианты (H,τ), что связано прежде всего с подходом на основе (3.5). В рамках этого подхода выделяются два варианта МП: основное и вспомогательное. Основное МП у нас будет соответствовать задаче о достижимости в конечномерном пространстве в духе раздела 4. Вспомогательное же МП мы связываем здесь с компактом (5.16). В настоящем разделе рассматривается этот последний случай, для которого, однако, в дальнейшем будет указано соответствующее применение в духе (3.5).

Отметим, что согласно (7.5), (7.6)

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau; \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F}_\varepsilon), \tau\big) \quad \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]; \tag{7.9}$$

в частности, определены МП

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}], \quad (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{7.10}$$

В свете (3.5) первое из упоминаемых в (7.10) МП для нас представляет наибольший интерес. В этой связи отметим простое следствие (5.15).

Предложение 7.1. *Имеет место совпадение* $(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}]$ *и множества всех к.-а. мер* $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, *для каждой из которых существует направленность* $(D, \preceq, g)$ *в* $\mathbb{F}$ *со свойствами*

$$\big(\widetilde{\mathfrak{F}} \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]\big) \,\&\, \big((D, \preceq, \mathfrak{I} \circ g) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{A})} \mu\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала очевидное свойство: если $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, то

$$N_{\tau_*(\mathcal{A})}(\mu)\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} = N_{\tau_\eta^*(\mathcal{A})}(\mu)$$

и при $\tau_\eta^\otimes(\mathcal{A}) \overset{\triangle}{=} \tau_\otimes(\mathcal{A})\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})}$ имеем также

$$N_{\tau_\otimes(\mathcal{A})}(\mu)\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} = N_{\tau_\eta^\otimes(\mathcal{A})}(\mu)$$

(см. [17, (2.3.8)]). В силу (5.15) имеем с очевидностью равенство

$$N_{\tau_*(\mathcal{A})}(\mu)\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} = N_{\tau_\otimes(\mathcal{A})}(\mu)\big|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})}.$$

Если теперь $(D, \preceq, h)$ есть направленность в $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, то имеем (см. [17, (2.3.9)]) следующие две эквиваленции

$$\big((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{A})} \mu\big) \Longleftrightarrow \big((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau_\eta^*(\mathcal{A})} \mu\big), \tag{7.11}$$

$$\big((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{A})} \mu\big) \Longleftrightarrow \big((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau_\eta^\otimes(\mathcal{A})} \mu\big), \tag{7.12}$$

а поскольку (см. (5.15)) $\tau_\eta^*(\mathcal{A}) = \tau_\eta^\otimes(\mathcal{A})$, то из (7.11), (7.12) вытекает, что

$$\big((D,\preceq,h)\overset{\tau_*(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big)\Longleftrightarrow\big((D,\preceq,h)\overset{\tau_\otimes(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big).$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из определения МП в разделе 3 (см. (3.1)) с учетом (5.19). $\square$

Предложение 7.2. *Множество* (5.45) *оценивает первое из упоминаемых в* (7.10) *МП сверху:*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]\subset\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]. \tag{7.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную к.-а. меру

$$\mu_o\in(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{7.14}$$

Тогда в силу предложения 7.1

$$\mu_o\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \tag{7.15}$$

и при этом для некоторой направленности $(D,\preceq,g)$ в множестве $\mathbf{F}$

$$\big(\widetilde{\mathfrak{F}}\subset(\mathbf{F}-\mathrm{ass})[D;\preceq;g]\big)\;\&\;\big((D,\preceq,\mathfrak{I}\circ g)\overset{\tau_\otimes(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu_o\big). \tag{7.16}$$

Здесь $(D,\preceq)$ — (непустое) НМ и $g:\ D\longrightarrow\mathbf{F}$. Стало быть,

$$g(\delta)\in\mathbf{F}\quad\forall\delta\in D. \tag{7.17}$$

Поэтому (см. (7.17)) при $\delta\in D$ имеем непустое множество

$$\mathrm{supp}\big(g(\delta)\big)=\{t\in I\,|\,g(\delta)(t)\neq0\}\in\mathcal{P}'(I)\quad\forall\delta\in D, \tag{7.18}$$

а также следующие три значения, связанные с множеством (7.18):

$$\begin{gathered}\mathbf{t}_o\big(g(\delta)\big)=\inf\Big(\mathrm{supp}\big(g(\delta)\big)\Big)\in I,\\ \mathbf{t}^o\big(g(\delta)\big)=\sup\Big(\mathrm{supp}\big(g(\delta)\big)\Big)\in I,\\ \mathbf{t}_{g(\delta)}=\frac{\mathbf{t}_o\big(g(\delta)\big)+\mathbf{t}^o\big(g(\delta)\big)}{2}\in I\end{gathered} \tag{7.19}$$

(см. (7.1), (7.2)); при этом, конечно,

$$a\leqslant\mathbf{t}_o\big(g(\delta)\big)\leqslant\mathbf{t}^o\big(g(\delta)\big)\leqslant b. \tag{7.20}$$

Для краткости обозначим через $\mathbf{t}_{g(\cdot)}$ отображение

$$\delta\longmapsto\mathbf{t}_{g(\delta)}:\ D\longrightarrow I,$$

получая в виде $(D,\preceq,\mathbf{t}_{g(\cdot)})$ направленность в компактном ТП $(I,\tau_I^\natural)$, где топология $\tau_I^\natural\in(\mathrm{top})[I]$ порождена обычной метрикой-модулем

$$(x,y)\longmapsto|x-y|:\ I\times I\longrightarrow[0,\infty[;$$

ясно, что $\tau_I^\natural=\tau_\mathbb{R}|_I$, где $\tau_\mathbb{R}$ есть обычная $|\cdot|$-топология $\mathbb{R}$. Введем, следуя [17, (2.2.9)], для каждого НМ $(\mathcal{D},<)$ множество

$$\begin{gathered}(\mathrm{Isot})[\mathcal{D};<;D;\preceq]\overset{\triangle}{=}\big\{h\in D^{\mathcal{D}}\,\big|\,\big(h^1(\mathcal{D})\in(\preceq-\mathrm{cof})[D]\big)\;\&\\ \&\;\Big(\forall d_1\in\mathcal{D}\ \ \forall d_2\in\mathcal{D}\ \ (d_1<d_2)\Longrightarrow\big(h(d_1)\preceq h(d_2)\big)\Big)\big\},\end{gathered} \tag{7.21}$$

где $(\preceq -\mathrm{cof})[D] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(D) | \forall d' \in D \;\; \exists\, d'' \in H: \; d' \preceq d''\}$. Элементы (7.21) — суть изотонные отображения из $(\mathcal{D}, <)$ в $(D, \preceq)$ с конфинальным образом. Используя компактность $(I, \tau_I^{\natural})$, подберем [17, (2.3.9), (2.3.23)] (непустое) НМ $(\mathbb{D}, \sqsubseteq)$, отображение $\lambda \in (\mathrm{Isot})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; D; \preceq]$ и число $t_o \in I$, для которых

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{t}_{g(\cdot)} \circ \lambda) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} t_o. \tag{7.22}$$

Заметим в связи с (7.22), что $\mathbf{t}_{g(\cdot)} \circ \lambda$ есть отображение

$$d \longmapsto \mathbf{t}_{g(\lambda(d))} : \mathbb{D} \longrightarrow I.$$

Поэтому свойство (7.22) означает, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\;\; \exists\, d' \in \mathbb{D} \;\; \forall d'' \in \mathbb{D}$

$$(d' \sqsubseteq d'') \Longrightarrow (|\mathbf{t}_{g(\lambda(d''))} - t_o| < \varepsilon). \tag{7.23}$$

Из (7.21) имеем также следующее полезное свойство λ; именно $\forall \delta \in D \; \exists\, d_1 \in \mathbb{D} \;\; \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow \big(\delta \preceq \lambda(d_2)\big). \tag{7.24}$$

Заметим, что $g \circ \lambda = \Big(g\big(\lambda(d)\big)\Big)_{d \in \mathbb{D}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{D}}$, а тогда в силу (7.23) $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\; \exists\, d' \in \mathbb{D} \;\; \forall d'' \in \mathbb{D}$

$$(d' \sqsubseteq d'') \Longrightarrow (|\mathbf{t}_{(g \circ \lambda)(d'')} - t_o| < \varepsilon). \tag{7.25}$$

Кроме того, имеем, что $\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda = (\mathfrak{I} \circ g) \circ \lambda = \mathfrak{I} \circ (g \circ \lambda)$,

$$\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}). \tag{7.26}$$

В связи с (7.26) отметим очевидное следствие (7.16), (7.24); именно

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathfrak{I} \circ g \circ \lambda) \xrightarrow{\tau_{\otimes}(\mathcal{A})} \mu_o. \tag{7.27}$$

Возвращаясь к (7.22), отметим, что

$$(t_o = a) \;\vee\; (t_o \in]a, b[) \;\vee\; (t_o = b). \tag{7.28}$$

Все три возможности в (7.28) рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала $t_o = a$. Покажем, что в этом случае $\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$. В этой связи напомним, что БФ

$$\mathcal{J}_a^{(+)} = \{]a, t] : \; t \in]a, b]\} \in \beta^o_{\mathcal{A}}[I]$$

порождает у/ф $\mathcal{U}_a^{(+)}$; при этом, конечно,

$$\mathcal{U}_a^{(+)} = (I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_a^{(+)} |\, \mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} |\; \exists\, t \in]a, b] :]a, t] \subset A\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}). \tag{7.29}$$

Заметим, что $\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) = \mathbb{X}_{\mathcal{U}_a^{(+)}} \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$;

$$\big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(L) = 1 \;\; \forall L \in \mathcal{U}_a^{(+)}\big) \,\&\, \big(\kappa\,(\mathcal{U}_a^{(+)})(\widetilde{L}) = 0 \;\; \forall \widetilde{L} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{U}_a^{(+)}\big). \tag{7.30}$$

Сравним μ_o и $\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$. Выберем произвольно $U \in \mathcal{U}_a^{(+)}$, получая, в частности, что $U \in \mathcal{A}$ и (см. (7.29)) для некоторого $t_* \in]a, b]$ имеет место вложение

$$]a, t_*] \subset U; \tag{7.31}$$

при этом $t_* - a \in]0, \infty[$ и справедливо равенство

$$\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(U) = 1. \tag{7.32}$$

С другой стороны, $\mu_o(U) \in [0,1]$. Из (7.25) имеем в рассматриваемом случае, что $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\exists\, d' \in \mathbb{D}\ \forall d'' \in \mathbb{D}$

$$(d' \sqsubseteq d'') \Longrightarrow (|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(d'')} - a| < \varepsilon). \tag{7.33}$$

С учетом первого положения в (7.16) имеем по свойствам λ (см. (7.24)), что $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\exists\, d_1 \in \mathbb{D}$ $\forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow \big((g\circ\lambda)(d_2) \in \mathbf{F}_\varepsilon\big).$$

Используя (7.33) и простейшие свойства НМ, получим, что $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\exists\, d^{(1)} \in \mathbb{D}$ $\forall d^{(2)} \in \mathbb{D}$

$$(d^{(1)} \sqsubseteq d^{(2)}) \Longrightarrow \Big(\big(|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(d^{(2)})} - a| < \varepsilon\big)\ \&\ \big((g\circ\lambda)(d^{(2)}) \in \mathbf{F}_\varepsilon\big)\Big). \tag{7.34}$$

При выборе ε можно, в частности, использовать в (7.34) следующий вариант

$$\varepsilon = \frac{t_* - a}{2}.$$

Учитывая данную возможность, подберем (см. (7.34)) $\delta^* \in \mathbb{D}$ так, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\delta^* \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \Big(\big(|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(\delta)} - a| < \frac{t_*-a}{2}\big)\ \&\big((g\circ\lambda)(\delta) \in \mathbf{F}_{\frac{t_*-a}{2}}\big)\Big). \tag{7.35}$$

Выберем произвольно $\delta_* \in \mathbb{D}$ со свойством $\delta^* \sqsubseteq \delta_*$, получая в силу (7.35), что

$$\big(|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(\delta_*)} - a| < \frac{t_*-a}{2}\big)\ \&\ \Big(\mathbf{t}^o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big) - \mathbf{t}_o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big) < \frac{t_*-a}{2}\Big), \tag{7.36}$$

где $(g\circ\lambda)(\delta_*) \in \mathbf{F}$. Тогда, как легко видеть,

$$[\mathbf{t}_o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big),\, \mathbf{t}^o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big)] \subset [a, t_*[\tag{7.37}$$

(учитываем (7.19) и (7.20)), а потому

$$\begin{gathered}(\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)\Big([\mathbf{t}_o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big), \mathbf{t}^o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big)]\Big) = \\ = (\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)\Big(]\mathbf{t}_o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big), \mathbf{t}^o\big((g\circ\lambda)(\delta_*)\big)]\Big) \leqslant \\ \leqslant (\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)(]a, t_*[) = (\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)(]a, t_*])\end{gathered} \tag{7.38}$$

(учитываем определение $\mathfrak{I}$ и то, что $\eta(\{t\}) = 0\ \ \forall t \in I$). С другой стороны, в силу (7.37)

$$(\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)(]a,t_*]) = (\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)([a,t_*]) = \int_{[a,t_*]} (g\circ\lambda)(\delta_*)\, d\eta = \int_I (g\circ\lambda)(\delta_*)\, d\eta = (\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)(I) = 1.$$

С учетом (7.31) получаем теперь, что $(\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta_*)(U) = 1$. Поскольку выбор δ_* был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\delta^* \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big((\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta)(U) = 1\big). \tag{7.39}$$

Вместе с тем имеем с очевидностью, что

$$\mathcal{O}^+_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) \,\big|\, |\mu_o(U) - \nu(U)| < \varepsilon\} \in N_{\tau_\otimes(\mathcal{A})}(\mu_o)\ \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[.$$

Поэтому с учетом (7.27) получаем, что (см. (2.11)) $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\exists\, d \in \mathbb{D}$ $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big(|(\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta)(U) - \mu_o(U)| < \varepsilon\big).$$

Фиксируем $\hat\varepsilon \in]0,\infty[$ и подбираем $\hat d \in \mathbb{D}$ так, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\hat d \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big(|(\mathfrak{I}\circ g\circ\lambda)(\delta)(U) - \mu_o(U)| < \hat\varepsilon\big). \tag{7.40}$$

Поскольку $\delta^* \in \mathbb{D}$ и $\hat{d} \in \mathbb{D}$, то по аксиомам НМ для некоторого $\hat{\delta}^* \in \mathbb{D}$

$$(\delta^* \sqsubseteq \hat{\delta}^*)) \,\&\, (\hat{d} \sqsubseteq \hat{\delta}^*).$$

В силу (7.39) получаем, что $(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\hat{\delta}^*)(U) = 1$ и, вместе с тем, (см. (7.40))

$$|(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\hat{\delta}^*)(U) - \mu_o(U)| < \hat{\varepsilon}.$$

Получили, что $|1 - \mu_o(U)| < \hat{\varepsilon}$. Поскольку выбор $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon} > 0$, был произвольным, установлено, что $\mu_o(U) = 1$, а тогда с учетом (7.32) получаем равенство $\mu_o(U) = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(U)$. Итак, установлено свойство

$$\mu_o(A) = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(A) \quad \forall A \in \mathcal{U}, \tag{7.41}$$

что достаточно [29, предложение 10.4.5] для справедливости равенства $\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$. Как следствие (см. (5.45)) $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$. Установлена импликация

$$(t_o = a) \Longrightarrow (\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]). \tag{7.42}$$

2) Пусть $t_o \in]a, b[$. Тогда определено значение $\zeta_{t_o}^o = \inf(\{t_o - a; b - t_o\}) \in]0, \infty[$. Напомним, что (см. (5.22))

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t_o) = \{\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})|\, \mu(]t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon[) = 1 \quad \forall \varepsilon \in]0, \zeta_{t_o}^o]\}. \tag{7.43}$$

С учетом (5.45) получаем следующее вложение:

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t_o) \subset \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]. \tag{7.44}$$

Покажем, что (в рассматриваемом случае $t_o \in]a, b[$) $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t_o)$.

Выберем произвольно $\varepsilon^\natural \in]0, \zeta_{t_o}^o]$, после чего с учетом (7.25) подберем $d_1^\natural \in \mathbb{D}$ так, что $\forall d \in \mathbb{D}$

$$(d_1^\natural \sqsubseteq d) \Longrightarrow (|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(d)} - t_o| < \frac{\varepsilon^\natural}{2}). \tag{7.45}$$

Далее с учетом (7.16) и (7.24) подберем $d_2^\natural \in \mathbb{D}$, для которого $\forall d \in \mathbb{D}$

$$(d_2^\natural \sqsubseteq d) \Longrightarrow \big((g \circ \lambda)(d) \in \mathbf{F}_{\frac{\varepsilon^\natural}{2}}\big). \tag{7.46}$$

Тогда $d_1^\natural \in \mathbb{D}$ и $d_2^\natural \in \mathbb{D}$, а потому по аксиомам НМ для некоторого $d^\natural \in \mathbb{D}$ имеем свойства $(d_1^\natural \sqsubseteq d^\natural), \& \,(d_2^\natural \sqsubseteq d^\natural)$. Тогда в силу (7.45), (7.46) $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d^\natural \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \Big(\big(|t_{(g\circ\lambda)(\delta)} - t_o| < \frac{\varepsilon^\natural}{2}\big) \,\&\, \big((g \circ \lambda)(\delta) \in \mathbf{F}_{\frac{\varepsilon^\natural}{2}}\big)\Big). \tag{7.47}$$

Заметим, что $]t_o - \varepsilon^\natural, t_o + \varepsilon^\natural[\in \mathcal{A}$. Выберем произвольно $\tilde{\delta}^\natural \in \mathbb{D}$ со свойством $d^\natural \sqsubseteq \tilde{\delta}^\natural$. Тогда из (7.47) имеем, что

$$(|\mathbf{t}_{(g\circ\lambda)(\tilde{\delta}^\natural)} - t_o| < \frac{\varepsilon^\natural}{2}) \,\&\, \big((g \circ \lambda)(\tilde{\delta}^\natural) \in \mathbf{F}_{\frac{\varepsilon^\natural}{2}}\big). \tag{7.48}$$

Из (7.1), (7.2) и (7.48) легко следуют неравенства

$$\Big(\mathbf{t}^o\big((g \circ \lambda)(\tilde{\delta}^\natural)\big) < t_o + \varepsilon^\natural\Big) \,\&\, \Big(\mathbf{t}_o - \varepsilon^\natural < \mathbf{t}_o\big((g \circ \lambda)(\tilde{\delta}^\natural)\big)\Big).$$

Следовательно, $\mathrm{supp}\big((g\circ\lambda)(\tilde{\delta}^\natural)\big) \subset [\mathbf{t}_o\big((g\circ\lambda)(\tilde{\delta}^\natural)\big), \mathbf{t}^o\big((g\circ\lambda)(\tilde{\delta}^\natural)\big)] \subset]t_o - \varepsilon^\natural, t_o + \varepsilon^\natural[$, откуда вытекает, что

$$(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\tilde{\delta}^\natural)(\,]t_o - \varepsilon^\natural, t_o + \varepsilon^\natural[) = 1.$$

Поскольку выбор $\tilde{\delta}^\natural$ был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d^\natural \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big((\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(\,]t_o - \varepsilon^\natural, t_o + \varepsilon^\natural[) = 1\big). \tag{7.49}$$

Отметим теперь, что определены канонические окрестности

$$\mathcal{O}^{\natural}_{\varepsilon} \stackrel{\triangle}{=} \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) \big| \, |\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) - \nu(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[)| < \varepsilon\} \in N_{\tau_{\otimes}(\mathcal{A})}(\mu_o) \ \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

С учетом (7.27) получаем поэтому, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \, d \in \mathbb{D} \ \ \forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big(\,|\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) - (\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[)| < \varepsilon\big). \tag{7.50}$$

Пусть $\zeta \in]0, \infty[$. С учетом (7.50) подберем $d^*_{\zeta} \in \mathbb{D}$ так, что при этом $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d^*_{\zeta} \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \big(\,|\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) - (\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[)| < \zeta\big). \tag{7.51}$$

Поскольку $d^{\natural} \in \mathbb{D}$ и $d^*_{\zeta} \in \mathbb{D}$, то для некоторого $\overline{d}^{\natural}_{\zeta} \in \mathbb{D}$ имеем $d^{\natural} \sqsubseteq \overline{d}^{\natural}_{\zeta}$ и $d^*_{\zeta} \sqsubseteq \overline{d}^{\natural}_{\zeta}$. Тогда в силу (7.49) имеем равенство $(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\overline{d}^{\natural}_{\zeta})(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) = 1$, а из (7.51) вытекает неравенство

$$|\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) - (\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[)| < \zeta.$$

В итоге $|\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) - 1| < \zeta$. Поскольку выбор $\zeta, \zeta > 0$, был произвольным, установлено равенство

$$\mu_o(\,]t_o - \varepsilon^{\natural}, t_o + \varepsilon^{\natural}[) = 1. \tag{7.52}$$

Однако и выбор $\varepsilon^{\natural}, \varepsilon^{\natural} > 0$, был произвольным (предполагалось, что $\varepsilon^{\natural} \in]0, \zeta^o_{t_o}]$), а потому из (7.52) имеем, что

$$\mu_o(\,]t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon[) = 1 \ \ \forall \varepsilon \in]0, \zeta^o_{t_o}]). \tag{7.53}$$

С учетом (7.43) получаем, что в рассматриваемом случае $\mu_o \in \mathbb{P}^o_{\eta}(\mathcal{A}|\, t_o)$ и, как следствие (см. (7.44)), $\mu_o \in \mathbb{P}^o_{\eta}[\mathcal{A}]$. Итак, установлена импликация

$$(t_o \in]a, b[) \Longrightarrow (\mu_o \in \mathbb{P}^o_{\eta}[\mathcal{A}]). \tag{7.54}$$

Рассуждениями, подобными обоснованию (7.42), устанавливается также, что

$$(t_o = b) \Longrightarrow (\mu_o \in \mathbb{P}^o_{\eta}[\mathcal{A}]). \tag{7.55}$$

В итоге из (7.28), (7.42), (7.54) и (7.55) получаем, что во всех возможных случаях $\mu_o \in \mathbb{P}^o_{\eta}[\mathcal{A}]$, чем завершается (см. (7.14)) доказательство требуемого свойства (7.13). □

Напомним теперь, что согласно (2.13)

$$(\mathcal{E} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}] = \{(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}} |\, \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \exists \, k \in \mathbb{N} : \ f_j \in \Sigma \ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}\} \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{F})\big).$$

В частности, определено (см. (7.5)) следующее множество

$$(\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}] = \{(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}} |\, \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \exists \, k \in \mathbb{N} : \ f_j \in \Sigma \ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}\}, \tag{7.56}$$

которое уже использовалось в (7.7). Напомним очевидное следствие (5.14): если $(f_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $\mu \in \mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A})$, то

$$\Big(\big(\mathfrak{I}(f_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \stackrel{\tau^o_{\eta}(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathfrak{I}(f_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \stackrel{\tau^*_{\eta}(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu\Big). \tag{7.57}$$

Свойство, подобное (7.57), справедливо и в классе направленностей, однако сейчас мы сосредоточимся на секвенциальных конструкциях.

Если $t \in]a, b]$, то через $\mathbf{X}^{(-)}_t$ условимся обозначать отображение

$$c \longmapsto \frac{1}{t - c}\, \chi_{[c, t[} : \ [a, t[\longrightarrow \mathbf{F}$$

(в связи с (7.58) напомним (5.18) и то, что η — след меры Лебега на $\mathcal{A}$). Итак,

$$\mathbf{X}^{(-)}_t(c) = \frac{1}{t - c}\chi_{[c, t[} \in \mathbf{F} \ \ \forall t \in]a, b] \ \ \forall c \in [a, t[. \tag{7.58}$$

Предложение 7.3. *Если $t \in]a,b]$ и $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \to [a,t[$, то истинна импликация*

$$((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t) \Longrightarrow \left(\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t \in]a,b]$ и последовательность $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в $[a,t[$, для которых

$$(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t$$

(сходимость в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$). Тогда имеем с очевидностью, что

$$\forall c \in [a,t[\ \exists\, k \in \mathbb{N}:\ c < c_j \quad \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{7.59}$$

При этом $\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big) = \mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) * \eta \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда, в частности,

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)([c,t[) = \frac{1}{t-c_j}\int_{[c,t[} \chi_{[c_j,t[}\, d\eta \quad \forall c \in [a,t[\quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{7.60}$$

При этом $\mathcal{U}_t^{(-)} = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in [a,t[:\ [c,t[\subset A\}$ (см. [12]). Рассмотрим к.-а. меру $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})$. Пусть $\Lambda \in \mathcal{U}_t^{(-)}$. Тогда (см. (5.6), (5.8)) $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\Lambda) = 1$. Подберем $\mathbf{c} \in [a,t[$, для которого $[\mathbf{c},t[\subset \Lambda$, получая, в частности, $t - \mathbf{c} \in]0,\infty[$. С учетом (7.59) имеем для некоторого $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ свойство

$$\mathbf{c} < c_j \quad \forall j \in \overrightarrow{\mathbf{n},\infty}.$$

Пусть $p \in \overrightarrow{\mathbf{n},\infty}$. Тогда $c < c_p$ и $t - c_p \in]0,\infty[$, причем (см. (7.58)

$$\mathbf{X}_t^{(-)}(c_p) = \frac{1}{t-c_p}\chi_{[c_p,t[} \in \mathbf{F}.$$

Кроме того, имеем, как следствие (см. (7.60)), цепочку равенств

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_p)\big)(\Lambda) = \int_\Lambda \mathbf{X}_t^{(-)}(c_p)\, d\eta = \frac{1}{t-c_p}\int_I \chi_{[c_p,t[}\chi_\Lambda\, d\eta = \frac{1}{t-c_p}\int_I \chi_{[c_p,t[\cap\Lambda}\, d\eta,$$

где $[c_p,t[\subset [\mathbf{c},t[\subset \Lambda$, а потому справедливо равенство

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_p)\big)(\Lambda) = 1.$$

В итоге $\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_p)\big)(\Lambda) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\Lambda)$. Поскольку выбор p был произвольным, установлено, что $\exists\, m \in \mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(\Lambda) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(\Lambda) \quad \forall j \in \overrightarrow{m,\infty}.$$

Коль скоро и выбор Λ был произвольным, установлено, что

$$\forall A \in \mathcal{U}_t^{(-)}\ \exists\, m \in \mathbb{N}:\ \mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(A) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(A) \quad \forall j \in \overrightarrow{m,\infty}.$$

С учетом аддитивности к.-а. мер $\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big), j \in \mathbb{N}$, и $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})$ легко устанавливается (см. уже упоминавшееся [29, предложение 10.4.5]), что вообще

$$\forall A \in \mathcal{A}\ \exists\, m \in \mathbb{N}:\ \mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(A) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(A) \quad \forall j \in \overrightarrow{m,\infty}.$$

Последнее свойство достаточно (см. определение $\tau_o(\mathcal{A})$ в разделе 5, а также [17, (2.3.9)]) в силу аксиом НМ для справедливости свойства

$$\big(\mathfrak{I}(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i))\big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}). \qquad \square$$

Если $t \in [a,b[$, то через $\mathbf{X}_t^{(+)}$ обозначаем отображение

$$c \longmapsto \frac{1}{c-t}\,\chi_{]t,c]} :]t,b] \longrightarrow \mathbf{F}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{X}_t^{(+)}(c) = \frac{1}{c-t}\chi_{]t,c]} \in \mathbf{F} \quad \forall t \in [a,b[\quad \forall c \in]t,b]. \tag{7.61}$$

Предложение 7.4. *Если* $t \in [a,b[$ *и* $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to]t,b]$, *то истинна импликация*

$$\big((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t\big) \Longrightarrow \left(\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\right).$$

Доказательство аналогично обоснованию предложения 7.3.

§ 8. Вспомогательное множество притяжения

В настоящем разделе мы дополняем предложение 7.2: МП в пространстве к.-а. мер оцениваем снизу, что позволяет затем установить соответствующее точное равенство. Более того, будем показано, что данное МП обладает известной универсальностью в части оснащения пространства ОЭ топологиями. В этой части существенную роль играют предложения 7.3, 7.4. В этой связи полезны два естественных следствия, выделяемых в отдельные предложения по соображениям методического характера.

Предложение 8.1. *Если* $t \in]a,b]$ *и* $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to [a,t[$, *то*

$$\big((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t\big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big).$$

Доказательство следует из определения: в самом деле, согласно (7.58) при $t \in]a,b]$ и $c \in [a,t[$ имеем

$$\mathrm{supp}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c)\big) = [c,t[, \quad \mathbf{t}_o\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c)\big) = c, \quad \mathbf{t}^o\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c)\big) = t.$$

Подобным образом проверяется следующее

Предложение 8.2. *Если* $t \in [a,b[$ *и* $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to]t,b]$, *то*

$$\big((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t\big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big).$$

Из (3.3), предложений 7.3 и 8.1 вытекает, что справедливо

Предложение 8.3. *Если* $t \in]a,b]$, *то* $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t \in]a,b]$ и полагаем, что

$$c_k \overset{\triangle}{=} t - \frac{t-a}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Получили последовательность $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [a,t[^{\mathbb{N}}$ со свойством $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \to t$. Из предложений 7.3 и 8.1 имеем, что

$$\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}] : \Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_k)\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}).$$

Применяя теперь (3.3), получаем требуемое утверждение. □

Предложение 8.4. *Если* $t \in [a,b[$, *то* $\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируя $t \in [a,b[$, полагаем, что

$$c_k = t + \frac{b-t}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Получили последовательность $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}\in]t,b]^{\mathbb{N}}$ со свойством $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}\to t$. Из предложений 7.4 и 8.2 получаем, что

$$\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}\in(\widetilde{\mathfrak{F}}-\mathrm{seq})[\mathbf{F}]:\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c_k)\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}\overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}).$$

С учетом (3.3) получаем требуемое свойство. $\square$

Из предложения 8.4 имеем, в частности, что

$$\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\in(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{8.1}$$

В свою очередь, из предложения 8.3 вытекает, что

$$\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\in(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{8.2}$$

Предложение 8.5. *Если* $t\in]a,b[,\ \alpha\in[0,1],\ (c_i)_{i\in\mathbb{N}}\in[a,t[^{\mathbb{N}},\ (\widetilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}}\in]t,b]^{\mathbb{N}}$ *и при этом*

$$\big((c_i)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow t\big)\,\&\,\big((\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow t\big), \tag{8.3}$$

то $\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\in(\widetilde{\mathfrak{F}}-\mathrm{seq})[\mathbf{F}]$ *и, кроме того,*

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})+(1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}). \tag{8.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t,\alpha,(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в соответствии с условиями предложения, полагая при этом выполненным (8.3). Легко видеть, что

$$\mathbf{X}_j\overset{\triangle}{=}\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\in\mathbf{F}\quad\forall j\in\mathbb{N}. \tag{8.5}$$

При этом (см. (8.5)) $\mathrm{supp}(\mathbf{X}_j)\subset[c_j,\tilde{c}_j]\ \ \forall j\in\mathbb{N}$. Как следствие получаем сходимость

$$\big(\mathbf{t}^o(\mathbf{X}_i)-\mathbf{t}_o(\mathbf{X}_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow 0.$$

Поэтому $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(\widetilde{\mathfrak{F}}-\mathrm{seq})[\mathbf{F}]$. Свойство (8.4) вытекает из предложений 7.3 и 7.4 с учетом определения топологии $\tau_\eta^o(\mathcal{A})$. В целях полноты изложения все же проведем данное рассуждение. Для этого заметим, что согласно [15, (4.2.14)] при $\mu\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и $\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{A})$

$$\{\nu\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})|\,\mu(\mathcal{A})=\nu(\mathcal{A})\ \ \forall A\in\mathcal{K}\}\in N^o_{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}(\mu). \tag{8.6}$$

Полагаем в пределах данного доказательства, что

$$\mu_o\overset{\triangle}{=}\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})+(1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}).$$

Тогда согласно предложению 7.3 имеем, что $\forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{A})\ \exists\, m\in\mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(\mathcal{A})=\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}(\mathcal{A})\ \ \forall A\in\mathcal{K}\ \ \forall j\in\overrightarrow{m,\infty}. \tag{8.7}$$

Аналогичным образом из предложения 7.4 и (8.6) следует, что $\forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{A})\ \exists\, m\in\mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big)(A)=\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})(A)\ \ \forall A\in\mathcal{K}\ \ \forall j\in\overrightarrow{m,\infty}. \tag{8.8}$$

Но в этом случае (см. (8.7), (8.8)) получаем в силу свойства линейности неопределенного интеграла, что $\forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{A})\ \exists\, m\in\mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big)(A)=\mu_o(A)\ \ \forall A\in\mathcal{K}\ \ \forall j\in\overrightarrow{m,\infty}. \tag{8.9}$$

Учтем теперь, что при $\mu=\mu_o$ семейство всех множеств (8.6) (при переборе всевозможных семейств $\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{A})$) образует локальную базу топологии $\tau_\eta^o(\mathcal{A})$ в точке μ_o, а тогда из (8.9) следует (8.4). $\square$

Предложение 8.6. *Множество* $\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$ *оценивает МП* $(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]$ *снизу:*

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{8.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8.1), (8.2) следует, что

$$\{\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)});\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\} \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{8.11}$$

Пусть $t_* \in]a,b[$. Тогда $\zeta_{t_*}^o = \inf(\{t_*-a;b-t_*\}) \in]0,\infty[$ и при этом (см. (5.22))

$$\begin{gathered}\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t_*) = \{\mu\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})|\,\mu(]t_*-\varepsilon,t_*+\varepsilon[)=1\ \ \forall\varepsilon\in]0,\zeta_{t_*}^o]\} = \\ = \{\lambda\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)})+(1-\lambda)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)}):\ \lambda\in[0,1]\}.\end{gathered} \tag{8.12}$$

Покажем, что $\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t_*) \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]$. В самом деле, пусть

$$\mu_* = \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t_*). \tag{8.13}$$

Тогда согласно (8.12) имеем представление

$$\mu_* = \alpha\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)})+(1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)}), \tag{8.14}$$

где $\alpha\in[0,1]$. При этом (см. (8.13)) $a\leqslant t_*-\zeta_{t_*}^o$ и $b\geqslant t_*+\zeta_{t_*}^o$. Тогда при $k\in\mathbb{N}$

$$\Big(c_k^* \overset{\triangle}{=} t_* - \frac{\zeta_{t_*}^o}{k} \in [a,t_*[\Big)\,\&\,\Big(\tilde{c}_k^* \overset{\triangle}{=} t_* + \frac{\zeta_{t_*}^o}{k} \in]t_*,b]\Big).$$

Таким образом $(c_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $[a,t_*[$, а $(\tilde{c}_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $]t_*,b]$. При этом

$$\big((c_k^*)_{k\in\mathbb{N}}\longrightarrow t_*\big)\,\&\,\big((\tilde{c}_k^*)_{k\in\mathbb{N}}\longrightarrow t_*\big).$$

С учетом предложения 8.5 получаем, что при

$$\mathbf{X}_j^* \overset{\triangle}{=} \alpha\mathbf{X}_{t_*}^{(-)}(c_j^*)+(1-\alpha)\mathbf{X}_{t_*}^{(+)}(\tilde{c}_j^*)\ \ \forall j\in\mathbb{N}$$

реализуются следующие свойства. Именно (см. (8.14))

$$(\mathbf{X}_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}}-\mathrm{seq})[\mathbf{F}]:\ \big(\mathfrak{I}(\mathbf{X}_k^*)\big)_{k\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_*. \tag{8.15}$$

Поскольку (см. (8.13)) $\mu_*\in\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, имеем из (7.7) и (8.15), что $\mu_*\in(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]$. Так как μ_* (8.13) выбиралось произвольно, требуемое вложение установлено. Коль скоро и выбор t_* был произвольным, получили, что

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\,t) \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]\ \ \forall t\in]a,b[. \tag{8.16}$$

Тогда из (5.45), (8.11) и (8.16) вытекает требуемое свойство (8.10). □

Отметим в качестве очевидного следствия предложения 8.6, что (см. (3.4))

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \tag{8.17}$$

С другой стороны, используя (3.4) и (5.14), имеем из предложения 8.5 цепочку вложений

$$\begin{gathered}\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}] \subset \\ \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}].\end{gathered} \tag{8.18}$$

С учетом (8.18) и предложения 7.2 получаем, что

$$\begin{gathered}\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}] = \\ = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}].\end{gathered} \tag{8.19}$$

С другой стороны, в силу (5.14) имеем вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]\subset(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]. \qquad (8.20)$$

Из (8.19), (8.20) следует, что

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]\subset\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}],$$

а тогда с учетом (8.17) получаем равенство

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]=\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}). \qquad (8.21)$$

Из (8.19) и (8.21) получаем важное утверждение о совпадении МП с $\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$.

Теорема 8.1. *Имеет место следующая цепочка равенств*

$$\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]=(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]=(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]=$$

$$=(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]=(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}].$$

Итак, согласно теореме 8.1 $\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$ есть весьма универсальное МП: оно инвариантно по отношению к смене топологий ($\tau_\eta^*(\mathcal{A})$ можно заменить на $\tau_\eta^o(\mathcal{A})$) и оно «секвенциально», то есть допускает исчерпывающую реализацию в классе последовательностей, что на идейном уровне соответствует подходу Дж. Варги к построению приближенных решений (см. [1, гл. III]).

§ 9. Множества притяжения в конечномерном пространстве

В настоящем разделе мы возвращаемся к задачам, намеченным в разделе 4, следуя, однако, пока более простому варианту, в рамках которого условия типа (4.4) не рассматриваются. По сути дела мы исследуем аналог задачи о построении ОД системы (4.2) в условиях, когда данная задача в своем точном виде просто теряет смысл. Однако, вовлекая в постановку ОАХ (имеется в виду компонента 1) ОАХ, обсуждаемых в разделе 4) и используя вместо ОД соответствующее МП, мы получаем постановку, представляющую уже определенный практический интерес. Получающееся при этом МП может использоваться по сути дела так же, как и обычная ОД. Заметим, что уже в рассматриваемом простейшем варианте задачи о построении и исследовании свойств ОД системы (4.2) могут возникать эффекты, имеющие смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Упомянутые эффекты формализуются на основе применения к.-а. управлений-мер в духе подхода [15–18], используемого, однако, для несколько иной постановки в смысле варианта ОАХ (см. компоненту 1) в составе ОАХ, рассматриваемых в разделе 4). В этой связи напомним исследование [30], где нужный вариант рассматривался для более простой в сравнении с (5.1) измеримой структуры.

Всюду в дальнейшем фиксируем $n\in\mathbb{N}$ и кортеж

$$(\pi_i)_{i\in\overline{1,n}}:\overline{1,n}\longrightarrow B(I,\mathcal{A}) \qquad (9.1)$$

ярусных функций. Заметим, что сами функции $\pi_j,\ j\in\overline{1,n}$, могут рассматриваться в качестве компонент n-вектор-функции $M=M(\cdot)$ раздела 4 (см. (4.2)). В этой связи здесь сохранено обозначение n для размерности соответствующего конечномерного пространства. Если $f\in\mathbf{F}$, то определен вектор

$$\Big(\int_I\pi_i f\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,n}}\in\mathbb{R}^n,$$

который играет роль второго слагаемого в формуле (4.3). Таким образом, имеем отображение

$$f\longmapsto\Big(\int_I\pi_i f\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,n}}:\ \mathbf{F}\longrightarrow\mathbb{R}^n, \qquad (9.2)$$

обозначаемое далее через П. Итак, мы рассматриваем отображение

$$\Pi:\ \mathbf{F}\longrightarrow\mathbb{R}^n,$$

для которого

$$\Pi(f) \triangleq \Big(\int_I \pi_i f\, d\eta\Big)_{i\in\overline{1,n}} \quad \forall f \in \mathbf{F}. \tag{9.3}$$

Мы будем, следуя подходу раздела 4, исследовать МП в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ — топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$. Точнее, речь пойдет о множествах

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}], \quad (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}],$$

которые в рассматриваемом случае совпадают (см. [17, с. 38]):

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big); \tag{9.4}$$

в (9.4) учтено (7.5). Для определения МП (9.4) используем схему расширения [15–18]. С этой целью введем в рассмотрение отображение

$$\mu \longmapsto \Big(\int_I \pi_i\, d\mu\Big)_{i\in\overline{1,n}} \colon\ \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{9.5}$$

обозначаемое ниже через $\widetilde{\Pi}$. Итак, отображение

$$\widetilde{\Pi} :\ \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

таково, что

$$\widetilde{\Pi}(\mu) \triangleq \Big(\int_I \pi_i\, d\mu\Big)_{i\in\overline{1,n}} \quad \forall \mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}). \tag{9.6}$$

Из определения $*$-слабой топологии $\tau_*(\mathcal{A})$ легко следует (см. раздел 5), что отображение $\widetilde{\Pi}$ непрерывно в смысле ТП $\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau_\eta^*(\mathcal{A})\big)$ и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. При этом определено отображение

$$\widetilde{\Pi} \circ \mathfrak{I} :\ \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

для которого при $f \in \mathbb{F}$

$$(\widetilde{\Pi} \circ \mathfrak{I})(f) = \widetilde{\Pi}\big(\mathfrak{I}(f)\big) = \Big(\int_I \pi_i\, d\mathfrak{I}(f)\Big)_{i\in\overline{1,n}} = \Big(\int_I \pi_i\, d(f * \eta)\Big)_{i\in\overline{1,n}} = \Big(\int_I \pi_i f\, d\eta\Big)_{i\in\overline{1,n}} = \Pi(f).$$

Получили следующее равенство отображений:

$$\Pi = \widetilde{\Pi} \circ \mathfrak{I}. \tag{9.7}$$

Но в этом случае (см. (3.5), (9.7)) имеет место важное представление для МП, а именно:

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \widetilde{\Pi}^1\big((\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widetilde{\mathfrak{F}}]\big). \tag{9.8}$$

С учетом (9.4), (9.8) и теоремы 8.1 получаем следующее положение

Теорема 9.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \widetilde{\mathfrak{F}}] = \\ &= \widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) = \Big\{\Big(\int_I \pi_i\, d\mu\Big)_{i\in\overline{1,n}} \colon\ \mu \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]\Big\}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Сейчас, используя (5.10) и свойства, установленные в [12], мы рассмотрим более конкретизированное описание МП (9.9). Напомним, что [29, теорема 10.8.1] $\forall f \in B(I, \mathcal{A})$ $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists U \in \mathcal{U}$:

$$\Big|f(x) - \int_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}}\Big| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \tag{9.10}$$

Из (9.10) следует, что наши ярусные функции обладают пределом по любому у/ф алгебры $\mathcal{A}$. Тогда, в частности, из (5.8) и (9.10) следует, что $\forall t \in]a,b] \ \ \forall f \in B(I,\mathcal{A}) \ \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists c \in [a,t[$:

$$\Big| f(\tau) - \int_I f \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \Big| < \varepsilon \quad \forall \tau \in [c,t[. \tag{9.11}$$

Из (9.11) получаем, что каждая функция из $B(I,\mathcal{A})$ имеет предел слева в каждой точке из $]a,b]$ и, более того, этот предел определяется соответствующим интегралом. Точнее, если $f \in B(I,\mathcal{A})$ и $t \in]a,b]$, то для функции f определен предел слева в точке t, обозначаемый далее через

$$\lim_{\theta \uparrow t} f(\theta)$$

(вместо θ может использоваться любая буква), и при этом

$$\int_I f \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) = \lim_{\theta \uparrow t} f(\theta). \tag{9.12}$$

Аналогичным образом из (5.9) и (9.10) вытекает, что $\forall t \in [a,b[\ \forall f \in B(I,\mathcal{A}) \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\exists c \in]t,b]$:

$$\Big| f(\tau) - \int_I f \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \Big| < \varepsilon \quad \forall \tau \in]t,c]. \tag{9.13}$$

Из (9.13) вытекает, что каждая функция из $B(I,\mathcal{A})$ имеет предел справа в произвольной точке из полуинтервала $[a,b[$, причем данный предел совпадает с интегралом по соответствующей к.-а. (0,1)-мере. Более точно, если $f \in B(I,\mathcal{A})$ и $t \in [a,b[$, то для функции f определен предел справа в точке t, обозначаемый далее через

$$\lim_{\theta \downarrow t} f(\theta)$$

(разумеется, вместо θ может использоваться произвольная буква), и при этом справедливо равенство

$$\int_I f \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) = \lim_{\theta \downarrow t} f(\theta). \tag{9.14}$$

Свойства (9.12), (9.14) являются ключевыми; они более подробно обсуждаются в [12]. В силу линейности интеграла относительно к.-а. меры имеем очевидное следствие: если $t \in]a,b[$, $f \in B(I,\mathcal{A})$ и $\alpha \in [0,1]$, то

$$\int_I f \, d\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \alpha \lim_{\theta \uparrow t} f(\theta) + (1-\alpha) \lim_{\theta \downarrow t} f(\theta). \tag{9.15}$$

Возвращаясь к (9.1), отметим, что согласно (9.12)

$$\int_I \pi_j \, d\varkappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) = \lim_{\theta \uparrow t} \pi_j(\theta) \quad \forall t \in]a,b] \quad \forall j \in \overline{1,n}. \tag{9.16}$$

С учетом этого определяем отображение

$$\overrightarrow{\pi} :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{9.17}$$

следующим естественным условием:

$$\overrightarrow{\pi}(t) \stackrel{\triangle}{=} \big(\lim_{\theta \uparrow t} \pi_i(\theta)\big)_{i \in \overline{1,n}} \quad \forall t \in]a,b]. \tag{9.18}$$

При этом согласно (9.6), (9.16) и (9.18) имеем систему равенств

$$\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) = \overrightarrow{\pi}(t) \quad \forall t \in]a,b]. \tag{9.19}$$

Таким образом, $\overrightarrow{\pi}$ (9.17) есть n-вектор-функционал вида

$$t \longmapsto \widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

С другой стороны, согласно (9.1) и (9.14) имеем, что

$$\int_I \pi_j \, d\varkappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) = \lim_{\theta \downarrow t} \pi_j(\theta) \quad \forall t \in [a,b[\quad \forall j \in \overline{1,n}. \tag{9.20}$$

С учетом (9.20) определяем n-вектор-функционал

$$\overleftarrow{\pi} : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{9.21}$$

посредством естественного правила

$$\overleftarrow{\pi}(t) \triangleq \big(\lim_{\theta \downarrow t} \pi_i(\theta)\big)_{i \in \overline{1,n}} \quad \forall t \in [a,b[. \tag{9.22}$$

С учетом (9.6), (9.20) и (9.22) получаем, конечно, что

$$\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \overleftarrow{\pi}(t) \quad \forall t \in [a,b[. \tag{9.23}$$

Таким образом (см. (9.20), (9.22), (9.23)), имеем, что $\overleftarrow{\pi}$ (9.21) есть отображение

$$t \longmapsto \widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, то полагаем, что $[x;y]_n \triangleq \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1]\}$, получая непустое п/м $\mathbb{R}^n$. В частности,

$$[\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_n = \{\alpha \overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t) : \alpha \in [0,1]\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in]a,b[. \tag{9.24}$$

Теорема 9.2. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) = \Big(\bigcup_{t \in]a,b[} [\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_n\Big) \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через Ω обозначим непустое множество в правой части (9.25); требуется установить равенство

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) = \Omega. \tag{9.25}$$

Из (5.45) имеем (по свойству операции взятия образа) следующее равенство:

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) = \Big(\bigcup_{t \in]a,b[} \widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)\big)\Big) \cup \big\{\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big); \widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big)\big\}. \tag{9.26}$$

Выберем произвольно $t_* \in]a,b[$. Тогда согласно (5.44)

$$\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t_*) = \{\alpha\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)}) : \alpha \in [0,1]\}. \tag{9.27}$$

С учетом (9.15), (9.19), (9.23), (9.24) и (9.27) получаем цепочку равенств

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t_*)\big) = \{\widetilde{\Pi}\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)})\big) : \alpha \in [0,1]\} =$$

$$= \Big\{\Big(\int_I \pi_i \, d\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)})\big)\Big)_{i \in \overline{1,n}} : \alpha \in [0,1]\Big\} =$$

$$= \big\{\alpha \overrightarrow{\pi}(t_*) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t_*) : \alpha \in [0,1]\big\} = [\overrightarrow{\pi}(t_*); \overleftarrow{\pi}(t_*)]_n.$$

Поскольку выбор t_* был произвольным, установлено, что

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t)\big)= [\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_n \quad \forall t\in\,]a,b[. \tag{9.28}$$

Кроме того, согласно (9.19) имеем равенство

$$\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big)= \overrightarrow{\pi}(b). \tag{9.29}$$

Далее, из (9.23) следует также, что

$$\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big)= \overleftarrow{\pi}(a). \tag{9.30}$$

Из (9.26), (9.28)–(9.30) вытекает (см. определение Ω) требуемое равенство (9.25). □

Итак, искомое МП (см. теорему 9.1) находится конструктивно (см. также (9.18), (9.22)). Применительно к построениям раздела 4 отметим, что требуемое МП полностью определяется односторонними пределами вектор-функции M.

Г л а в а 3. МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В РЕЖИМЕ «УЗКИХ» ИМПУЛЬСОВ

§ 10. Краткое введение

В настоящей главе мы возвращаемся к общей постановке раздела 4, имея в виду исследование вопросов о достижимости при наличии ОАХ; в составе последних были выделены (см. раздел 4) две компоненты. Мы рассматриваем здесь упомянутые «совокупные» ОАХ, ориентируясь на построение в явном виде МП. При этом будут указаны условия асимптотической нечувствительности последнего при ослаблении части ограничений.

§ 11. Ограничения моментного характера и их релаксация

Мы рассмотрим в настоящем разделе условия вида (4.4), накладываемые на выбор управления из множества $\mathbf{F}$. Элементы этого множества будем называть управлениями (см. раздел 4), но для их обозначения будем, как правило, использовать букву f, а не u, имея в виду возможность других интерпретаций. По этой же причине мы несколько изменим саму форму записи условия (4.4).

Всюду в дальнейшем фиксируем натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(\rho_i)_{i\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow B(I,\mathcal{A}) \tag{11.1}$$

ярусных функций. Разумеется, сами эти ярусные функции $\rho_j \in B(I,\mathcal{A}), j \in \overline{1,N}$, могут рассматриваться как компоненты N-вектор-функции, подобной s в (4.4).

Кроме того, фиксируем в дальнейшем (непустое) множество $Y \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^N)$. Полагаем, что Y замкнуто в ТП $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}}^{(N)})$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(N)}$ — обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^N$; короче говоря, Y — «обычное» замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$. Рассматриваем следующее условие на выбор $f \in \mathbf{F}$:

$$\Big(\int_I \rho_i f\, d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in Y. \tag{11.2}$$

Конкретная природа условий типа (11.2) может быть весьма различной. Так, например, в [15, § 1.3] приведен гипотетический пример ситуации, в которой такого рода условие связывается с естественным режимом работы двигателя, предусматривающим чередование энергетических импульсов и пауз (своеобразных «отдыхов»). С другой стороны, условия типа (11.2) могут возникать в результате переформулировки краевых и промежуточных условий на реализацию траекторий линейной системы с возможной разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. Так или иначе, (11.2) характеризует весьма общий класс условий, с которыми мы будем связывать ограничения моментного характера (отметим естественную связь с проблемой моментов в постановках [22]). Легко видеть, однако, что уже в простейших случаях [15, гл. I] задачи управления с ограничениями, подобными (11.2), оказываются неустойчивыми при возмущении и, в частности, при ослаблении Y-ограничения (11.2). В последнем случае может возникать скачкообразное улучшение достигаемого качества, что представляет не только теоретический, но и определенный практический интерес, поскольку оно отвечает естественному в инженерной практике режиму соблюдения ограничений с высокой, но все же конечной, степенью точности. В этой связи мы будем допускать, при исследовании вопросов достижимости, режимы управления «на грани фола» с точки зрения соблюдения Y-ограничения (11.2). Данный подход последовательно развивался в большой серии работ одного из авторов (см., в частности, [15–18]; он допускает естественные аналогии с конструкциями [1, гл. III] для задач оптимизации (имеется в виду использование в этих задачах приближенных решений Дж. Варги).

Возвращаясь к (11.2), введем два различных, вообще говоря, варианта ослабления этого ограничения: полноразмерное и частичное.

Если $\varepsilon \in]0,\infty[$, то через $\mathcal{O}(Y,\varepsilon)$ будем обозначать обычную открытую ε-окрестность множества Y :

$$\mathcal{O}(Y,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \{(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbb{R}^N \,|\, \exists\, (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in Y : |y_j - z_j| < \varepsilon \ \ \forall j \in \overline{1,N}\}. \tag{11.3}$$

Кроме того, фиксируем ниже множество $M \in \mathcal{P}(\overline{1,N})$, обладающее следующим свойством:

$$\rho_j \in B_o(I,\mathcal{A}) \quad \forall j \in M. \tag{11.4}$$

Иными словами, (см. (11.4)), M, $M \subset \overline{1,N}$, есть некоторое множество ступенчатости элементов кортежа (11.1).

Замечание 11.1. Самый простой и естественный вариант (11.4) отвечает ситуации, когда $\rho_j = \chi_{L_j}$, где $L_j \in \mathcal{A}$ при $j \in M$. Иными словами, имеется в виду случай, когда часть элементов кортежа (11.2) состоит из индикаторов измеримых множеств. Заметим, кстати, что с этим случаем можно связать уже упоминавшийся пример в [15, § 1.3].

С использованием (11.4) введем другой, вообще говоря, вариант ослабления Y-ограничения, полагая, что

$$\begin{gathered}\widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,M) \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbb{R}^N |\, \exists\, (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in Y :\, (y_i = z_j \quad \forall j \in M)\,\&\,(|y_j - z_j| < \varepsilon \\ \forall j \in \overline{1,N}\} = \{(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbb{R}^N |\, \exists\, (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in Y :\, (y_j = z_j \quad \forall j \in M)\,\&\,(|y_j - z_j| < \varepsilon \\ \forall j \in \overline{1,N} \setminus M)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[.\end{gathered} \tag{11.5}$$

В связи с (11.2), (11.5) заметим, что

$$Y \subset \widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,M) \subset \mathcal{O}(Y,\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{11.6}$$

Замечание 11.2. Отметим, что случай $M = \varnothing$ из нашего рассмотрения не исключается. Сравним (11.3) и (11.5) в этом случае. Итак, пусть в пределах данного замечания $M = \varnothing$. Тогда $\overline{1,N} \setminus M = \overline{1,N}$ и (см. (11.3), (11.5))

$$\widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,M) = \widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,\varnothing) = \mathcal{O}(Y,\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[.$$

Итак, в данном случае варианты, связанные с (11.3) и (11.5), приводят к одной и той же схеме ослабления Y-ограничения (11.2). □

Замечание 11.3. Из (11.5), (11.6) следует также, что при $M = \overline{1,N}$ справедлива следующая система равенств:

$$\widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,M) = \widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,\overline{1,N}) = Y \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[.$$ □

Возвращаясь к общему случаю $M \in \mathcal{P}(\overline{1,N})$, условимся относительно последующих обозначений: если $\varepsilon \in]0,\infty[$, то

$$\mathbb{Y}_\varepsilon \triangleq \big\{f \in \mathbf{F}_\varepsilon |\, \Big(\int_I \rho_i f\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{O}(Y,\varepsilon)\big\}, \tag{11.7}$$

$$\widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon \triangleq \big\{f \in \mathbf{F}_\varepsilon |\, \Big(\int_I \rho_i f\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in \widehat{\mathcal{O}}(Y,\varepsilon|\,M)\big\}. \tag{11.8}$$

Итак, мы (в отличие от [15–18]) рассматриваем ниже обе схемы релаксации в режиме «узких» импульсов. При этом, конечно,

$$\mathfrak{Y} \triangleq \{\mathbb{Y}_\varepsilon :\, \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \beta[\mathbf{F}], \tag{11.9}$$

$$\widehat{\mathfrak{Y}} \triangleq \{\widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon :\, \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \beta[\mathbf{F}]. \tag{11.10}$$

В (11.9) и (11.10) введены два варианта ОАХ. При этом согласно (11.6)–(11.8)

$$\widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon \subset \mathbb{Y}_\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{11.11}$$

В свою очередь, из (11.9)–(11.11) вытекает, что $\forall S \in \mathfrak{Y}\ \exists\, \widehat{S} \in \widehat{\mathfrak{Y}} :\ \widehat{S} \subset S$. Заметим также, что (см. (3.2), (11.9), (11.10) при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\mathbb{Y}_\varepsilon)\tau\big) \in \mathcal{P}\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big), \tag{11.12}$$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\mathfrak{I}^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon)\tau\big)\in \mathcal{P}\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big), \tag{11.13}$$

Из (11.11)–(11.13) имеем очевидные вложения

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}]. \tag{11.14}$$

Напомним также, что согласно (3.3), (11.9) и (11.10) при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]$ определены секвенциальные МП

$$\Big((\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \in \mathcal{P}\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big)\Big)\ \&\ \Big((\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \in \mathcal{P}\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big)\Big),$$

для которых согласно (3.4) имеют место вложения

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}], \tag{11.15}$$

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{11.16}$$

С учетом (2.13), (11.9)–(11.11) имеем также, что

$$(\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}] \subset (\mathfrak{Y} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]. \tag{11.17}$$

Как следствие из (3.3) и (11.17) получаем, что

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau;\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]. \tag{11.18}$$

Отметим также некоторые простейшие следствия (5.23), учитывая, что

$$N^o_{\tau^*_\eta(\mathcal{A})}(\mu) \subset N^o_{\tau^o_\eta(\mathcal{A})}(\mu) \ \ \forall \mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}). \tag{11.19}$$

В свою очередь, из (11.19) вытекает, что (см. раздел 2) имеет место следующее свойство:

$$N_{\tau^*_\eta(\mathcal{A})}(\mu) \subset N_{\tau^o_\eta(\mathcal{A})}(\mu) \ \ \forall \mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}). \tag{11.20}$$

Теперь, используя (2.11) и (11.20), получаем для всякой направленности $(D, \preceq, g)$ в $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и для каждой к.-а. меры $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, что

$$\big((D,\preceq,g)\overset{\tau^o_\eta(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big) \Longrightarrow \big((D,\preceq,g)\overset{\tau^*_\eta(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big).$$

С учетом определений раздела 3 (см. (3.1)) имеем теперь с очевидностью, что

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathcal{E}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{F})\big). \tag{11.21}$$

Аналогичным образом имеем из (11.20) (см. раздел 2), что $\forall (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}\ \ \forall \mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$

$$\big((\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\tau^o_\eta(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big) \Longrightarrow \big((\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\tau^*_\eta(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu\big). \tag{11.22}$$

Тогда, как легко видеть (см. (3.3), (11.22)),

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathcal{E}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{F})\big). \tag{11.23}$$

Заметим, что в (11.21) и (11.23) могут использоваться семейства $\mathfrak{Y}$ и $\widehat{\mathfrak{Y}}$. Поэтому согласно (11.21)

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}], \tag{11.24}$$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{11.25}$$

В свою очередь, из (11.23) получаем вложения

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}], \tag{11.26}$$

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^o_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{11.27}$$

§ 12. Конечно-аддитивные управления-меры и представление вспомогательного множества притяжения

В предыдущем разделе были введены МП (включая секвенциальные МП), что объективно соответствует использованию в [1, гл. III, IV] приближенных решений для целей оптимизации. Сейчас будут введены допустимые обобщенные решения в виде соответствующих к.-а. мер и в их терминах будет дано (универсальное) описание всех МП предыдущего раздела.

Мы рассматриваем компакт (5.16) в качестве пространства ОЭ; конечно, ОЭ можно интерпретировать здесь как обобщенные управления. Элементы множества

$$\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \Big\{\mu \in \mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}] \big| \Big(\int_I \rho_i \, d\mu\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in Y\Big\} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big) \tag{12.1}$$

будут рассматриваться в качестве допустимых ОЭ. В связи с (12.1) отметим, что оператор $\mathcal{R}$ вида

$$\mu \longmapsto \Big(\int_I \rho_i \, d\mu\Big)_{i\in\overline{1,N}} : \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{12.2}$$

непрерывен в смысле ТП (5.16) и $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}}^{(N)})$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(N)}$ — топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^N$. Отметим, что подобно предложению 7.1 устанавливается следующее более общее, но не используемое в дальнейшем

Предложение 12.1. *Если $\mathcal{S} \in \beta[\mathbf{F}]$, то $(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathcal{S}]$ есть множество всех к.-а. мер $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, для каждой из которых существует такая направленность $(D, \preceq, g)$ в $\mathbf{F}$, что*

$$\big(\mathcal{S} \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]\big) \,\&\, \big((D, \preceq, \mathfrak{I} \circ g) \overset{\tau_\otimes(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu\big).$$

Теперь мы приступаем к изучению МП, введенных в разделе 11.

Предложение 12.2. *Имеет место вложение*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную к.-а. меру

$$\mu_o \in (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}]. \tag{12.3}$$

С учетом определений раздела 3 имеем (см. (3.1)), что $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и для некоторой направленности $(D, \preceq, g)$ в $\mathbf{F}$

$$\big(\mathfrak{Y} \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]\big) \,\&\, \big((D, \preceq, \mathfrak{I} \circ g) \overset{\tau_*(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_o\big). \tag{12.4}$$

Покажем, что $\mathcal{R}(\mu_o) \in Y$. Для этого выберем произвольно $\hat{\zeta} \in]0, \infty[$. Тогда

$$\hat{\xi} \triangleq \frac{\hat{\zeta}}{2} \in]0, \infty[, \tag{12.5}$$

$$\mathcal{O}(Y, \hat{\xi}) = \{(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbb{R}^N \,|\, \exists\, (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in Y : \, |y_j - z_j| < \hat{\xi} \ \ \forall j \in \overline{1,N}\}, \tag{12.6}$$

$$\mathbb{Y}_{\hat{\xi}} = \big\{f \in \mathbf{F}_{\hat{\xi}} \big| \Big(\int_I \rho_i f \, d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{O}(Y, \hat{\xi})\big\} \in \mathfrak{Y}. \tag{12.7}$$

С учетом (12.7) и первого положения в (12.4) имеем, что для некоторого $\hat{d}_1 \in D$ имеет место свойство: $\forall \delta \in D$

$$(\hat{d}_1 \preceq \delta) \Longrightarrow \big(g(\delta) \in \mathbb{Y}_{\hat{\xi}}\big). \tag{12.8}$$

В свою очередь, из (12.7) и (12.8) получаем, что $\forall \delta \in D$

$$(\hat{d}_1 \preceq \delta) \Longrightarrow \Big(\big(\int_I \rho_i g(\delta) \, d\eta\big)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{O}(Y, \hat{\xi})\Big). \tag{12.9}$$

При этом согласно определению $\mathfrak{I}$ (5.19) имеем, что [24, § 7]

$$\int_I \rho_j g(\delta)\, d\eta = \int_I \rho_j\, d\big(g(\delta) * \eta\big) = \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\delta) \quad \forall j \in \overline{1, N} \quad \forall \delta \in D.$$

Поэтому из (12.6), (12.9) получаем, что $\forall \delta \in D$

$$(\hat{d}_1 \preceq \delta) \Longrightarrow \Big(\exists\, (y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in Y : \big| y_j - \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\delta) \big| < \hat{\xi} \quad \forall j \in \overline{1, N}\Big). \tag{12.10}$$

Вместе с тем, второе положение в (12.14) означает, в частности, что $\forall j \in \overline{1, N}\ \exists\, \delta_1 \in D\ \ \forall \delta_2 \in D$

$$(\delta_1 \preceq \delta_2) \Longrightarrow \Big(\big| \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\delta_2) - \int_I \rho_j\, d\mu_o \big| < \hat{\xi} \Big).$$

Поэтому с использованием аксиом НМ получаем, что для некоторого $\hat{d}_2 \in D$ справедливо следующее свойство:

$$(\hat{d}_2 \preceq \delta) \Longrightarrow \Big(\big| \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\delta) - \int_I \rho_j\, d\mu_o \big| < \hat{\xi} \quad \forall j \in \overline{1, N}\Big). \tag{12.11}$$

Поскольку $\hat{d}_1 \in D$ и $\hat{d}_2 \in D$, то найдется $\bar{\delta} \in D$, для которого $\hat{d}_1 \preceq \bar{\delta}$ и $\hat{d}_2 \preceq \bar{\delta}$. Из (12.10) следует теперь, что для некоторого

$$(\bar{y}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in Y$$

имеет место система неравенств

$$\big| \bar{y}_j - \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\bar{\delta}) \big| < \hat{\xi} \quad \forall j \in \overline{1, N}. \tag{12.12}$$

Вместе с тем из (12.11) следует, что

$$\big| \int_I \rho_j\, d(\mathfrak{I} \circ g)(\bar{\delta}) - \int_I \rho_j\, d\mu_o \big| < \hat{\xi} \quad \forall j \in \overline{1, N}. \tag{12.13}$$

В итоге с учетом (12.5), (12.12) и (12.13) получаем, что

$$\big| \bar{y}_j - \int_I \rho_j\, d\mu_o \big| < \hat{\zeta} \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Поскольку выбор $\hat{\zeta}$ был произвольным, установлено, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, (y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in Y$:

$$\big| y_j - \int_I \rho_j\, d\mu_o \big| < \varepsilon. \tag{12.14}$$

В силу замкнутости Y в $(\mathbb{R}^N, \tau_{\mathbb{R}}^{(N)})$ имеем из (12.14) требуемое свойство:

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i\, d\mu_o \Big)_{i \in \overline{1,N}} \in Y. \tag{12.15}$$

Напомним (7.5). Из (11.7) имеем, что $\mathbb{Y}_\varepsilon \subset \mathbf{F}_\varepsilon$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$. Но в этом случае

$$\widetilde{\mathfrak{F}} \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]. \tag{12.16}$$

В самом деле, пусть $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Тогда согласно (7.5) $\widetilde{F} = \mathbf{F}_o$ для некоторого $\theta \in]0, \infty[$. При этом $\mathbb{Y}_\theta \subset \mathbf{F}_\theta$, где (см. (12.4)) $\mathbb{Y}_\theta \in \mathfrak{Y}$ и, стало быть, $\mathbb{Y}_\theta \in (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]$ в силу (12.4). Это означает (см. (2.10)), что для некоторого $\mathbf{d} \in D$ имеет место свойство: $\forall \delta \in D$

$$(\mathbf{d} \preceq \delta) \Longrightarrow \big(g(\delta) \in \mathbb{Y}_\theta \big).$$

Как следствие для $\delta \in D$ со свойством $\mathbf{d} \preceq \delta$ имеем $g(\delta) \in \mathbf{F}_\theta$, где $\mathbf{F}_\theta \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ в силу (7.3). Получили (с учетом (2.10)), что $\mathbf{F}_\theta \in (\mathbf{F}-\mathrm{ass})[D;\preceq;g]$ и, следовательно, $\widetilde{F} \in (\mathbf{F}-\mathrm{ass})[D;\preceq;g]$. Поскольку выбор $\widetilde{F}$ был произвольным, установлено (12.16). Тогда (см. (12.4), (12.16)) к.-а. мера $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ обладает свойствами

$$\big(\widetilde{\mathfrak{F}} \subset (\mathbf{F}-\mathrm{ass})[D;\preceq;g]\big) \,\&\, \big((D,\preceq,\mathfrak{I}\circ g) \overset{\tau_\eta^*(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_o\big)$$

(учли свойство, подобное (7.11)). Но в этом случае $\mu_o \in (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*;\mathfrak{I};\widetilde{\mathfrak{F}}]$, а тогда $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$ в силу предложения 7.2. С учетом (12.1) и (12.15) имеем теперь, что $\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$. Поскольку к.-а. мера μ_o (12.3) выбиралась произвольно, требуемое утверждение установлено. $\square$

Напомним, что (см. (7.58), (7.61)) ранее были определены функции

$$\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c) \in \mathbf{F} \;\; \forall t \in]a,b] \;\; \forall c \in [t,b[\big) \,\&\, \big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c) \in \mathbf{F} \;\; \forall t \in [a,b[\;\; \forall c \in]t,b]\big).$$

Напомним также предложения 7.3 и 7.4. В качестве следствия первого из этих двух предложений отметим

Предложение 12.3. *Если* $t \in]a,b]$, $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}), (c_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to [a,t[$ *и при этом*

$$(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t, \tag{12.17}$$

то $\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}}-\mathrm{seq})[\mathbf{F}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем t и $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в соответствии с упомянутыми условиями, включая (12.17) и то, что $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$. Согласно предложению 7.3

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}). \tag{12.18}$$

Как следствие получаем сходимость в $\tau_o(\mathcal{A})$:

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}). \tag{12.19}$$

Из (12.18), (12.19) вытекает (см. [15, § 4.2]), что $\forall L \in \mathcal{A} \;\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(L) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(L) \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}.$$

Как следствие получаем, что $\forall l \in \mathbb{N} \;\; \forall (L_i)_{i\in\overline{1,l}} \in \mathcal{A}^l \;\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big)(L_r) = \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})(L_r) \;\; \forall r \in \overline{1,l} \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.20}$$

В свою очередь, имеем из (12.20) и [24, (3.2.7), (3.3.8)], что $\forall f \in B_o(I,\mathcal{A}) \;\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\int_I f\, d\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big) = \int_I f\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}.$$

С учетом [24, определение 3.7.1] получаем, следовательно, что $\forall f \in B_o(I,\mathcal{A}) \;\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\int_I f\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\, d\eta = \int_I f\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}.$$

Последнее означает с учетом (11.4), что $\forall p \in M \;\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\int_I \rho_p \mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\, d\eta = \int_I \rho_p\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.21}$$

С учетом конечности множества M и (11.19) получаем, что $\exists\, k \in \mathbb{N}:$

$$\int_I \rho_p \mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\, d\eta = \int_I \rho_p\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \;\; \forall p \in M \;\; \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.22}$$

Из (5.14), (12.18) получаем также свойство $*$-слабой сходимости:

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^*(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}).$$

Как следствие получаем сходимость в $*$-слабой топологии:

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_*(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}). \tag{12.23}$$

(учитываем здесь, что $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и $\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c)\big)\in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ при $c \in [a, t[$; см. (7.58)). Из (12.23) следует, конечно, что

$$\Big(\int_I \rho_j \, d\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow \int_I \rho_j \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \ \ \forall j \in \overline{1, N}.$$

Последнее означает [24, определение 3.7.1], что

$$\Big(\int_I \rho_j \mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) \, d\eta\Big)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow \int_I \rho_j \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \ \ \forall j \in \overline{1, N}. \tag{12.24}$$

Свойства (12.22) и (12.24) используем в их естественном сочетании. В этой связи напомним, что

$$\Big(\int_I \rho_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\Big)_{i\in\overline{1,N}} = \mathcal{R}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) \in Y \tag{12.25}$$

по выбору t. С учетом (11.5), (12.22) и (12.25) получаем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists k \in \mathbb{N}:$

$$\Big(\int_I \rho_i \mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) \, d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in \widehat{\mathcal{O}}(Y, \varepsilon | \, M) \ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}. \tag{12.26}$$

С другой стороны, из (12.17) и предложения 8.1 вытекает (см. (7.5)), что

$$\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\overline{1,N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}].$$

Как следствие (см. (2.13)) имеем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists k \in \mathbb{N}:$

$$\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) \in \mathbf{F}_\varepsilon \ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}.$$

Но в этом случае из (11.8) и (12.26) следует свойство $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists k \in \mathbb{N}:$

$$\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) \in \widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon \ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty}.$$

С учетом (2.13) и (11.10) получаем теперь требуемое утверждение. $\square$

Итак, установлено свойство: если $t \in]a, b]$ и $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [a, t[^{\mathbb{N}}$, то

$$\Big(\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \,\&\, \big((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big). \tag{12.27}$$

Напомним, что согласно (5.44), (5.45) $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}] \ \ \forall t \in]a, b]$ Поэтому (см. (12.1), (12.2)) имеем $\forall t \in]a, b]$

$$\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \Big(\mathcal{R}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) \in Y\Big). \tag{12.28}$$

Теперь напомним (9.12). С учетом (11.1) получаем, что

$$\int_I \rho_j \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) = \lim_{\theta\uparrow t} \rho_j(\theta) \ \ \forall t \in]a, b]. \tag{12.29}$$

Учитывая (12.29), принимаем следующее соглашение:

$$\hat{\rho}_\uparrow(t) \overset{\triangle}{=} \big(\lim_{\theta\uparrow t} \rho_i(\theta)\big)_{i\in\overline{1,N}} \ \ \forall t \in]a, b]. \tag{12.30}$$

Теперь из (12.2) и (12.30) получаем, что

$$\mathcal{R}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big)= \Big(\int_I \rho_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\Big)_{i\in\overline{1,N}} = \hat{\rho}_{\uparrow}(t) \quad \forall t \in \,]a,b]. \tag{12.31}$$

Из (12.28) и (12.31) следует, конечно, что $\forall t \in \,]a,b]$

$$\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\hat{\rho}_{\uparrow}(t) \in Y\big). \tag{12.32}$$

Из (12.27) и (12.32) вытекает следующее общее свойство: $\forall t \in \,]a,b] \;\; \forall (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [a,t[^{\mathbb{N}}$

$$\Big(\big(\hat{\rho}_{\uparrow}(t) \in Y\big) \,\&\, \big((c_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big). \tag{12.33}$$

В свою очередь, из (12.33) следует практически очевидное теперь

Предложение 12.4. *Если $t \in \,]a,b]$ и $\hat{\rho}_{\uparrow}(t) \in Y$, то*

$$\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in \,]a,b]$ таково, что $\hat{\rho}_{\uparrow}(t) \in Y$. Полагаем

$$c_k \triangleq t - \frac{t-a}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Получили последовательность $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [a,t[^{\mathbb{N}}$, для которой $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t$. В силу (12.33) имеем свойство

$$\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]. \tag{12.34}$$

Кроме того, согласно предложению 7.3 имеем свойство сходимости

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}).$$

С учетом (3.3) и (12.34) получаем требуемое утверждение. □

Из предложения 12.4 следует, в частности, что

$$\big(\hat{\rho}_{\uparrow}(b) \in Y\big) \Longrightarrow \big(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]\big). \tag{12.35}$$

Предложение 12.5. *Если $t \in [a,b[, \kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}), (\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \,]t,b]^{\mathbb{N}}$ и при этом*

$$(\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t,$$

то $\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]$.

Доказательство аналогично обоснованию предложения 12.3. Итак, имеем свойство: если $t \in [a,b[$ и $(\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \,]t,b]^{\mathbb{N}}$, то

$$\Big(\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widehat{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \,\&\, \big((\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow t\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big). \tag{12.36}$$

С учетом (5.44) и (5.45) имеем, что $\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widehat{\mathbb{P}}_\eta^o[\mathcal{A}] \;\; \forall t \in [a,b[$. Тогда (см. (12.1), (12.2)) $\forall t \in [a,b[$

$$\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widehat{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \Big(\mathcal{R}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) \in Y\Big). \tag{12.37}$$

Далее, с учетом (9.14) и (11.1) имеем, что

$$\int_I \rho_j \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) = \lim_{\theta \downarrow t} \rho_j(\theta) \quad \forall t \in [a,b[. \tag{12.38}$$

Учитывая (12.38), полагаем, что

$$\rho_{\downarrow}(t) \triangleq \big(\lim_{\theta \downarrow t} \rho_i(\theta)\big)_{i \in \overline{1,N}} \quad \forall t \in [a, b[. \tag{12.39}$$

Поэтому (см. (12.2)) имеем очевидное свойство:

$$\mathcal{R}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \Big(\int_I \rho_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\Big)_{i \in \overline{1,N}} = \rho_{\downarrow}(t) \quad \forall t \in [a, b[; \tag{12.40}$$

мы учли (12.38), (12.39). Из (12.37) и (12.40) вытекает теперь следующее положение: $\forall t \in [a, b[$

$$\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\rho_{\downarrow}(t) \in Y\big). \tag{12.41}$$

В свою очередь, из (12.36) и (12.41) получаем, что $\forall t \in [a, b[\ \ \forall (\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \in]t, b]^{\mathbb{N}}$

$$\Big(\big(\rho_{\downarrow}(t) \in Y\big) \,\&\, \big((\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big). \tag{12.42}$$

Предложение 12.6. *Если* $t \in [a, b[$ *и* $\rho_{\downarrow}(t) \in Y$, *то*

$$\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in [a, b[$ и $\rho_{\downarrow}(t) \in Y$. Тогда из (12.42) имеем $\forall (\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \in]t, b]^{\mathbb{N}}$

$$\big((\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]\Big). \tag{12.43}$$

Полагаем теперь, что

$$c_k \triangleq t + \frac{b - t}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in]t, b]^{\mathbb{N}}$ и имеет место сходимость

$$(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow t.$$

Из (12.43) следует теперь, что $\big(\mathbf{X}_t(c_k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]$. Кроме того, из предложения 7.4 имеем сходимость

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(c_k)\big)\Big)_{k \in \mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}).$$

С учетом (3.3) получаем требуемое свойство. □

Из предложения 12.6 следует, в частности, импликация

$$\big(\rho_{\downarrow}(a) \in Y\big) \Longrightarrow \big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]\big). \tag{12.44}$$

Импликации (12.35), (12.44) характеризуют условия принадлежности «крайних» недираковских (0,1)-мер соответствующему секвенциальному МП. Теперь рассмотрим аналогичное свойство для «промежуточных» мер упомянутого типа. Для этого будем использовать предложение 8.5.

Предложение 12.7. *Если* $t \in]a, b[, \alpha \in [0, 1]$,

$$\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1 - \alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}), \tag{12.45}$$

а последовательность $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [a, t[^{\mathbb{N}}$ *и* $(\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \in]t, b]^{\mathbb{N}}$ *таковы, что*

$$\big((c_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big) \,\&\, \big((\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big), \tag{12.46}$$

то $\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) + (1 - \alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем t и α в соответствии с условиями (при этом (12.45) и (12.46) предполагаются выполненными). Итак,

$$\mu_o \overset{\triangle}{=} \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) \tag{12.47}$$

и, кроме того, согласно предложению 8.5 имеет место сходимость

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_o. \tag{12.48}$$

При этом, кстати, согласно предложению 8.5

$$\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \in (\widetilde{\mathfrak{F}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]. \tag{12.49}$$

Из (12.1), (12.2) и (12.47) следует, что

$$y_o \overset{\triangle}{=} \mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i \, d\mu_o\Big)_{i\in\overline{1,N}} \in Y. \tag{12.50}$$

Заметим, что $\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j) \in \mathbf{F} \quad \forall j \in \mathbb{N}$. В силу линейности неопределенного интеграла

$$\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big) = \alpha\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j)\big) + (1-\alpha)\mathfrak{I}\big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big) \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{12.51}$$

С другой стороны, из (12.50) следует, что

$$y_{o,j} \overset{\triangle}{=} y_o(j) = \mathcal{R}(\mu_o)(j) = \int_I \rho_j \, d\mu_o \ \ \forall j \in \overline{1,N}.$$

Стало быть, имеем с очевидностью, что

$$y_o = (y_{o,i})_{i\in\overline{1,N}} \in Y. \tag{12.52}$$

Возвращаясь к (12.48), отметим, что в силу (12.47), (12.48) и (12.51) имеем сходимость

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau_o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_o.$$

Поэтому [15, с. 81] имеем следующее свойство:

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \exists k \in \mathbb{N}: \ \mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big)(A) = \mu_o(A) \ \ \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.53}$$

Используя аксиомы НМ, получаем из (12.53), что

$$\forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}) \ \exists k \in \mathbb{N}: \ \mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big)(A) = \mu_o(A) \ \ \forall j \in \overrightarrow{k,\infty} \ \ \forall A \in \mathcal{K}.$$

Но в этом случае (см. [24, (3.2.7), (3.3.8)]) получаем следующее свойство стационарности:

$$\forall \mathbf{f} \in B_o(I,\mathcal{A}) \ \exists k \in \mathbb{N}: \ \int_I \mathbf{f} \, d\mathfrak{I}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big) = \int_I \mathbf{f} \, d\mu_o \ \ \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.54}$$

Из (12.54) вытекает, что [24, определение 3.7.1]

$$\forall \mathbf{f} \in (B_o(I,\mathcal{A})) \ \exists k \in \mathbb{N}: \ \int_I \mathbf{f} \cdot \big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big) \, d\eta = \int_I \mathbf{f} \, d\mu_o \ \ \forall j \in \overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.55}$$

В частности, из (12.55) получаем очевидное следствие

$$\forall p \in M \ \exists k \in \mathbb{N}: \int_I \rho_j \cdot \big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_j) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j)\big) \, d\eta = \int_I \rho_j \, d\mu_o = y_{o,j}. \tag{12.56}$$

С другой стороны, из (12.48) вытекает, что (см. (5.14))

$$\Big(\Im\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\tau_\eta^*(\mathcal{A})}{\longrightarrow}\mu_o. \tag{12.57}$$

Как следствие получаем, что $\forall\mathbf{f}\in B(I,\mathcal{A})$

$$\Big(\int_I\mathbf{f}\,d\Big(\Im\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\Big)\Big)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow\int_I\mathbf{f}\,d\mu_o. \tag{12.58}$$

Используя (12.58) и [24, определение 3.7.1], получаем также свойство: $\forall\mathbf{f}\in B(I,\mathcal{A})$

$$\Big(\int_I\mathbf{f}\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\,d\eta\Big)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow\int_I\mathbf{f}\,d\mu_o.$$

Данные свойства непосредственно следуют из определения $*$-слабой топологии, и мы не обсуждаем их подробно. В результате имеем $\forall j\in\overline{1,N}$

$$\Big(\int_I\rho_j\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_i)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)\,d\eta\Big)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow\int_I\rho_j\,d\mu_o. \tag{12.59}$$

Выберем произвольно $\zeta\in]0,\infty[$, получая множество

$$\widehat{\mathcal{O}}(Y,\zeta|\,M)=\{(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathbb{R}^N|\\ \exists\,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in Y:\,(y_j=z_j\quad\forall j\in M)\,\&\,(|y_j-z_j|<\zeta\quad\forall j\in\overline{1,N})\} \tag{12.60}$$

и, как следствие, следующее множество ζ-допустимых обычных управлений:

$$\widehat{\mathbb{Y}}_\zeta=\big\{f\in\mathbf{F}_\zeta\big|\Big(\int_I\rho_i f\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}}\in\widehat{\mathcal{O}}(Y,\zeta|\,M)\big\}\in\mathcal{P}(\mathbf{F}_\zeta). \tag{12.61}$$

Из (12.56) вытекает, что

$$\exists\,k\in\mathbb{N}:\ \int_I\rho_j\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\,d\eta=y_{o,j}\quad\forall l\in\overrightarrow{k,\infty}\quad\forall j\in M \tag{12.62}$$

(заметим, что при $M=\varnothing$ в качестве k в (12.62) можно выбрать любое число из $\mathbb{N}$). Далее, из (12.63) вытекает, что

$$\exists\,k\in\mathbb{N}:\ \Big|\int_I\rho_j\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\,d\eta-\int_I\rho_j\,d\mu_o\Big|<\zeta\quad\forall j\in\overline{1,N}\quad\forall l\in\overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.63}$$

Получаем с учетом (12.63), что непременно

$$\exists\,k\in\mathbb{N}:\ \Big|\int_I\rho_j\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\,d\eta-y_{o,j}\Big|<\zeta\quad\forall j\in\overline{1,N}\quad\forall l\in\overrightarrow{k,\infty}.$$

Из (12.52), (12.60) и (12.62) имеем теперь, что

$$\exists\,k\in\mathbb{N}:\ \Big(\int_I\rho_i\cdot\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\,d\eta\Big)_{i\in\overline{1,N}}\in\widehat{\mathcal{O}}(Y,\zeta|\,M)\quad\forall l\in\overrightarrow{k,\infty}. \tag{12.64}$$

Напомним теперь, что согласно (7.58) и (7.61) при $l\in\mathbb{N}$

$$\Big(\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)=\frac{1}{t-c_l}\chi_{[c_l,t[}\Big)\,\&\,\Big(\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)=\frac{1}{\tilde{c}_l-t}\chi_{]t,\tilde{c}_l]}\Big),$$

а потому $\operatorname{supp}\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\subset[c_l,\tilde{c}_l]$ и, как следствие,

$$\mathbf{t}^o\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)-\mathbf{t}_o\big(\alpha\mathbf{X}_t^{(-)}(c_l)+(1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l)\big)\leqslant\tilde{c}_l-c_l.$$

С учетом (7.3) и (12.46) получаем очевидное теперь свойство

$$\exists\, m \in \mathbb{N}:\ \alpha \mathbf{X}_t^{(-)}(c_l) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l) \in \mathbf{F}_\zeta \ \ \forall l \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Комбинируя последнее с (12.64), получаем (см. (12.61)), что

$$\exists\, k \in \mathbb{N}:\ \alpha \mathbf{X}_t^{(-)}(c_l) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l) \in \widehat{\mathbb{Y}}_\zeta \ \ \forall l \in \overrightarrow{k, \infty}.$$

Поскольку выбор ζ был произвольным, установлено, что

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, k \in \mathbb{N}:\ \alpha \mathbf{X}_t^{(-)}(c_l) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_l) \in \widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon \ \ \forall l \in \overrightarrow{k, \infty}.$$

Это означает, что (см. (2.13), (11.10)) $\big(\alpha \mathbf{X}_t^{(-)}(c_i) + (1-\alpha)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}]$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 12.8. *Если* $t \in]a, b[$, *то*

$$\Big\{\mu \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t) \Big| \Big(\int_I \rho_i \, d\mu\Big)_{i \in \overline{1,N}} \in Y\Big\} \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{12.65}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в левой части (12.65) (значение $t \in]a, b[$ полагаем фиксированным). Пусть $\mu_o \in \Omega$. Тогда

$$\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)$$

и, кроме того, справедливо включение

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i \, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,N}} \in Y. \tag{12.66}$$

С учетом (5.44) получаем, что при некотором $\alpha_o \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\mu_o = \alpha_o \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha_o)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}).$$

При этом, конечно, имеем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Big(\frac{t-a}{k} \in]0, \infty[\Big) \,\&\, \Big(\frac{b-t}{k} \in]0, \infty[\Big).$$

С учетом этого введем две последовательности в I: полагаем, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Big(c_k \triangleq t - \frac{t-a}{k}\Big) \,\&\, \Big(\tilde{c}_k \triangleq t + \frac{b-t}{k}\Big).$$

В этом случае $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [a, t[^{\mathbb{N}}$ и $(\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in]t, b]^{\mathbb{N}}$, причем

$$\big((c_k)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big) \,\&\, \big((\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow t\big).$$

С учетом предложения 12.7 получаем, что

$$\big(\alpha_o \mathbf{X}_t^{(-)}(c_k) + (1-\alpha_o)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \in (\widehat{\mathfrak{Y}} - \mathrm{seq})[\mathbf{F}].$$

Кроме того, из предложения 8.5 имеем свойство сходимости

$$\Big(\mathfrak{I}\big(\alpha_o \mathbf{X}_t^{(-)}(c_k) + (1-\alpha_o)\mathbf{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_k)\big)\Big)_{k \in \mathbb{N}} \stackrel{\tau_\eta^o(\mathcal{A})}{\longrightarrow} \mu_o.$$

Два последних положения в сочетании с (3.3) и (5.45) доставляют свойство

$$\mu_o \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^o(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Поскольку выбор μ_o был произвольным, требуемое вложение (12.65) установлено. $\square$

Предложение 12.9. *Имеет место вложение*

$$\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}) \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta; (\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$. Тогда согласно (12.1)

$$\mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}] \tag{12.67}$$

и при этом имеет место включение

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i \, d\mu_o\Big)_{i\in\overline{1,n}} \in Y. \tag{12.68}$$

Из (12.66) следует, в частности, что (см. (5.46)) $\mu_o \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$, причем

$$\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a)\big) \vee \big(\exists\, t \in]a,b[:\ \mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t)\big) \vee \big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)\big). \tag{12.69}$$

Упомянутые три случая рассмотрим отдельно. Пусть сначала

1) $\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a)$. Тогда согласно (12.40), (12.68) $\mathcal{R}(\mu_o) = \rho_\downarrow(a)$, причем в силу (12.64) и (12.68) $\rho_\downarrow(a) \in Y$ по выбору μ_o. Тогда в силу (12.44)

$$\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Тем самым установлена импликация

$$\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a)\big) \Longrightarrow \big(\mu_o \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]\big). \tag{12.70}$$

2) Пусть для некоторого $t_* \in]a,b[$ имеет место включение

$$\mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t_*).$$

Получаем теперь (см. (12.68)) следующее свойство:

$$\mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t_*) :\ \mathcal{R}(\mu_o) \in Y.$$

Из предложения 12.8 имеем, что $\mu_o \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]$. Таким образом,

$$\big(\exists\, t \in]a,b[:\ \mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t_*)\big) \Longrightarrow \big(\mu_o \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]\big). \tag{12.71}$$

3) Пусть, наконец, $\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)$. Тогда из (12.31) имеем, что $\mathcal{R}(\mu_o) = \hat\rho_\uparrow(b)$, а тогда $\hat\rho_\uparrow(b) \in Y$ в силу (12.68) и, следовательно (см. (12.35)),

$$\mu_o = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b) \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

С учетом (12.69), (12.70) и (12.71) получаем теперь, что $\mu_o \in (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}]$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор (12.67) был произвольным, предложение доказано. $\square$

Теорема 12.1. *Имеет место следующая цепочка равенств:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}) = (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}] =$$

$$= (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{Y}] =$$

$$= (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^o_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \widehat{\mathfrak{Y}}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложениям 12.2 и 12.9

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}].$$

С учетом (11.15), (11.18) и (11.27) имеем теперь цепочку вложений

$$(\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset$$

$$\subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}];$$

как следствие, реализуется цепочка равенств

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] = \\ = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}].\end{gathered} \tag{12.72}$$

Используя (11.18) и (12.72), получаем, что

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] = \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$$

и, стало быть, имеем следующее равенство

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}]. \tag{12.73}$$

Из (12.72), (12.73) получаем совпадение всех четырех секвенциальных МП с $\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$. При этом (см. (11.14), (11.16), (12.72), (12.73))

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}],$$

что означает справедливость равенства

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^*(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{12.74}$$

Далее, отметим что, согласно (11.24) и (12.72), имеет место вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}).$$

С другой стороны, из (11.15) и (12.73) получаем вложение

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}].$$

В результате имеем следующее равенство

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}]. \tag{12.75}$$

Из (11.25) и (12.74) следует также вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}).$$

С другой стороны, из (11.14) и (12.72) вытекает, что

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}],$$

а потому имеем следующее равенство

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}) = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau_\eta^o(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]. \tag{12.76}$$

Из (12.72), (12.73)–(12.76) вытекает утверждение теоремы. □

Таким образом, $\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$ может рассматриваться в качестве весьма универсального МП в компакте (5.16). Данное (вспомогательное по смыслу) МП будем использовать в (3.5) для построения МП в конечномерном арифметическом пространстве.

§ 13. Множество притяжения в конечномерном пространстве; свойство асимптотической нечувствительности

Мы следуем обозначениям раздела 9, фиксируя $n \in \mathbb{N}$, $\pi_1 \in B(I,\mathcal{A}), \ldots, \pi_n \in B(I,\mathcal{A})$. Отображение Π (9.2) используем в качестве целевого, а $\widetilde{\Pi}$ (9.6) — в качестве его естественного продолжения, определяемого в (9.7). Поскольку каждое из семейств $\mathfrak{Y}$ и $\widehat{\mathfrak{Y}}$ обладает счетной базой, имеем

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = \bigcap_{\varepsilon\in\,]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\varepsilon),\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big), \tag{13.1}$$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}] = \bigcap_{\varepsilon\in\,]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\varepsilon),\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big), \tag{13.2}$$

(напомним, что $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ — обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$).

Теорема 13.1. *Имеет место следующая цепочка равенств*

$$\begin{gathered}\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}] = \\ = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = (\mathbf{sas})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}].\end{gathered} \tag{13.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что (см. раздел 9) $\widetilde{\Pi}$ есть непрерывное в смысле ТП $\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}),\tau^*_\eta(\mathcal{A})\big)$ и $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ отображение из $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^n$. Первое из упомянутых ТП — компакт (5.16), а второе — хаусдорфово ТП. Поэтому (см. (9.7)) согласно (3.5) $\forall \mathcal{E} \in \beta[\mathbf{F}]$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathcal{E}] = \widetilde{\Pi}^1\big((\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathcal{E}]\big). \tag{13.4}$$

С учетом (11.9) и (11.10) можно использовать (13.4) при $\mathcal{E} = \mathfrak{Y}$ и $\mathcal{E} = \widehat{\mathfrak{Y}}$, получая, что

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = \widetilde{\Pi}^1\big((\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\mathfrak{Y}]\big), \tag{13.5}$$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}] = \widetilde{\Pi}^1\big((\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A});\tau^*_\eta(\mathcal{A});\mathfrak{I};\widehat{\mathfrak{Y}}]\big). \tag{13.6}$$

Из теоремы 12.1, (13.5) и (13.6) получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\mathfrak{Y}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{R}^n;\tau_{\mathbb{R}}^{(n)};\Pi;\widehat{\mathfrak{Y}}] = \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{P}^o_\eta(\mathcal{A})\big). \tag{13.7}$$

Из (13.1), (13.2) и (13.7) вытекает, что справедливо (13.3). □

Таким образом, $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{P}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$ является универсальным МП в основной задаче о достижимости в конечномерном пространстве при ОАХ. Таким образом, задача о построении $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{P}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$ представляет не только теоретический, но и определенный практический интерес, если иметь в виду конструкции раздела 4, связанные с исследованием ОД линейных управляемых систем.

§ 14. Представление множества притяжения в конечномерном пространстве

В настоящем разделе осуществляется детальное исследование множества $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{P}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$. Данное исследование мотивируется теоремой 13.1. Будем использовать при этом (12.32) и следующее положение.

Предложение 14.1. *Если* $t \in\,]a,b[$ *и* $\alpha \in [0,1]$, *то*

$$\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \widetilde{P}^o_\eta(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\alpha\hat{\rho}_\uparrow(t) + (1-\alpha)\hat{\rho}_\downarrow(t) \in Y\big). \tag{14.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t \in\,]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$; пусть

$$\mu_o \stackrel{\triangle}{=} \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}). \tag{14.2}$$

Согласно (5.44) имеем с очевидностью, что

$$\mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t). \tag{14.3}$$

Из (5.45) и (14.3) следует, в частности, что

$$\mu_o \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}],$$

а тогда согласно (12.1), (12.2) имеем эквиваленцию

$$\big(\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{R}(\mu_o) \in Y\big); \tag{14.4}$$

напомним в связи с (14.4), что

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i\, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,n}}.$$

При этом в силу (14.2) и линейности интеграла при изменении к.-а. меры (см. [24, предложение 3.4.1]) имеем, что

$$\int_I \rho_j\, d\mu_o = \alpha \int_I \rho_j\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\int_I \rho_j\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \ \ \forall j \in \overline{1,N}.$$

Как следствие получаем следующее равенство

$$\Big(\int_I \rho_i\, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,N}} = \alpha \cdot \Big(\int_I \rho_i\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\Big)_{i \in \overline{1,N}} + (1-\alpha)\cdot\Big(\int_I \rho_i\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\Big)_{i \in \overline{1,N}}.$$

С учетом (12.31) и (12.53) получаем теперь, что

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i\, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,N}} = \alpha\hat{\rho}_\uparrow(t) + (1-\alpha)\hat{\rho}_\downarrow(t). \tag{14.5}$$

Тогда (см. (14.4), (14.5)) получаем следующее положение:

$$\big(\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\alpha\hat{\rho}_\uparrow(t) + (1-\alpha)\hat{\rho}_\downarrow(t) \in Y\big).$$

С учетом (14.2) получаем требуемую эквиваленцию (14.1). □

Заметим, что в силу (5.45), (5.46) при $t \in]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$

$$\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tag{14.6}$$

а потому корректно определяется вектор

$$\widetilde{\Pi}\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \Big(\int_I \pi_i\, d\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big)\Big)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n,$$

а также вектор $\alpha\overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 14.2. *Если $t \in]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$, то справедливо равенство*

$$\widetilde{\Pi}\big(\alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \alpha\overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t \in]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$. Тогда (см. (14.6))

$$\mu_o \triangleq \alpha\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}),$$

а тогда получаем, что

$$\widetilde{\Pi}(\mu_o) = \Big(\int_I \pi_i\, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n.$$

При этом по свойствам интеграла (см. [24, гл. 3]) имеем, что

$$\int_I \pi_j\, d\mu_o = \alpha \int_I \pi_j\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1-\alpha)\int_I \pi_j\, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \ \ \forall j \in \overline{1,N}.$$

Как следствие получаем (см. (9.6)), что справедливо равенство

$$\widetilde{\Pi}(\mu_o) = \alpha \cdot \Big(\int_I \pi_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \Big)_{i \in \overline{1,n}} + (1-\alpha) \cdot \Big(\int_I \pi_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \Big)_{i \in \overline{1,n}}. \tag{14.7}$$

Напомним, что, согласно (5.44), $\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)$ и $\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)$. Тогда определены $\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big)$ и $\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big)$, причем, согласно (9.6), (9.19) и (9.23),

$$\Big(\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\big) = \Big(\int_I \pi_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})\Big)_{i\in\overline{1,n}} = \overrightarrow{\pi}(t)\Big) \,\&\, \Big(\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\big) = \Big(\int_I \pi_i \, d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})\Big)_{i\in\overline{1,n}} = \overleftarrow{\pi}(t)\Big).$$

Из (14.7) получаем теперь очевидное равенство

$$\widetilde{\Pi}(\mu_o) = \alpha \overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t),$$

откуда по определению μ_o имеем требуемое утверждение. □

Полагаем в дальнейшем, что (см. определение раздела 2)

$$\Gamma \overset{\triangle}{=} \big\{ z \in]a,b[\times[0,1] \,|\, \mathrm{pr}_2(z)\hat{\rho}_\uparrow\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) + \big(1-\mathrm{pr}_2(z)\big)\hat{\rho}_\downarrow\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) \in Y \big\}. \tag{14.8}$$

Итак, $\Gamma \in \mathcal{P}(\,]a,b[\times[0,1])$, причем $\forall t \in]a,b[\ \ \forall \alpha \in [0,1]$

$$\big((t,\alpha)\in\Gamma\big) \Longleftrightarrow \big(\alpha\hat{\rho}_\uparrow(t) + (1-\alpha)\hat{\rho}_\downarrow(t) \in Y\big). \tag{14.9}$$

Последняя эквиваленция исчерпывающим образом характеризует множество Γ (14.8). Отметим в этой связи, что $\Gamma \subset]a,b[\times[0,1]$ и $\forall z \in \Gamma$

$$\big(\mathrm{pr}_1(z) \in]a,b[\big) \wedge \big(\mathrm{pr}_2(z) \in [0,1]\big).$$

Заметим далее, что (см. (14.8)) корректно определяется множество

$$\Gamma_o \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z)\overrightarrow{\pi}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) + (1-\mathrm{pr}_2(z))\overleftarrow{\pi}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) : \ z \in \Gamma\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n). \tag{14.10}$$

Итак, Γ_o (14.10) есть п/м $\mathbb{R}^n$ такое, что:

$1'$) при всяком выборе $t \in]a,b[$ и $\alpha \in [0,1]$ истинна импликация

$$\big((t,\alpha)\in\Gamma\big) \Longrightarrow \big(\alpha\overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t) \in \Gamma_o\big);$$

$2'$) для всякого $x \in \Gamma_o$ можно указать $\tau \in]a,b[$ и $\lambda \in [0,1]$, для которых

$$\big((\tau,\lambda)\in\Gamma\big) \,\&\, \big(\lambda\overrightarrow{\pi}(\tau) + (1-\lambda)\overleftarrow{\pi}(\tau) = x\big).$$

В $1'$), $2'$) полезно учитывать (14.9), что позволяет определить Γ_o явным образом в терминах

$$\pi_1, \ldots, \pi_n, \ \rho_1, \ldots, \rho_N, Y.$$

Предложение 14.3. *Имеет место вложение*

$$\Gamma_o \subset \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big). \tag{14.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\omega \in \Gamma_o$. Тогда, согласно $2'$), для некоторых $t_* \in]a,b[$ и $\alpha_* \in [0,1]$ получаем, что

$$(t_*, \alpha_*) \in \Gamma, \tag{14.12}$$

и, кроме того, справедливо равенство

$$\omega = \alpha_* \overrightarrow{\pi}(t_*) + (1-\alpha_*)\overleftarrow{\pi}(t_*). \tag{14.13}$$

Отметим, что, согласно (5.44), имеем

$$\mu_* \stackrel{\triangle}{=} \alpha_* \kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)}) + (1-\alpha_*)\kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t). \tag{14.14}$$

В частности, из (5.45) имеем с очевидностью, что $\mu_* \in \mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$ и, в частности (см. (5.46)), $\mu_* \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$. Тогда согласно (9.6) определяется вектор

$$u_* \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{\Pi}(\mu_*) = \Big(\int_I \pi_i \, d\mu_*\Big)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n.$$

Из (14.14) и предложения 14.1 вытекает, что истинна эквиваленция

$$\big(\mu_* \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \Longleftrightarrow \big(\alpha_* \hat{\rho}_\uparrow(t_*) + (1-\alpha_*)\hat{\rho}_\downarrow(t_*) \in Y\big). \tag{14.15}$$

Однако из (14.9) и (14.12) вытекает, что $\alpha_* \hat{\rho}_\uparrow(t_*) + (1-\alpha_*)\hat{\rho}_\downarrow(t_*) \in Y$, а потому, согласно (14.15), $\mu_* \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})$ и, как следствие,

$$u_* = \widetilde{\Pi}(\mu_*) \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big).$$

С другой стороны, из (14.14) и предложения 4.2 следует равенство

$$\widetilde{\Pi}(\mu_*) = \alpha_* \overrightarrow{\pi}(t_*) + (1-\alpha_*)\overleftarrow{\pi}(t_*)$$

и, как следствие (см. (14.13)), $\omega = \widetilde{\Pi}(\mu_*) = u_* \in \widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A})\big)$. Поскольку выбор ω был произвольным, (14.11) установлено. $\square$

Напомним (9.29), (9.30). Согласно (12.32)

$$\Big(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\Big) \Longleftrightarrow \big(\hat{\rho}_\uparrow(b) \in Y\big). \tag{14.16}$$

В свою очередь, из (12.41) вытекает, что

$$\Big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\Big) \Longleftrightarrow \big(\hat{\rho}_\downarrow(a) \in Y\big). \tag{14.17}$$

Тогда в силу (9.29) и (14.16) получаем импликацию

$$\big(\hat{\rho}_\uparrow(b) \in Y\big) \Longrightarrow \Big(\overrightarrow{\pi}(b) \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big)\Big). \tag{14.18}$$

Аналогичным образом, из (9.30) и (14.17) вытекает, что

$$\big(\hat{\rho}_\downarrow(a) \in Y\big) \Longrightarrow \Big(\overleftarrow{\pi}(a) \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big)\Big). \tag{14.19}$$

Теорема 14.1. *Множество* $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big)$ *допускает следующие представления:*
1) *если* $\hat{\rho}_\downarrow(a) \notin Y$ *и* $\hat{\rho}_\uparrow(b) \notin Y$, *то справедливо равенство*

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o;$$

2) *если* $\hat{\rho}_\downarrow(a) \notin Y$ *и* $\hat{\rho}_\uparrow(b) \in Y$, *то справедливо равенство*

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\};$$

3) *если* $\hat{\rho}_\downarrow(a) \in Y$ *и* $\hat{\rho}_\uparrow(b) \notin Y$, *то имеет место равенство*

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \{\overleftarrow{\pi}(a)\} \cup \Gamma_o;$$

4) *если* $\hat{\rho}_\downarrow(a) \in Y$ *и* $\hat{\rho}_\uparrow(b) \in Y$, *то справедливо равенство*

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай 1). Итак, $\hat{\rho}_{\downarrow}(a) \notin Y$ и $\hat{\rho}_{\uparrow}(b) \notin Y$. Выберем произвольно $v \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$, получая вектор $v \in \mathbb{R}^n$, допускающий для некоторой меры $\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$ представление

$$v = \widetilde{\Pi}(\mu_o). \tag{14.20}$$

Тогда $\mu_o \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$ и при этом справедливо включение

$$\mathcal{R}(\mu_o) = \Big(\int_I \rho_i \, d\mu_o\Big)_{i \in \overline{1,N}} \in Y. \tag{14.21}$$

При этом, согласно (5.45), имеем, что

$$\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \vee \Big(\mu_o \in \bigcup_{t \in \,]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t)\Big) \vee \big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big). \tag{14.22}$$

Отметим, что $\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_a^{+)})\big) \Rightarrow \big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$. С учетом (14.17) имеем, что

$$\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \Longrightarrow \big(\hat{\rho}_{\downarrow}(a) \in Y\big). \tag{14.23}$$

Однако в рассматриваемом сейчас случае $\big(\hat{\rho}_{\downarrow}(a) \notin Y\big)$, а потому (см. (14.23))

$$\mu_o \neq \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}). \tag{14.24}$$

Далее $\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_b^{-)})\big) \Rightarrow \big(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$. С учетом (14.16) получаем, следовательно, что

$$\big(\mu_o = \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big) \Longrightarrow \big(\hat{\rho}_{\uparrow}(b) \in Y\big). \tag{14.25}$$

Однако в рассматриваемом случае $\hat{\rho}_{\uparrow}(b) \notin Y$. Поэтому из (14.25) следует, что

$$\mu_o \neq \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}). \tag{14.26}$$

Из (14.22), (14.24) и (14.26) вытекает, что в «нашем» случае

$$\mu_o \in \bigcup_{t \in \,]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t).$$

Поэтому для некоторого $t_o \in]a,b[$ имеет место $\mu_o \in \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\, t_o)$ и, стало быть (см. (5.44)), для некоторого $\alpha_o \in [0,1]$

$$\mu_o = \alpha_o \kappa(\mathcal{U}_{t_o}^{(-)}) + (1-\alpha_o)\kappa(\mathcal{U}_{t_o}^{(+)}). \tag{14.27}$$

Соответственно, $z_o \stackrel{\triangle}{=} (t_o, \alpha_o) \in]a,b[\times[0,1]$, причем, согласно (14.9),

$$(z_o \in \Gamma) \Longleftrightarrow \big(\alpha_o \hat{\rho}_{\uparrow}(t_o) + (1-\alpha_o)\hat{\rho}_{\downarrow}(t_o) \in Y\big). \tag{14.28}$$

Отметим, что в силу (14.27) справедливо включение

$$\alpha_o \kappa(\mathcal{U}_{t_o}^{(-)}) + (1-\alpha_o)\kappa(\mathcal{U}_{t_o}^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}). \tag{14.29}$$

С учетом предложения 14.1 получаем, следовательно, что

$$\alpha_o \hat{\rho}_{\uparrow}(t_o) + (1-\alpha_o)\hat{\rho}_{\downarrow}(t_o) \in Y.$$

Тогда (см. (14.28)) $z_o \in \Gamma$ и, согласно $1'$),

$$\alpha_o \overrightarrow{\pi}(t_o) + (1-\alpha_o)\overleftarrow{\pi}(t_o) \in \Gamma_o.$$

Отметим, что в силу предложения 14.2 и (14.27)

$$\widetilde{\Pi}(\mu_o) = \alpha_o \overrightarrow{\pi}(t_o) + (1-\alpha_o)\overleftarrow{\pi}(t_o),$$

а потому (см. (14.20)) $v = \alpha_o \overrightarrow{\pi}(t_o) + (1-\alpha_o)\overleftarrow{\pi}(t_o)$ и, следовательно,

$$v \in \Gamma_o. \tag{14.30}$$

Поскольку выбор v был произвольным, из (14.30) следует, что

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) \subset \Gamma_o.$$

С учетом предложения 14.3 имеем следующее равенство

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o$$

в рассматриваемом случае 1). Итак, установлена импликация

$$\Big(\big(\hat{\rho}_\downarrow(a) \notin Y\big) \,\&\, \big(\hat{\rho}_\uparrow(b) \notin Y\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o\Big). \tag{14.31}$$

Рассмотрим случай 2). Итак, полагаем, что

$$\big(\hat{\rho}_\downarrow(a) \notin Y\big) \,\&\, \big(\hat{\rho}_\uparrow(b) \in Y\big). \tag{14.32}$$

Заметим сразу, что из (14.18) и (14.32) вытекает включение

$$\overrightarrow{\pi}(b) \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),$$

а тогда с учетом предложения 14.3 имеем вложение

$$\Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\} \subset \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big). \tag{14.33}$$

Выберем теперь произвольно вектор $v_* \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$, после чего подберем к.-а. меру $\mu_* \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$, для которой

$$v_* = \widetilde{\Pi}(\mu_*). \tag{14.34}$$

Тогда, согласно (12.1), имеем, в частности, включение

$$\mu_* = \mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}]. \tag{14.35}$$

Кроме того, по выбору μ_* имеем очевидное включение

$$\mathcal{R}(\mu_*) \in Y. \tag{14.36}$$

Заметим, что из (5.46) и (14.35) следует, конечно, что

$$\mu_* \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}).$$

При этом, согласно (5.45), (14.35), имеем, что

$$\big(\mu_* = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \vee \Big(\mu_* \in \bigcup_{t \in]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t)\Big) \vee \big(\mu_* = \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big). \tag{14.37}$$

При этом $\big(\mu_* = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \Rightarrow \big(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$. Поэтому (см. (14.17))

$$\big(\mu_* = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \Longrightarrow \big(\hat{\rho}_\downarrow(a) \in Y\big). \tag{14.38}$$

С учетом (14.32) и (14.38) имеем теперь с очевидностью, что

$$\mu_* \neq \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}). \tag{14.39}$$

Возможность $\mu_* \in \bigcup\limits_{t\in\,]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t)$ исследуется аналогично случаю 1). При этом

$$\big(\mu_* \in \bigcup_{t\in\,]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t)\big) \Longrightarrow (v_* \in \Gamma_o). \tag{14.40}$$

Пусть, наконец, $\mu_* = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)$. Тогда $\kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$. Получили (см. (14.34)) равенство

$$v_* = \widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)\big), \tag{14.41}$$

где в силу (9.19) $\widetilde{\Pi}\big(\kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)\big) = \overrightarrow{\pi}(b)$. Стало быть, $v_* = \overrightarrow{\pi}(b)$. Итак,

$$\big(\mu_* = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)\big) \Longrightarrow \big(v_* \in \{\overrightarrow{\pi}(b)\}\big). \tag{14.42}$$

Из (14.37), (14.39), (14.40) и (14.42) получаем включение $v_* \in \Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\}$, чем и завершается проверка вложения

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) \subset \Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\},$$

которое в сочетании с (14.33) приводит к равенству

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\} \tag{14.43}$$

в случае 2). Тем самым (см. (14.32), (14.43)) установлена импликация

$$\Big(\big(\hat\rho_\downarrow(a) \notin Y\big) \,\&\, \big(\hat\rho_\uparrow(b) \in Y\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overrightarrow{\pi}(b)\}\Big). \tag{14.44}$$

По аналогии с обоснованием (14.44) устанавливается импликация

$$\Big(\big(\hat\rho_\downarrow(a) \in Y\big) \,\&\, \big(\hat\rho_\uparrow(b) \notin Y\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big) = \{\overleftarrow{\pi}(a)\} \cup \Gamma_o\Big); \tag{14.45}$$

иными словами, положение 3) установлено.

Рассмотрим обоснование положения 4). Итак, пусть

$$\big(\big(\hat\rho_\downarrow(a) \in Y\big) \,\&\, \big(\hat\rho_\uparrow(b) \in Y\big). \tag{14.46}$$

Учитываем предложение 14.3. Кроме того, из (14.18), (14.19) и (14.46) вытекает, что

$$\{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\} \subset \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big).$$

Тогда (см. предложение 14.3) имеем очевидное вложение

$$\Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\} \subset \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big). \tag{14.47}$$

Выберем произвольно $w \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$. Тогда для некоторой к.-а. меры $\mu^o \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$

$$w = \widetilde{\Pi}(\mu^o). \tag{14.48}$$

Тогда, согласно (12.1), (12.2), имеем, что

$$\mu^o \in \mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}] \tag{14.49}$$

и при этом $\mathcal{R}(\mu^o) \in Y$. Из (5.45) и (14.49) вытекает, что

$$\big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a)\big) \vee \big(\mu^o \in \bigcup_{t\in]a,b[} \mathbb{P}^o_\eta(\mathcal{A}|\,t)\big) \vee \big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}^{(-)}_b)\big). \tag{14.50}$$

С учетом (14.17) и (14.46) имеем, что

$$\kappa(\mathcal{U}^{(+)}_a) \in \widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A}). \tag{14.51}$$

Аналогичным образом из (14.16) и (14.46) вытекает включение

$$\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}) \in \widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A}). \tag{14.52}$$

Используя (9.23), получаем, что

$$\big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \Longrightarrow \big(\widetilde{\Pi}(\mu^o) = \overleftarrow{\pi}(a)\big).$$

Как следствие (см. (14.48)), получаем, что

$$\big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}_a^{(+)})\big) \Longrightarrow \big(w = \overleftarrow{\pi}(a)\big). \tag{14.53}$$

Далее из (9.19) имеем следующую импликацию

$$\big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big) \Longrightarrow \big(\widetilde{\Pi}(\mu^o) = \overrightarrow{\pi}(b)\big).$$

С учетом (14.48) имеем, как следствие, что

$$\big(\mu^o = \kappa(\mathcal{U}_b^{(-)})\big) \Longrightarrow \big(w = \overrightarrow{\pi}(b)\big). \tag{14.54}$$

Если же $\mu^o \in \bigcup\limits_{t \in]a,b[} \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)$, то подобно обоснованию (14.30) получаем, что $w \in \Gamma_o$. Итак,

$$\Big(\mu^o \in \bigcup_{t \in]a,b[} \mathbb{P}_\eta^o(\mathcal{A}|\, t)\Big) \Longrightarrow (w \in \Gamma_o). \tag{14.55}$$

Из (14.50), (14.53)–(14.55) получаем окончательно, что

$$w \in \Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\}.$$

Поскольку выбор w был произвольным, установлено вложение

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) \subset \Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\},$$

что с учетом (14.47) означает справедливость равенства

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\}$$

при условиях (14.46). Таким образом, и положение 4) установлено, то есть

$$\Big(\big(\hat\rho_\downarrow(a) \in Y\big) \,\&\, \big(\hat\rho_\uparrow(b) \in Y\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big) = \Gamma_o \cup \{\overleftarrow{\pi}(a); \overrightarrow{\pi}(b)\}\Big). \tag{14.56}$$

Из (14.31), (14.44), (14.45) и (14.56) вытекает утверждение теоремы. □

Итак, универсальное (см. теорему 13.1) МП в $\mathbb{R}^n$ допускает исчерпывающее описание в терминах односторонних пределов ярусных функций $\pi_1, \ldots, \pi_n,\ \rho_1, \ldots, \rho_N$. Данное утверждение (теорема 14.1) подобна в смысловом отношении теореме 9.2, но касается более сложной системы ограничений.

§ 15. Добавление: свойство асимптотической нечувствительности в «окрестностной» форме

В настоящем разделе мы возвращаемся к теореме 13.1. Рассмотрим простые следствия этого утверждения, связанные, с одной стороны, с вопросом реализации МП $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big)$ с точностью до любой наперед выбранной окрестности, и, с другой, — с представлением свойства асимптотической нечувствительности (см. (13.3)) в терминах окрестностей. В этой связи напомним прежде всего, что универсальное относительно ОАХ $\mathfrak{Y}$ и $\widehat{\mathfrak{Y}}$ МП $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta^o(\mathcal{A})\big)$ есть компактное в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ множество, поскольку данное МП является непрерывным образом компактного множества в $\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}),\tau^*_\eta(\mathcal{A})\big)$ (точнее, речь идет о множестве $\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})$, которое является в силу теоремы 12.1 замкнутым п/м компакта).

В пространстве $\mathbb{R}^n$ будем использовать, конечно, полноразмерные окрестности множеств: если $H\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$, то

$$\mathbb{O}(H,\varepsilon)\overset{\triangle}{=}\{(z_i)_{i\in\overline{1,n}}\in\mathbb{R}^n\,|\,\exists\,(h_i)_{i\in\overline{1,n}}\in H:\,|z_j-h_j|<\varepsilon\ \ \forall j\in\overline{1,n}\}\tag{15.1}$$

(подчеркнем, что множество (15.1) определено и при $H=\varnothing$). Разумеется, (15.1) есть открытая ε-окрестность H в нормированном пространстве. Отметим следующее простое, но полезное

Предложение 15.1. *Если* $\xi\in]0,\infty[$, *то*

$$\exists\,\varepsilon\in]0,\infty[:\ \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)\subset\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\tau^{n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big)\ \ \forall\delta\in]0,\varepsilon[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним прежде всего, что, согласно (3.2), (11.9) и теореме 13.1, справедливо равенство

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)=\bigcap_{\zeta\in]0,\infty[}\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\zeta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)=\bigcap_{\zeta\in]0,\infty[}\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\zeta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big).\tag{15.2}$$

При этом $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta(\mathcal{A})\big)$ есть множество, компактное в $(\mathbb{R}^n,\tau^{(n)}_{\mathbb{R}})$ как непрерывный образ компакта. Заметим, что при $\delta\in]0,\infty[$, согласно (5.19) и (9.7),

$$\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta)=\widetilde{\Pi}^1\big(\mathfrak{I}^1(\mathbb{Y}_\delta)\big)\subset\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big),$$

откуда в силу замкнутости $\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big)$ вытекает, что

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big).\tag{15.3}$$

Из (15.3) следует, что все множества $\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)$, $\delta\in]0,\infty[$, компактны в $(\mathbb{R}^n,\tau^{(n)}_{\mathbb{R}})$.

Пусть теперь $\xi\in]0,\infty[$. Тогда в виде множества $\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big)\in\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ имеем открытую окрестность $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$, так как

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)\subset\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big).\tag{15.4}$$

Согласно (15.2) и (15.4) имеем следующее свойство:

$$\bigcap_{H\in\mathfrak{Y}}\mathrm{cl}\big(\Pi^1(H),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)=\bigcap_{\zeta\in]0,\infty[}\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\zeta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big),$$

где $\mathfrak{B}\overset{\triangle}{=}\{\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\zeta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big):\ \zeta\in]0,\infty[\}\in\beta(\mathbb{R}^n)$, причем все множества из $\mathfrak{B}$ компактны в $(\mathbb{R}^n,\tau^{(n)}_{\mathbb{R}})$ и, в частности, все они замкнуты в смысле $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$. Но в этом случае [6, следствие 3.1.5] для некоторого $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$

$$\mathbf{B}\subset\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big).\tag{15.5}$$

(см. также [17, теорема 3.6.1]). Пусть $\vartheta\in]0,\infty[$ таково, что

$$\mathbf{B}=\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\vartheta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big).$$

Тогда из (11.6)–(11.8) и (15.5) получаем, что $\forall\delta\in]0,\vartheta[$

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset\mathbf{B}\subset\mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\xi\Big).\tag{15.6}$$

Из (15.2) и (15.6) получаем требуемое утверждение. □

Итак, множество $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$ (универсальное МП; см. теорему 13.1) с любой степенью точности приближается «реальными» множествами достижимости $\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta)$, $\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta)$ при выборе достаточно малого значения δ, $\delta > 0$. Данное свойство имеет определенное практическое значение (см. раздел 4): в постановке, ориентированной на задачи управления, мы получаем, что «реальные» ОД (то есть ОД в классе обычных управлений) притягиваются к $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$.

Предложение 15.2. *Если* $\xi \in]0,\infty[$, *то непременно*

$$\exists\,\varepsilon \in]0,\infty[:\ \Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta) \subset \Pi^1(\mathbb{Y}_\delta) \subset \mathbb{O}\big(\widehat{\Pi}^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\xi\big)\ \ \forall \delta \in]0,\varepsilon[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитываем (11.7), (11.8), (11.11). Фиксируем $\xi \in]0,\infty[$, после чего подберем с учетом предложения 15.1 число $\varepsilon_o \in]0,\infty[$ так, что при этом

$$\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)\subset \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbb{Y}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset \mathbb{O}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big),\frac{\xi}{2}\Big)\ \ \forall \delta \in]0,\varepsilon_o[. \tag{15.7}$$

Пусть $\delta_o \in]0,\varepsilon_o[$. Выберем произвольно

$$z_o \in \Pi^1(\mathbb{Y}_{\delta_o}).$$

Теперь, используя (15.7), подберем $y_o \in \widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)$, для которого (см. (15.1))

$$|y_o(j) - z_o(j)| < \frac{\xi}{2}\ \ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{15.8}$$

При этом $\widetilde{\Pi}^1\big(\widetilde{\mathbb{P}}^o_\eta(\mathcal{A})\big)\subset \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o}),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)$ в силу (13.2) и теоремы 13.1. Поэтому

$$y_o \in \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big),$$

а потому для некоторого $y^o \in \Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o})$ имеем, что

$$|y^o(j) - y_o(j)| < \frac{\xi}{2}\ \ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{15.9}$$

Из (15.8) и (15.9) вытекает, что $|y^o(j) - z_o(j)| < \xi\ \ \forall j \in \overline{1,n}$. Получили, что (см. (15.1)) $z_o \in \mathbb{O}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o}),\xi\big)$. Поскольку выбор z_o был произвольным, установлено, что

$$\Pi^1(\mathbb{Y}_{\delta_o}) \subset \mathbb{O}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o}),\xi\big). \tag{15.10}$$

С учетом (11.11) и (15.10) получаем цепочку вложений

$$\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o}) \subset \Pi^1(\mathbb{Y}_{\delta_o}) \subset \mathbb{O}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_{\delta_o}),\xi\big).$$

Поскольку выбор δ_o был произвольным, установлено, что

$$\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta) \subset \Pi^1(\mathbb{Y}_\delta) \subset \mathbb{O}\big(\Pi^1(\widehat{\mathbb{Y}}_\delta),\xi\big)\ \ \forall \delta \in]0,\varepsilon_o[.$$

Требуемое утверждение установлено. □

Предложение 15.2 определяет свойство асимптотической нечувствительности в «окрестностной» форме, а точнее, в форме вилки, характеризующей близость «реальных» множеств достижимости для двух вариантов ослабления ограничений моментного характера.

Отметим, что свойство, подобное рассматриваемому в предложении 15.2, имеет место и для ОАХ в виде семейства $\widetilde{\mathfrak{F}}$: справедливо следующее

Предложение 15.3. *Если* $\xi \in]0,\infty[$, *то*

$$\exists\,\varepsilon \in]0,\infty[:\ \widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}]) \subset \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big)\subset \mathbb{O}\big(\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}]),\xi\big)\ \ \forall \delta \in]0,\varepsilon[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитываем (9.4): при $\delta \in]0,\infty[$

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}]) \subset \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\delta),\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}\big) \tag{15.11}$$

(см. теорему 9.1). При этом с учетом (9.7) имеем также, что

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) = \mathrm{cl}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F}_\delta)\big), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\Big) \subset \mathrm{cl}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\mathfrak{I}^1(\mathbf{F})\big), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\Big) \subset \mathrm{cl}\Big(\widetilde{\Pi}^1\big(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})\big), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\Big), \qquad (15.12)$$

где последнее (в (15.12)) множество компактно в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ как непрерывный образ компакта. Следовательно, все множества

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big), \quad \delta \in]0, \infty[, \qquad (15.13)$$

компактны в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$. Напомним, что $\xi \in]0, \infty[$, то есть $\xi \in \mathbb{R}$ и $0 < \xi$. Тогда, согласно (15.1),

$$\mathbb{O}\big(\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]), \xi\big) = \{(z_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, (h_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) : \, |z_j - h_j| < \xi \ \ \forall j \in \overline{1,N}\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}, \qquad (15.14)$$

и при этом (см. (9.4), теорему 9.1) имеет место следующее вложение

$$\bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) \subset \mathbb{O}\big(\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]), \xi\big). \qquad (15.15)$$

Тогда, поскольку все множества (15.13) замкнуты в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, имеем (см. (7.5)) из (15.14), (15.15), что для некоторого $\varepsilon_o \in]0, \infty[$ непременно

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_{\varepsilon_o}), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) \subset \mathbb{O}\big(\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]), \xi\big).$$

Но в этом случае с учетом (7.3) получаем, что

$$\mathrm{cl}\big(\Pi^1(\mathbf{F}_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) \subset \mathbb{O}\big(\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]), \xi\big) \ \ \forall \delta \in]0, \varepsilon_o[.$$

С учетом (15.11) получаем требуемое утверждение. $\square$

Заметим, кстати, что в силу (5.45) $\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) \neq \varnothing$ и, поскольку (см. (7.9), теорему 8.1) $\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]$ замкнуто в компакте (5.16), то (в силу непрерывности $\widetilde{\Pi}$ в смысле ТП (5.16) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$)

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^o[\mathcal{A}]) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^n].$$

Г л а в а 4.
МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ: УПРАВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ

§ 16. Введение

В настоящей главе рассматривается простейший модельный пример механической системы, для которого иллюстрируются конструкции предыдущих разделов: исследуется задача управления материальной точкой, для которой запрограммированы закон изменения массы и закон изменения ориентации двигателя. Возможности выбора управления касаются изменения силы тяги, причем постулируется требование полного расходования топлива. Наконец, мы будем стремиться к осуществлению режима «узких» импульсов, естественного для задач импульсного управления. Приводимые ниже построения соответствуют в идейном отношении разделу 4 с одним несущественным отличием: мы не используем далее линейное преобразование [21, с. 160], предпочитая рассматривать исходное уравнение материальной точки в нормальной форме, что представляется вполне естественным для данного простейшего типа задачи управления.

Отдельно будет рассматриваться конкретизация теоремы 9.2, имеющая смысл построения асимптотического аналога области достижимости в режиме «узких» импульсов, и более сложный вариант построения МП, отвечающий теореме 14.1.

§ 17. Управление в режиме узких импульсов

Без потери общности будем рассматривать движение материальной точки на промежутке времени [0,1]. С учетом этого полагаем в дальнейшем $a = 0$ и $b = 1$, получая равенство (см. (4.1))

$$I = [0, 1]. \tag{17.1}$$

Рассматривается управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) = \mathbf{b}(t) f(t), \end{cases} \tag{17.2}$$

где вещественнозначная функция $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\cdot)$, определенная на отрезке I, задана, а управление $f \in \mathbf{F}$ подлежит выбору с соблюдением тех или иных условий. Мы полагаем, что $\mathbf{b} \in B(I, \mathcal{A})$. Изменение $\mathbf{b}(t)$ при $t \in I$ может быть связано, с одной стороны, с заданным заранее изменением массы управляемого объекта, а с другой, — с программой реверсирования двигателя. Полагаем также заданными значения $x_{0,1} \in \mathbb{R}$ и $x_{0,2} \in \mathbb{R}$, определяющие вектор $x_0 = (x_{0,j})_{j \in \overline{1,2}} \in \mathbb{R}^2$ начальных условий. Тогда траектория системы (17.2) («скалярной» материальной точки) имеет следующий вид: при $t \in I$

$$x_1(t) = x_{0,1} + t x_{0,2} + \int_0^t (t - \xi) \mathbf{b}(\xi) f(\xi) \eta(d\xi), \tag{17.3}$$

$$x_2(t) = x_{0,2} + \int_0^t \mathbf{b}(\xi) f(\xi) \eta(d\xi). \tag{17.4}$$

В (17.3), (17.4) используем η-интегралы соответствующих ярусных функций, что, как легко видеть, вполне согласуется с конструкциями раздела 4.

Сначала рассмотрим конструкцию режима «узких» импульсов, полагая $t = 1$ в (17.3), (17.4). Тогда действие управления $f \in \mathbf{F}$ приводит к реализации терминального состояния

$$x_1(1) = x_{0,1} + x_{0,2} + \int_0^1 (1 - \xi) \mathbf{b}(\xi) f(\xi) \eta(d\xi), \tag{17.5}$$

$$x_2(1) = x_{0,2} + \int_0^1 \mathbf{b}(\xi) f(\xi) \eta(d\xi). \tag{17.6}$$

В представлении (17.5), (17.6) зависимость (терминального) состояния в конечный момент времени от управления из $\mathbf{F}$ полностью определяется вектором с координатами

$$\int_I (1-\xi)\mathbf{b}(\xi)f(\xi)\eta(d\xi) \in \mathbb{R}, \tag{17.7}$$

$$\int_I \mathbf{b}(\xi)f(\xi)\eta(d\xi) \in \mathbb{R}. \tag{17.8}$$

В этой связи, следуя подходу раздела 4, будем исследовать только поведение упомянутых векторов, что, кстати, соответствует тому случаю, когда в (17.5), (17.6) $x_{0,1} = x_{0,2} = 0$, то есть случаю, когда в начальный момент материальная точка покоится в начале координат.

Итак, в дальнейшем $n = 2$. Мы определяем здесь функции

$$\pi_1 : I \to \mathbb{R},\ \pi_2 : I \to \mathbb{R} \tag{17.9}$$

посредством следующих условий: если $t \in I$, то

$$\pi_1(t) \stackrel{\triangle}{=} (1-t)\mathbf{b}(t),\ \pi_2(t) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{b}(t). \tag{17.10}$$

Разумеется, при условиях (17.10) имеем свойства

$$\pi_1 \in B(I, \mathcal{A}),\ \pi_2 \in B(I, \mathcal{A}). \tag{17.11}$$

В терминах (17.10), (17.11) определен конкретный вариант отображения Π (9.2), (9.3), а также МП в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ на значениях Π. Для конкретного представления данного МП важно построить множество-образ $\widetilde{\Pi}^1(\mathbf{P}_\eta^\circ[\mathcal{A}])$, где отображение $\widetilde{\Pi}$ определено в (9.5), (9.6); разумеется, при этом следует использовать конкретизацию (17.10). Теорема 9.2 доставляет в условиях (17.10) конкретное представление упомянутого МП. В этом представлении существенно используются отображения:

$$\overrightarrow{\pi} :]0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \overleftarrow{\pi} : [0,1[\to \mathbb{R}^2. \tag{17.12}$$

В связи с вопросами конкретизации вектор-функций (17.12) отметим, что по выбору $\mathbf{b}$ определены значения

$$(\lim_{\theta\downarrow t} \mathbf{b}(\theta) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1[) \ \&\ (\lim_{\theta\uparrow t} \mathbf{b}(\theta) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in]0,1]).$$

В силу (17.1) и непрерывности функции $\tau \mapsto 1-\tau : I \to I$ имеем следующие очевидные свойства:

$$\left(\lim_{\theta\uparrow t} \pi_1(t) = (1-t)\lim_{\theta\uparrow t} \mathbf{b}(\theta) \quad \forall t \in]0,1]\right) \ \&\ \left(\lim_{\theta\downarrow t} \pi_1(t) = (1-t)\lim_{\theta\downarrow t} \mathbf{b}(\theta) \quad \forall t \in [0,1[\right). \tag{17.13}$$

Таким образом, при всяком выборе $t \in]0,1]$ мы в виде $\overrightarrow{\pi}(t) \in \mathbb{R}^2$ имеем вектор, получающийся произведением скаляра

$$\lim_{\theta\uparrow t} \mathbf{b}(\theta) \in \mathbb{R}$$

на вектор из $\mathbb{R}^2$, имеющий координаты $1-t$ и 1 соответственно. Аналогичным образом, при $t \in [0,1[$ в виде $\overleftarrow{\pi}(t) \in \mathbb{R}^2$ имеем вектор, получающийся произведением скаляра

$$\lim_{\theta\downarrow t} \mathbf{b}(\theta) \in \mathbb{R}$$

на аналогичный плоский вектор с координатами $1-t$ и 1.

С учетом вышеупомянутых соображений введем в рассмотрение отображение

$$\mathbf{p} :]0,1] \to \mathbb{R}^2$$

посредством следующего правила: $\forall t \in]0,1]$

$$(\mathbf{p}(t)(1) \stackrel{\triangle}{=} 1-t) \ \&\ (\mathbf{p}(t)(2) \stackrel{\triangle}{=} 1).$$

Тогда, как легко видеть, связь функций $\overrightarrow{\pi}$ и $\mathbf{p}$ определяется условиями

$$\overrightarrow{\pi}(t) = \lim_{\theta\uparrow t} \mathbf{b}(\theta)\mathbf{p}(t) \quad \forall t \in]0,1]. \tag{17.14}$$

Аналогичным образом, вектор-функцию

$$\mathbf{q} : [0,1[\to \mathbb{R}^2$$

определяем посредством следующего правила: $\forall t \in [0,1[$

$$(\mathbf{q}(t)(1) \stackrel{\triangle}{=} 1-t) \ \& \ (\mathbf{q}(t)(2) \stackrel{\triangle}{=} 1). \tag{17.15}$$

Тогда функции $\overleftarrow{\pi}$ и $\mathbf{q}$ связаны соотношениями

$$\overleftarrow{\pi}(t) = \lim_{\theta\downarrow t} \mathbf{b}(t)\mathbf{q}(t) \quad \forall t \in [0,1[. \tag{17.16}$$

Теперь с учетом (17.14), (17.16) и теоремы 9.2 получаем, что

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbf{P}^{\circ}_{\eta}[\mathcal{A}]) = \left(\bigcup_{t\in]0,1[} \left[\lim_{\theta\uparrow t} \mathbf{b}(\theta)\cdot\mathbf{p}(t);\ \lim_{\theta\downarrow t} \mathbf{b}(\theta)\cdot\mathbf{q}(t)\right]_2\right) \bigcup \\ \bigcup \left\{\lim_{\theta\downarrow 0} \mathbf{b}(\theta)\cdot\mathbf{q}(0);\ \lim_{\theta\uparrow 1} \mathbf{b}(\theta)\cdot\mathbf{p}(1)\right\} \tag{17.17}$$

где $\mathbf{p}(1) \in \mathbb{R}^2$ есть вектор с компонентами 0 и 1, а $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^2$ — вектор, у которого обе координаты совпадают с 1. Итак, построение МП (17.17) сводится к определению односторонних пределов $\mathbf{b}$.

§ 18. Частный случай: функция b с одним переключением

В данном разделе рассмотрим следующий простейший случай задачи управления материальной точкой (17.2): задан момент времени $t_0 \in]0,1[$, функция $\mathbf{b}$ кусочно постоянна и непрерывна справа, имеет одну точку разрыва t_0:

$$\mathbf{b} = b_1\chi_{[0,t_0[} + b_2\chi_{[t_0,1]}, \tag{18.1}$$

где $b_1 \in \mathbb{R}, b_2 \in \mathbb{R}$ и $0 < b_1 < b_2$. Как уже отмечалось, рассматриваем систему на единичном отрезке времени $I = [0,1]$. В начальный момент времени система находилась в начале координат $x(0) = (0,0)$. Тогда значения функций π_1, π_2 принимают следующий вид: при $t \in I$

$$\pi_1(t) = (1-t)\mathbf{b}(t), \\ \pi_2(t) = \mathbf{b}(t). \tag{18.2}$$

Рассмотрим МП, определяемое с использованием теоремы 9.2 в условиях данной задачи:

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}^o_{\eta}[\mathcal{A}]) = \Big(\bigcup_{t\in]0,1[} [\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_2\Big) \cup \{\overleftarrow{\pi}(0); \overrightarrow{\pi}(1)\},$$

где $[\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_2 = \{\alpha\overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t) : \alpha \in [0,1]\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^2) \ \forall t \in]0,1[$. Напомним определение $\overrightarrow{\pi}(t), \overleftarrow{\pi}(t)$:

$$\overrightarrow{\pi}(t) \stackrel{\triangle}{=} \big(\lim_{\theta\uparrow t} \pi_i(\theta)\big)_{i\in\overline{1,2}} \quad \forall t \in]0,1],$$

$$\overleftarrow{\pi}(t) \stackrel{\triangle}{=} \big(\lim_{\theta\downarrow t} \pi_i(\theta)\big)_{i\in\overline{1,2}} \quad \forall t \in [0,1[.$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\overline{\pi} : I \to \mathbb{R}^2$, полагая при $t \in I$, что

$$\overline{\pi}(t) = (\pi_i(t))_{i\in\overline{1,2}}\,. \tag{18.3}$$

Тогда, как легко видеть, $\overrightarrow{\pi}(t) = \overline{\pi}(t)$ при $t \in]0,1[\setminus \{t_0\}$ (совпадение в точках непрерывности $\mathbf{b}$ из интервала $]0,1[$); $\overrightarrow{\pi}(t_0)$ совпадает с левосторонним пределом вектор функции $\overline{\pi}(t)$ в точке t_0, обозначаемом для краткости через $\overline{\pi}(t_0-0)$. Итак,

$$\overrightarrow{\pi}(t) = \begin{cases} \overline{\pi}(t) & \forall t \in \,]0,1] \setminus \{t_0\}, \\ \overline{\pi}(t_0-0) & t = t_0. \end{cases} \tag{18.4}$$

Вектор $\overleftarrow{\pi}(t)$ будет совпадать с $\overline{\pi}(t)$ на $[0,1[$:

$$\overleftarrow{\pi}(t) = \overline{\pi}(t) \;\forall t \in \; [0,1[. \tag{18.5}$$

Приведем конкретизацию множества $[\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_2$ во внутренних точках отрезка $I = [0,1]$, пользуясь (18.4), (18.5):

$$[\overrightarrow{\pi}(t); \overleftarrow{\pi}(t)]_2 = \begin{cases} \{\overline{\pi}(t)\} & t \in \,]0,1[\setminus \{t_0\} \\ \{\alpha \overrightarrow{\pi}(t_0) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t_0) : \alpha \in [0,1]\} & t = t_0 \end{cases} \tag{18.6}$$

Определяя значения $\overleftarrow{\pi}(0)$ и $\overrightarrow{\pi}(1)$, заметим, что коль скоро точка t_0 является внутренней, то

$$\overleftarrow{\pi}(0) = \overline{\pi}(0) = (\mathbf{b}(0), \mathbf{b}(0)) = (b_1, b_1), \tag{18.7}$$

$$\overrightarrow{\pi}(1) = \overline{\pi}(1) = (0, \mathbf{b}(1)) = (0, b_2). \tag{18.8}$$

Перейдем к построению МП: из теоремы 9.2 следует, что

$$\widetilde{\Pi}^1(\mathbb{P}^o_\eta[\mathcal{A}]) = \left(\bigcup_{t \in \;]0,1[\setminus \{t_0\}} \{\overline{\pi}(t)\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \overrightarrow{\pi}(t_0) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t_0)\} \right) \bigcup \{(b_1,b_1)\} \bigcup \{(0,b_2)\} \tag{18.9}$$

Проведем численное построение МП для различных значений постоянных b_1, b_2, t_0. Данное построение было проведено с использованием пакета MATLAB. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i3, объемом ОЗУ 4 гБ с установленной операционной системой Windows 8.1 Профессиональная x64. Итак, упомянутое МП имеет следующий вид (ниже приводится графическая иллюстрация вычислительного эксперимента с указанием соответствующих значений параметров):

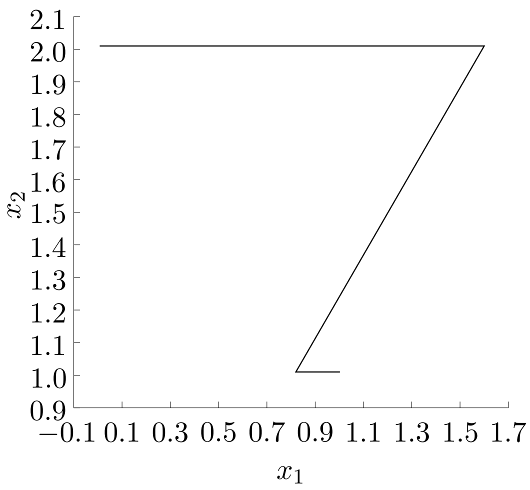

Рис. 1. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.2$

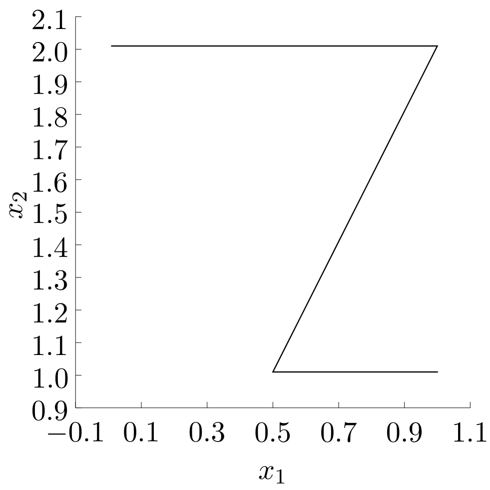

Рис. 2. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.5$

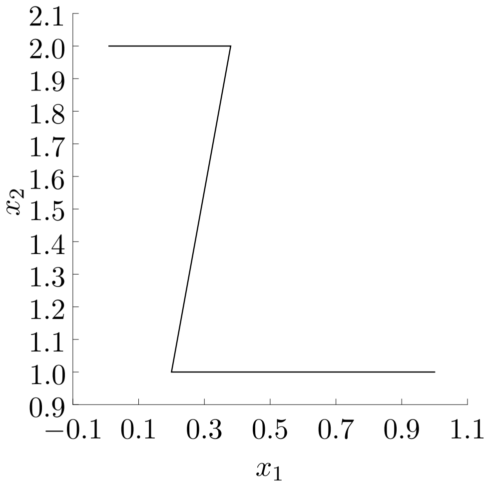

Рис. 3. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.8$

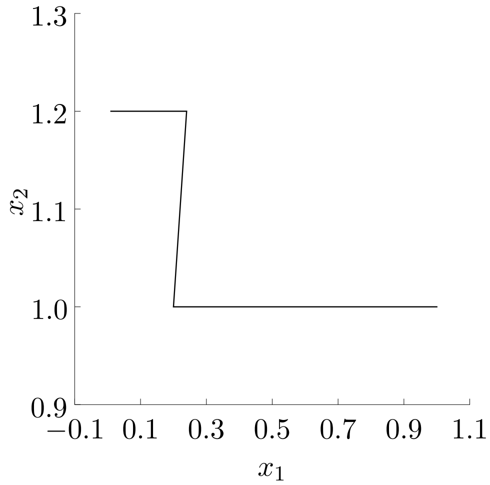

Рис. 4. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 1.2$, $t_0 = 0.8$

§ 19. Частный случай задачи с Y-ограничением: функция $\mathbf{b}$ с одним переключением

В данном подразделе для задачи управления системой (17.2) рассмотрим случай, аналогичный предыдущему (следуем (18.1)), но осложненный Y-ограничением. Зафиксируем $\mathbf{t}$, такое что $0 < \mathbf{t} < 1, \mathbf{t} \neq t_0$. Зададим компоненты $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ вектора $\overline{\rho}(t)$ ($\overline{\rho}(t)$ — значение вектор-функции $\overline{\rho}$ с компонентами ρ_1, ρ_2): при $t \in I$

$$\rho_1(t) = \mathbf{b}(t)(\mathbf{t} - t)\chi_{[0,\mathbf{t}[}(t), \tag{19.1}$$

$$\rho_2(t) = \mathbf{b}(t)\chi_{[0,\mathbf{t}[}(t). \tag{19.2}$$

Графическое представление $\rho_1(t), \rho_2(t)$ имеет следующий вид

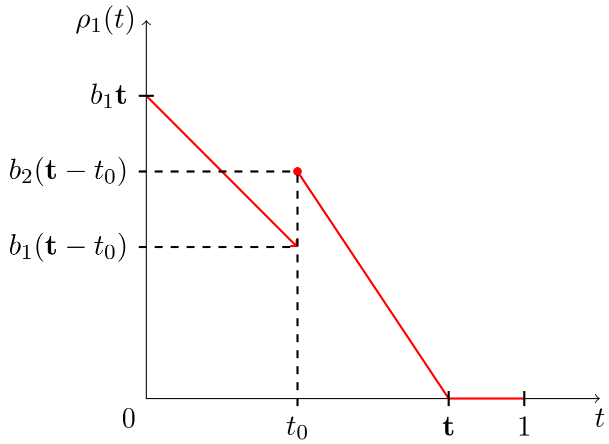

Рис. 5.

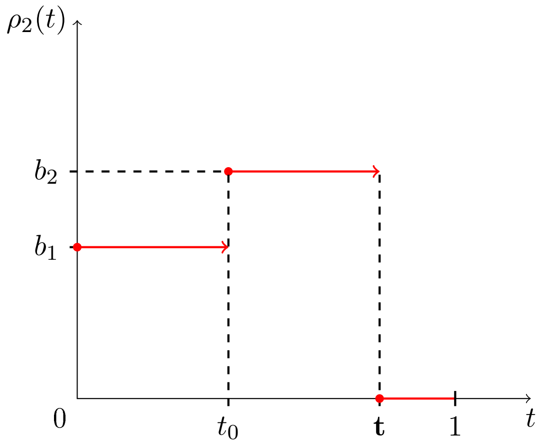

Рис. 6.

Определим $\hat{\rho}_\uparrow(t)$, $\hat{\rho}_\downarrow(t)$, следуя разделу 12:

$$\hat{\rho}_\uparrow(t) = \lim_{\theta \uparrow t} \overline{\rho}(\theta) \quad \forall t \in]0, 1], \tag{19.3}$$

$$\hat{\rho}_\downarrow(t) = \lim_{\theta \downarrow t} \overline{\rho}(\theta) \quad \forall t \in [0, 1[. \tag{19.4}$$

Заметим, что $\hat{\rho}_\downarrow(0) = \overline{\rho}(0) = (b_1\mathbf{t}, b_1)$, $\hat{\rho}_\uparrow(1) = (0, 0)$. Очевидно, что: $\hat{\rho}_\downarrow(t) = \overline{\rho}(t) \quad \forall t \in [0, 1[$ (действительно вектор-функция $\overline{\rho}$ непрерывна справа); $\hat{\rho}_\uparrow(t) = \overline{\rho}(t) \quad \forall t \in]0, 1] \setminus \{t_0, \mathbf{t}\}$.

Рассмотрим общий план нахождения МП. Пользуясь соотношением (14.9), построим множество Γ: $\forall t \in\ ]0, 1[\ \forall \alpha \in [0, 1]$

$$\big((t, \alpha) \in \Gamma\big) \Longleftrightarrow \big(\alpha\hat{\rho}_\uparrow(t) + (1 - \alpha)\hat{\rho}_\downarrow(t) \in Y\big).$$

После построения множества Γ определяем Γ_o, пользуясь следствием равенства (14.10): $\forall t \in I$ $\forall \alpha \in [0,1]$

$$\big((t,\alpha) \in \Gamma\big) \Longrightarrow \big(\alpha \overrightarrow{\pi}(t) + (1-\alpha)\overleftarrow{\pi}(t) \in \Gamma_o\big).$$

По теореме 14.1 в нашем случае, при всех используемых ниже вариантах Y-ограничения (рассматриваются варианты Y-ограничения, для которых $\hat{\rho}_{\downarrow}(0) \notin Y$, $\hat{\rho}_{\uparrow}(1) \notin Y$), МП совпадает с Γ_o.

Для демонстрации данного решения перейдем к численным значениям. Программа, упомянутая в предыдущем разделе, была модифицирована для решения рассматриваемой (более сложной) задачи о достижимости с Y-ограничением. Пусть $t_0 = 0.5$, $\mathbf{t} = 0.7$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. Рассмотрим случай, когда множество Y одноточечное: $Y = \{y_0\}$, где $y_0 = (0.3,\ 1.5)$. Такое простейшее множество Y уже представляет определенный интерес. Дело в том, что задача раздела 14, связанная с построением Γ_0, здесь совместна: в таких условиях множество Γ будет иметь ровно одну точку $(t_0,\ \alpha_0) = (0.5,\ 0.5)$. Тогда множество Γ_0 будет одноточечным:

$$\Gamma_0 = \{\alpha_0 \overrightarrow{\pi}(t_0) + (1-\alpha_0)\overleftarrow{\pi}(t_0)\} = \{(0.75,\ 1.5)\}.$$

Следовательно, по теореме 14.1 в данном случае МП есть одноточечное множество, изображенное справа:

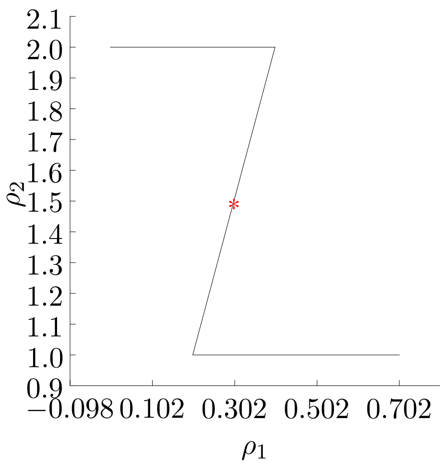

Рис. 7. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.5$

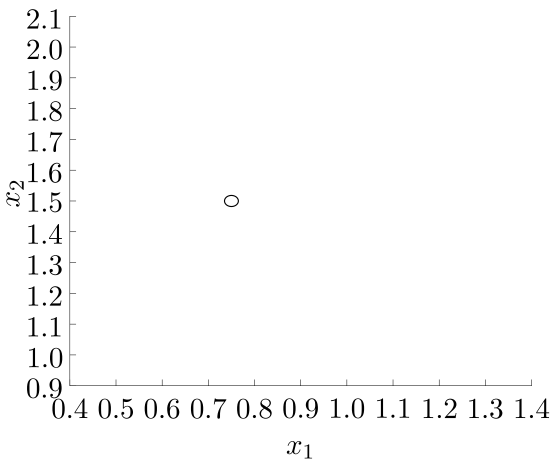

Рис. 8. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.5$

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда множество Y представляет из себя прямоугольник $Y = [0.1,\ 0.36] \times [1.1,\ 2.1]$. Тогда множество Γ будет устроено более сложным образом. Для представления данного множества были использованы результаты вычислительного эксперимента, они изображены на приводимых ниже рисунках: в левой части указаны конкретные способы соблюдения Y-ограничения, а в правой — вид соответствующего МП.

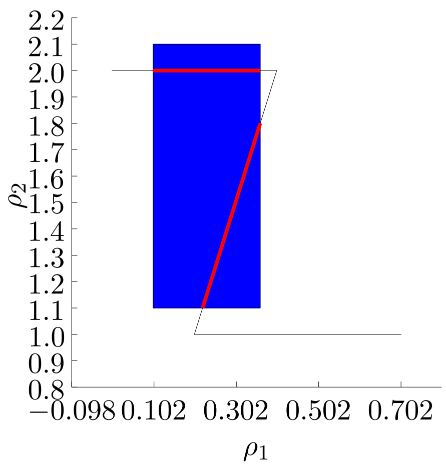

Рис. 9. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.5$

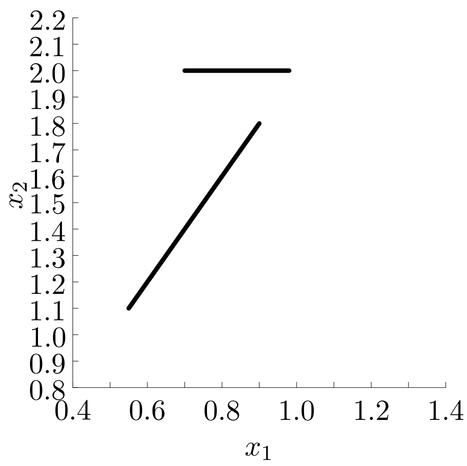

Рис. 10. $b_1 = 1.0$, $b_2 = 2.0$, $t_0 = 0.5$

Для следующего множества $Y = [0.25,\ 0.36] \times [0.9,\ 2.1]$ получим представление, изображенное на рисунках:

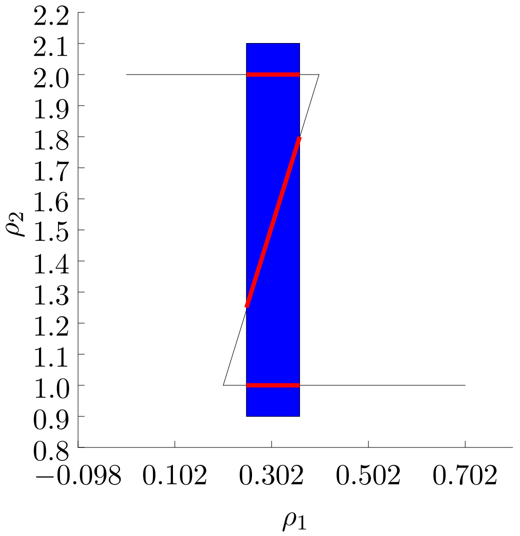

Рис. 11. $b_1 = 1.0,\ b_2 = 2.0,\ t_0 = 0.5$

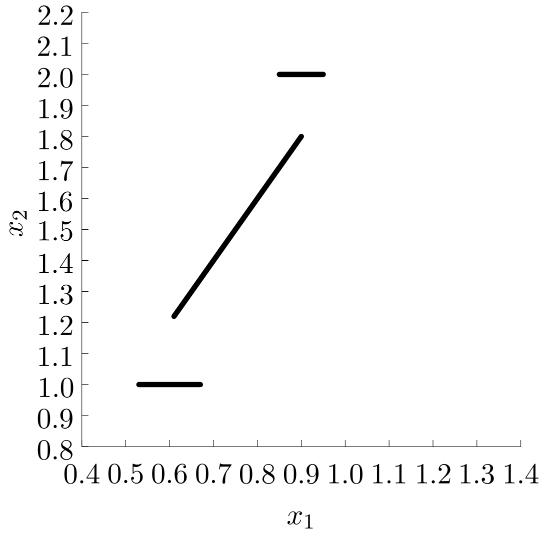

Рис. 12. $b_1 = 1.0,\ b_2 = 2.0,\ t_0 = 0.5$

Наконец, для множества $Y = [0.1,\ 0.4] \times [0.9,\ 2.1]$ получим следующий вариант МП:

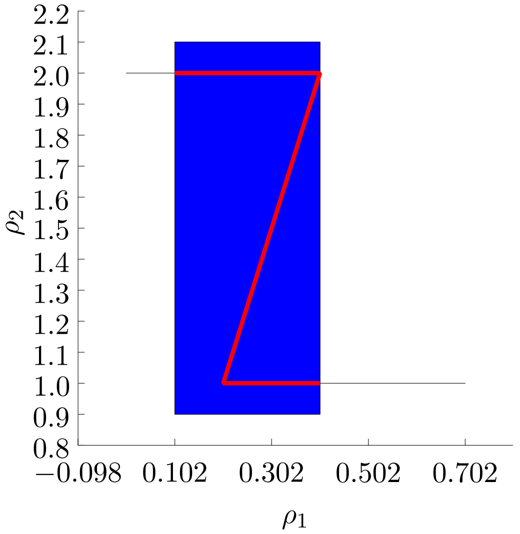

Рис. 13. $b_1 = 1.0,\ b_2 = 2.0,\ t_0 = 0.5$

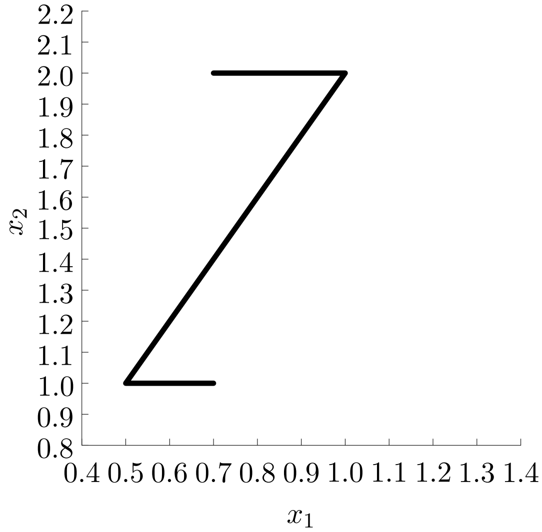

Рис. 14. $b_1 = 1.0,\ b_2 = 2.0,\ t_0 = 0.5$

§ 20. Заключение

В статье получено конкретное представление МП, являющегося асимптотическим аналогом ОД управляемой системы в фиксированный момент времени (рассмотрены также абстрактные версии данной постановки). При этом использовались ОАХ, включающие в виде своеобразных своих компонент режим «узких» импульсов и моментное ограничение, соблюдаемое приближенно. Используемая при этом конструкция расширения существенно опирается на построения [12], реализующие компакт Стоуна в случае невырожденного отрезка вещественной прямой, а также на применение к.-а. мер в качестве ОЭ (здесь — обобщенных управлений); см., например, [15–18]. Данная абстрактная конструкция доведена до реализации в виде конкретных конечномерных задач, для которых в простейшем случае управляемой материальной точки построена компьютерная программа.

Список литературы

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 432 с.
3. Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
4. Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2005. Т. 26. С. 119–150.
5. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
7. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
8. Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
9. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
10. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении ультрафильтров и их применении в конструкциях расширений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 289–308.
11. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств и их применение в конструкциях расширений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 285–304.
12. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
13. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 307–319.
14. Ченцов А. Г. О некоторых вопросах структуры ультрафильтров, связанных с расширениями абстрактных задач управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 119–139.
15. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York etc.: Plenum Publ. Co., 1996. 244 p.
16. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
17. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
18. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133. № 2. P. 1045–1206.
19. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении компактов Стоуна // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 156–174.
20. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 309–323.
21. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
22. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
23. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
24. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. 389 с.
25. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
26. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.
27. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 895 с.
28. Ченцов А.Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 58–80.
29. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 542 с.
30. Скворцова А.В. Ченцов А.Г. О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 12. С. 1645–1657.

Поступила в редакцию 15.01.2016

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Бакланов Артем Павлович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: artem.baklanov@gmail.com

Савенков Илья Ильич, научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: slaeme@yandex.ru

A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, I. I. Savenkov
A problem of attainability with constraints of asymptotic nature

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter.

MSC: 49N05, 54H99

We construct and study properties of attainability sets for a linear control system with discontinuous coefficients of the control action. This problem is tightly connected with the issue of an attainability "on average" (i.e. the type of an attainability in the class of mathematical expectations of random vectors). Focusing on the case of constraints of an asymptotic character, we tackle the mentioned problems by means of the universal approach. These constraints correspond to a control regime in the class of "narrow" pulses. We consider a control problem in the class of pulse-like controls complying with the requirement of full consumption of energy resources.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York–London: Academic Press, Inc., 1972, xiii+531 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
2. Kelley J.L. *General Topology*, Toronto–New York–London: D. Van Nostrand Company, Inc., 1955, xiv+298 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968, 432 p.
3. Bourbaki N. *Topologie Générale (General Topology)*, Paris: Hermann, 1961. Translated under the title *Elementy matematiki. Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury*, Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
4. Chentsov A.G. Certain constructions of asymptotic analysis related to the Stone–Čech compactification, *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz.*, 2005, vol. 26, pp. 119–150 (in Russian).
5. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: Equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44. DOI: 10.3103/S1066369X13110030
6. Engelking R. *General Topology*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 751 p.
7. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
8. Chentsov A.G. Tier mappings and ultrafilter-based transformations, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian).
9. Chentsov A.G. Representation of attraction elements in abstract attainability problems with asymptotic constraints, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 38–49. DOI: 10.3103/S1066369X12100040
10. Chentsov A.G. On the question of representation of ultrafilters and their application in extension constructions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 287, suppl. 1, pp. 29–48. DOI: 10.1134/S0081543814090041
11. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces and their application in extension constructions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 285–304 (in Russian).
12. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).
13. Chentsov A.G. On the question of representation of ultrafilters in a product of measurable spaces, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 65–78. DOI: 10.1134/S0081543814020060
14. Chentsov A.G. On certain problems of the structure of ultrafilters related to extensions of abstract control problems, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 12, pp. 2020–2036. DOI: 10.1134/S0005117913120060
15. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York etc.: Plenum Publ. Co., 1996. 244 p.
16. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
17. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.

18. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206. DOI: 10.1007/s10958-006-0030-0
19. Chentsov A.G. To question about representation of Stone compactums, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 156–174 (in Russian).
20. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 40–55. DOI: 10.1134/S0081543815090035
21. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
22. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control of motion), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
23. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967, xii+417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
24. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I* (Elements of finitely additive measure theory. I), Yekaterinburg: Ural State Technical University, 2008, 389 p.
25. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
26. Edwards R.E. *Functional analysis. Theory and applications*, New York–Chicago–San Francisco–Toronto–London: Holt Rinehart and Winston, 1965, xiii+781 p. Translated under the title *Funktsional'nyi analiz. Teoriya i prilozheniya*, Moscow: Mir, 1969, 1071 p.
27. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: general theory*, New York–London: Interscience Publ., 1958, 874 p. Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 895 p.
28. Chentsov A.G. On the construction of correct extensions in the class of finitely additive measures, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2002, vol. 46, no. 2, pp. 58–80 (in Russian).
29. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. II* (Elements of finitely additive measure theory. II), Yekaterinburg: Ural State Technical University, 2010, 542 p.
30. Skvortsova A.V., Chentsov A.G. On the construction of an asymptotic analog of a pencil of trajectories for a linear system with a single-impulse control, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1726–1739. DOI: 10.1007/s10625-005-0104-7

Received 15.01.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Main Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Baklanov Artem Pavlovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: artem.baklanov@gmail.com

Savenkov Il'ya Il'ich, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: slaeme@yandex.ru