УДК 517.958, 517.984.5

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Рассматривается периодический трехмерный оператор Дирака $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}=\sum\widehat{\alpha}_j(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j)+\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$. Векторный потенциал $A\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ и функции $\widehat{V}_s$, $s=0,1$, со значениями в пространстве эрмитовых (4×4)-матриц являются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$. Предполагается, что функции $\widehat{V}_s$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $\widehat{V}_s\widehat{\alpha}_j=(-1)^s\widehat{\alpha}_j\widehat{V}_s$, $j=1,2,3$, $s=0,1$. Пусть K — элементарная ячейка решетки Λ. Доказана абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}$, если либо $A\in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $q>1$, либо $\sum\|A_N\|<+\infty$, где A_N — коэффициенты Фурье магнитного потенциала A, а функция $\widehat{V}=\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$ принадлежит пространству $L^3_w(K)$ и для нее при всех достаточно больших числах $t>0$ выполняется оценка $\mathrm{mes}\,\{x\in K\colon\|\widehat{V}(x)\|>t\}\leqslant Ct^{-3}$, где mes — мера Лебега и константа $C>0$ зависит от A (если $A\equiv 0$, то C — универсальная константа). К функции $\widehat{V}=\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$ можно добавить периодическую функцию такого же вида, имеющую кулоновские особенности $|x-x_m|^{-1}\widehat{w}_m$ в окрестностях точек $x_m\in K$, $m=1,\dots,m_0$, и непрерывную при $x\notin x_m+\Lambda$, $m=1,\dots,m_0$, если $\|\widehat{w}_m\|\leqslant C_1$ для всех m, где константа $C_1>0$ также зависит от магнитного потенциала A (и не зависит от m_0).

Ключевые слова: оператор Дирака, абсолютная непрерывность спектра, периодический потенциал.

Введение

Пусть $\mathcal{M}_M$, где $M\in\mathbb{N}$, — линейное пространство комплексных $(M\times M)$-матриц, $\mathcal{S}_M$ — множество эрмитовых матриц из $\mathcal{M}_M$, матрицы $\widehat{\alpha}_j\in\mathcal{S}_M$, $j=1,\dots,n$ $(n\geqslant 2)$, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $\widehat{\alpha}_j\widehat{\alpha}_l+\widehat{\alpha}_l\widehat{\alpha}_j=2\delta_{jl}\widehat{I}$, где $\widehat{I}\in\mathcal{M}_M$ — единичная матрица и δ_{jl} — символ Кронекера. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{S}}_M$ множество матриц $\widehat{L}\in\mathcal{S}_M$, представимых в виде $\widehat{L}=\widehat{L}_0+\widehat{L}_1$, где $\widehat{L}_s\in\mathcal{S}_M$ и $\widehat{\alpha}_j\widehat{L}_s=(-1)^s\widehat{L}_s\widehat{\alpha}_j$ для всех $j=1,\dots,n$, $s=0,1$.

Рассматривается n-мерный оператор Дирака

$$\sum_{j=1}^{n}\widehat{\alpha}_j\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\bigr)+\widehat{V},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad n\geqslant 2,\tag{0.1}$$

где $i^2=-1$ и компоненты A_j магнитного потенциала $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и матричная функция $\widehat{V}\colon\mathbb{R}^n\to\widetilde{\mathcal{S}}_M$ являются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$.

Координаты в $\mathbb{R}^n$ определяются относительно некоторого ортогонального базиса $\{\mathcal{E}_j\}$ ($|\mathcal{E}_j|=1$, $j=1,\dots,n$; $|\cdot|$ и $(\cdot,\cdot)$ — длина и скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$), $A_j(x)=(A(x),\mathcal{E}_j)$. Пусть $\{E_j\}$ — базис решетки $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$, $K=\{x=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_jE_j\colon 0\leqslant\xi_j<1$, $j=1,\dots,n\}$ — элементарная ячейка решетки Λ. Через mes обозначается мера Лебега в пространствах $\mathbb{R}^m$, $m\in\mathbb{N}$; $\mathrm{mes}\,K$ — объем элементарной ячейки K. В дальнейшем функции, определенные на элементарной ячейке K, будут также отождествляться с их периодическими продолжениями (с решеткой периодов Λ) на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Скалярные произведения и нормы в пространствах $\mathbb{C}^M$, $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ вводятся обычным образом (и в их обозначениях, как правило, не будут использоваться обозначения самих пространств). Для матриц $\widehat{L}\in\mathcal{M}_M$

$$\|\widehat{L}\|_{\mathcal{M}_M}=\max_{u\,\in\,\mathbb{C}^M\colon\,\|u\|=1}\|\widehat{L}u\|.$$

Нулевые и единичные матрицы и операторы в разных пространствах обозначаются как $\widehat{0}$ и $\widehat{I}$ соответственно.

Пусть $\{E^*_j\}$ — базис обратной решетки $\Lambda^*\subset\mathbb{R}^n$, для которого $(E_j,E^*_l)=\delta_{jl}$, $j,l=1,\dots,n$; $K^*=\{y=\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_jE^*_j\colon 0\leqslant\eta_j<1,\ j=1,\dots,n\}$ — элементарная ячейка решетки Λ^*. Справедливо равенство $\operatorname{mes} K^* = (\operatorname{mes} K)^{-1}$. Через

$$\psi_N = (\operatorname{mes} K)^{-1} \int_K \psi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)}\, dx, \quad N \in \Lambda^*,$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\psi \in L^1(K;\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — одно из пространств $\mathbb{C}^M$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathcal{M}_M$.

Оператор

$$\widehat{\mathcal{D}} = -i \sum_{j=1}^{n} \widehat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

действует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и имеет своей областью определения класс Соболева (порядка 1): $D(\widehat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M) \subset L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$.

Матричная функция $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathcal{M}_M)$ *ограничена относительно оператора* $\widehat{\mathcal{D}}$, если $\widehat{\mathcal{W}}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ для всех $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и для некоторого числа $a \geqslant 0$ найдется такое число $C = C(a,\widehat{\mathcal{W}}) \geqslant 0$, что для всех вектор-функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)} \leqslant a\|\widehat{\mathcal{D}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)} + C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)}. \tag{0.2}$$

Точная нижняя грань чисел a, для которых выполняется оценка (0.2), называется *гранью матричной функции* $\widehat{\mathcal{W}}$ *относительно оператора* $\widehat{\mathcal{D}}$ и будет обозначаться через $b(\widehat{\mathcal{W}})$.

Периодическая с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ (измеримая) матричная функция $\widehat{\mathcal{W}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_M$ принадлежит пространству $L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$, если

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \doteq \sup_{t>0} t\,(\operatorname{mes}\{x\in K : \|\widehat{\mathcal{W}}(x)\|_{\mathcal{M}_M} > t\})^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

Для матричных функций $\widehat{\mathcal{W}} \in L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$ обозначим

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \doteq \limsup_{t\to+\infty} t\,(\operatorname{mes}\{x\in K : \|\widehat{\mathcal{W}}(x)\|_{\mathcal{M}_M} > t\})^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

При $n \geqslant 3$ (периодическая с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$) матричная функция $\widehat{\mathcal{W}} \in L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$ ограничена относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}$ и имеет грань

$$b(\widehat{\mathcal{W}}) \leqslant C\,\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}, \tag{0.3}$$

где $C = C(n) > 0$ (см., например, [1]). Пусть

$$B_r(x) = \{y\in\mathbb{R}^n\colon |x-y| \leqslant r\}, \quad \mathcal{B}_r(x) = \bigcup_{\gamma'\in\Lambda} B_r(x+\gamma'), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad r>0.$$

Через χ_T обозначается характеристическая функция множества $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Из (0.3) следует также оценка

$$b(\widehat{\mathcal{W}}) \leqslant C\,\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}.$$

где

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \doteq \lim_{r\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \limsup_{t\to+\infty} t\,(\operatorname{mes}\{y\in B_r(x) : \|\widehat{\mathcal{W}}(y)\|_{\mathcal{M}_M} > t\})^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{r\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\chi_{\mathcal{B}_r(x)}\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}.$$

З а м е ч а н и е 1. Функции $\widehat{\mathcal{W}} \mapsto \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}$, $\widehat{\mathcal{W}} \mapsto \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}$ и $\widehat{\mathcal{W}} \mapsto \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}$ не являются нормами. Если $\widehat{\mathcal{W}}_1, \widehat{\mathcal{W}}_2 \in L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$, то

$$\|\widehat{\mathcal{W}}_1 + \widehat{\mathcal{W}}_2\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \leqslant 2\,\|\widehat{\mathcal{W}}_1\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} + 2\,\|\widehat{\mathcal{W}}_2\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}. \tag{0.4}$$

Для $\|\cdot\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}$ и $\|\cdot\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)}$ справедливы аналогичные (0.4) оценки. Для всех $\widehat{\mathcal{W}} \in L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$ выполняются неравенства

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \geqslant \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \geqslant \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)},$$

и существуют ненулевые функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^n_w(K;\mathcal{M}_M)$, для которых $\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} = \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} = 0$.

В дальнейшем будет предполагаться, что

$$\widehat{W} = -\sum_{j=1}^{n} A_j \widehat{\alpha}_j + \widehat{V} \in L^n_w(K;\mathcal{S}_M)$$

и $b(\widehat{W}) < 1$. В этом случае оператор (0.1) является самосопряженным и $D(\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}) = H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ (см. [1,2]). Спектр оператора $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}$ имеет зонную структуру. Сингулярная составляющая спектра отсутствует [3] (см. также [4, 5]), и, следовательно, спектр абсолютно непрерывен в том и только том случае, когда у оператора (0.1) нет собственных значений (бесконечной кратности). Вопрос об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики (и, в частности, периодического оператора Дирака) привлек большое внимание в последние два десятилетия. В [6, 7] содержатся обзоры ранних результатов. В [8] приведена обширная библиография по современному состоянию проблемы. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака (0.1) при всех $n \geqslant 2$ была впервые доказана в [9] для магнитного потенциала $A \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и матричной функции $\widehat{V} = V\widehat{I} + m\widehat{\beta}$ таких, что

$$\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \max_{\gamma \in \Lambda\setminus\{0\}} \frac{\pi}{|\gamma|}$$

и $V \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, где $\widehat{I} \in \mathcal{M}_M$ — единичная матрица, $m \in \mathbb{R}$ и $\widehat{\beta} \in \mathcal{S}_M$ — матрица, для которой $\widehat{\beta}^2 = \widehat{I}$ и $\widehat{\alpha}_j\widehat{\beta} = -\widehat{\beta}\widehat{\alpha}_j$ при всех $j = 1,\dots,n$. В последующих работах [3, 10–20] (см. также ссылки из этих статей) были ослаблены приведенные ограничения и получены новые условия на A и $\widehat{V}$. Обзор известных результатов об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Дирака содержится в [20] (см. также [18, 19]). В настоящей работе рассматривается трехмерный периодический оператор Дирака

$$\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{W} = \sum_{j=1}^{3} \widehat{\alpha}_j\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\bigr) + \widehat{V}. \tag{0.5}$$

Для оператора (0.5) можно считать, что $M = 4$ (и это будет предполагаться в дальнейшем), и можно выбрать матрицы

$$\widehat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{\sigma}_j \\ \widehat{\sigma}_j & \widehat{0} \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3,$$

где $\widehat{\sigma}_j$ — матрицы Паули:

$$\widehat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\widehat{V} = \begin{pmatrix} V_0\widehat{I} & (V_1 + iV_2)\widehat{I} \\ (V_1 - iV_2)\widehat{I} & V_3\widehat{I} \end{pmatrix},$$

где V_j — вещественнозначные функции (из $L^3_w(K;\mathbb{R})$), $j = 0,1,2,3$ ($\widehat{0}$ и $\widehat{I}$ — нулевая и единичная матрицы из $\mathcal{M}_2$).

Пусть $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| = 1\}$, $S^1(x) = \{\widetilde{e} \in S^2 \colon (\widetilde{e}, x) = 0\}$, $x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество четных борелевских знакопеременных мер μ на $\mathbb{R}$ (с конечной полной вариацией), для которых $\int_{\mathbb{R}} e^{ipt}\,d\mu(t) = 1$ для всех $p \in (-\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(\mu) > 0$. В частности, множество $\mathfrak{M}$ содержит меру Дирака δ.

В [20] доказана абсолютная непрерывность спектра трехмерного периодического оператора Дирака (0.5), если $\widehat{V} \in L^3(K;\widetilde{\mathcal{S}}_M)$ и существует вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ такой, что периодический (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет следующим двум условиям:

(1_γ) $A \in L^2(K;\mathbb{R}^3)$ и отображение

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \{[0,1] \ni \xi \mapsto A(x-\xi\gamma)\} \in L^2([0,1];\mathbb{R}^3)$$

непрерывно;

(2_γ) существует мера $\mu \in \mathfrak{M}$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и всех векторов $\widetilde{e} \in S^1(\gamma)$

$$\left| A_0 - \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int_0^1 A(x-\xi\gamma - t\widetilde{e})\,d\xi \right| < \frac{\pi}{|\gamma|},$$

где $A_0 = (\operatorname{mes} K)^{-1} \int_K A(x)\,dx$.

З а м е ч а н и е 2. Из условия (1_γ) следует, что матричная функция $\sum\limits_{j=1}^{3} A_j\widehat{\alpha}_j$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}$ (при $n=3$) [11]. Поэтому для любой матричной функции $\widehat{V} \in L^3_w(K;\mathcal{M}_M)$ (в частности, при $M=4$) справедливо равенство $b\bigl(-\sum\limits_{j=1}^{3} A_j\widehat{\alpha}_j + \widehat{V}\bigr) = b(\widehat{V})$. Если $\widehat{V} \in L^3(K;\mathcal{M}_M)$, то $b(\widehat{V}) = 0$.

З а м е ч а н и е 3. Для периодического (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) магнитного потенциала $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ условие (2_γ) выполняется (при соответствующем выборе вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ и меры $\mu \in \mathfrak{M}$), если магнитный потенциал A принадлежит классу Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $q > \frac{1}{2}$, а также в случае, когда $\sum\limits_{N\in\Lambda^*} \|A_N\|_{\mathbb{C}^3} < +\infty$ (см. [14, 21]). Условие (1_γ) выполняется (для любого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$), если $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $q > 1$.

Пусть $\mathcal{K}(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ — множество периодических (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) матричных функций $\widehat{\mathcal{W}}\colon \mathbb{R}^3 \to \widetilde{\mathcal{S}}_4$, для которых найдутся разные точки $x_m \in K$, $m = 1,\dots,m_0$ (где $m_0 = m_0(\widehat{\mathcal{W}}) \in \mathbb{N}$), такие, что матричная функция $\widehat{\mathcal{W}}$ бесконечно дифференцируема на открытом множестве

$$\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{m=1}^{m_0} \bigcup_{\gamma'\in\Lambda} \{x_m + \gamma'\}$$

и в достаточно малых окрестностях (в $\mathbb{R}^3$) точек x_m имеет вид $\widehat{\mathcal{W}}(x) = |x-x_m|^{-1}\,\widehat{w}_m$, где $\widehat{w}_m \in \widetilde{\mathcal{S}}_4$. Обозначим

$$q(\widehat{\mathcal{W}}) \;=\; \max_{m=1,\dots,m_0} \|\widehat{w}_m\|_{\mathcal{M}_4}.$$

Справедливо вложение $\mathcal{K}(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4) \subset L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$. При этом

$$\|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^n_w(K;\mathcal{M}_M)} \;=\; \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} q(\widehat{\mathcal{W}})$$

(и $b(\widehat{\mathcal{W}}) = 2q(\widehat{\mathcal{W}})$ (см. [1, 22])).

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Т е о р е м а 0.1. *Спектр периодического* (*с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) *оператора Дирака* (0.5) (*при* $M=4$) *абсолютно непрерывен, если для некоторого вектора* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *магнитный потенциал* $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *удовлетворяет условиям* (1_γ) *и* (2_γ), *а матричную функцию* $\widehat{V}$ *можно представить в виде* $\widehat{V} = \widehat{V}^{(1)} + \widehat{V}^{(2)}$, *где* $\widehat{V}^{(j)}\colon \mathbb{R}^3 \to \widetilde{\mathcal{S}}_4$, $j=1,2$, — *периодические* (*с решеткой периодов* Λ) *матричные функции, для которых* $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$, $\widehat{V}^{(2)} \in \mathcal{K}(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4) \subset L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$ *и* $\|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant C_1$, $q(\widehat{V}^{(2)}) \leqslant C_2$, *где* $C_j = C_j(\gamma,\Lambda;A) > 0$, $j = 1, 2$ (*если* $A \equiv 0$, *то* C_j — *универсальные константы, не зависящие от* Λ).

С л е д с т в и е 0.1. *Спектр периодического (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) оператора Дирака (0.5) (при $M=4$) абсолютно непрерывен, если для магнитного потенциала $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ выполнено либо неравенство $\sum\limits_{N \in \Lambda^*} \|A_N\|_{\mathbb{C}^3} < +\infty$, либо включение $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $q>1$, а для матричной функции $\widehat{V} \in L^3_w(K,\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ выполнено условие $\|\widehat{V}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K,\mathcal{M}_4)} \leqslant C_1'$, где $C_1' = C_1'(\Lambda;A) > 0$ (если $A \equiv 0$, то C_1' — универсальная константа).*

Доказательство теоремы 0.1 приведено в § 1. При доказательстве используются результаты и методы из работ [16, 17, 19, 20].

§ 1. Доказательство теоремы 0.1

Пусть $\widetilde{H}^s(K;\mathbb{C}^4)$, $s>0$, — множество вектор-функций $\varphi\colon K \to \mathbb{C}^4$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) принадлежат классу Соболева $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$.

Для всех $k \in \mathbb{R}^3$, $e \in S^2$ и $\varkappa \geqslant 0$ определим операторы

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) = -i\sum_{j=1}^3 \widehat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 (k_j + i\varkappa e_j)\widehat{\alpha}_j,$$

действующие в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$, $D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)) = \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$. В условиях теоремы 0.1 константы C_1 и C_2 выбираются так, что $b(\widehat{V}) \leqslant b(\widehat{V}^{(1)}) + b(\widehat{V}^{(2)}) < 1$ (см. (0.3)). Тогда матричная функция

$$\widehat{W} = -\sum_{j=1}^3 A_j\widehat{\alpha}_j + \widehat{V}^{(1)} + \widehat{V}^{(2)}$$

имеет грань $b(\widehat{W}) = b(\widehat{V}) < 1$ относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}$ и, следовательно, относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ (при $\varkappa = 0$), $k \in \mathbb{R}^3$, действующих в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$ (предполагается, что матричная функция $\widehat{W}$ также действует в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$). В этом случае операторы $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W}$ с областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) = \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4) \subset L^2(K;\mathbb{C}^4)$ замкнуты и имеют компактную резольвенту для всех $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^3$. Операторы $\widehat{\mathcal{D}}(k) + \widehat{W}$, $k \in \mathbb{R}^3$, являются самосопряженными и имеют дискретный спектр. Периодический оператор Дирака (0.5) унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int^{\oplus}_{2\pi K^*} (\widehat{\mathcal{D}}(k) + \widehat{W})\, \frac{dk}{(2\pi)^3\,(\operatorname{mes} K^*)}\,. \tag{1.1}$$

Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда (см. [23, 24]). Для доказательства абсолютной непрерывности спектра периодического оператора (0.5) достаточно показать, что у него нет собственных значений (бесконечной кратности). Поэтому предположим, что некоторое число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора (0.5). Тогда из разложения оператора Дирака (0.5) в прямой интеграл (1.1) и аналитической теоремы Фредгольма следует (см. [4, 7]), что λ — собственное значение операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W}$ при всех $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^3$. Делая замену $\widehat{V}^{(1)} - \lambda\widehat{I} \mapsto \widehat{V}^{(1)}$ (при этом $\widehat{V}^{(1)} - \lambda\widehat{I} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и $\|\widehat{V}^{(1)} - \lambda\widehat{I}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} = \|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}$), можно рассматривать только случай $\lambda = 0$. Но существование собственного значения $\lambda = 0$ у операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W}$ при всех $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^3$ противоречит приводимой далее теореме 1.1. Поэтому спектр периодического оператора Дирака (0.5) абсолютно непрерывен. Такой метод доказательства отсутствия собственных значений и абсолютной непрерывности спектра периодических эллиптических дифференциальных операторов был предложен в [25] и использовался во всех последующих работах о характере спектра периодических операторов математической физики.

Пусть $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ — вектор из теоремы 0.1, $e \doteq |\gamma|^{-1}\gamma$. Введем обозначения $x_\parallel = (x,e)$, $x_\perp = x - (x,e)e$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Для любой вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi = \sum_{N \in \Lambda^*} \widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

где
$$\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)=\sum_{j\,=\,1}^{3}(k_j+2\pi N_j+i\varkappa e_j)\,\widehat{\alpha}_j.$$
Для всех $k\in\mathbb{R}^3$ и $\varkappa\geqslant 0$ обозначим
$$G_N^{\pm}(k;\varkappa)=\bigl((k_{\|}+2\pi N_{\|})^2+(\varkappa\pm|k_{\perp}+2\pi N_{\perp}|)^2\bigr)^{1/2},\quad N\in\Lambda^*.$$
Справедливы неравенства
$$G_N^{+}(k;\varkappa)\geqslant G_N^{-}(k;\varkappa),\quad G_N^{+}(k;\varkappa)\geqslant\varkappa\,,\quad G_N^{+}(k;\varkappa)\geqslant|k+2\pi N|.$$
Если $k\in\mathbb{R}^3$ и $|(k,\gamma)|=\pi$, то $G_N^{-}(k;\varkappa)\geqslant\pi|\gamma|^{-1}$ для всех $\varkappa\geqslant 0$ и $N\in\Lambda^*$.

Для векторов $k\in\mathbb{R}^3$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, определим операторы $\widehat{G}^s_{\pm}$, $s\in\mathbb{R}$, действующие в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$:
$$\widehat{G}^s_{\pm}\varphi=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}(G_N^{\pm}(k;\varkappa))^s\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)},\quad \varphi\in D(\widehat{G}^s_{\pm})=\begin{cases}\widetilde{H}^s(K;\mathbb{C}^4), & \text{если } s>0,\\ L^2(K;\mathbb{C}^4), & \text{если } s\leqslant 0\end{cases}$$
(операторы $\widehat{G}^s_{\pm}$ зависят от k и $\varkappa$, но явно эта зависимость в обозначениях указываться не будет), $\widehat{G}_{\pm}\doteq\widehat{G}^1_{\pm}$.

Для векторов $\widetilde{e}\in S^1(e)$ рассмотрим ортогональные проекторы в $\mathbb{C}^4$:
$$\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}}=\frac{1}{2}\bigl(\widehat{I}\mp i\,\bigl(\sum_{j\,=\,1}^{3}e_j\widehat{\alpha}_j\bigr)\bigl(\sum_{j\,=\,1}^{3}\widetilde{e}_j\widehat{\alpha}_j\bigr)\bigr).$$
Для всех $\widetilde{e}\,'$, $\widetilde{e}\,''\in S^1(e)$
$$\|\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}\,'}\widehat{P}^{\mp}_{\widetilde{e}\,''}\|=\|\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}\,'}-\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}\,''}\|=\frac{1}{2}\,|\,\widetilde{e}\,''-\widetilde{e}\,'\,|.$$
Для векторов $y\in\mathbb{R}^3$, для которых $y_{\perp}=y-(y,e)e\neq 0$, будем обозначать $\widetilde{e}(y)\doteq|y_{\perp}|^{-1}y_{\perp}$, $\widetilde{e}(y)\in S^1(e)$.

Если $k\in\mathbb{R}^3$, $N\in\Lambda^*$, при этом $k_{\perp}+2\pi N_{\perp}\neq 0$, то
$$\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\left(\sum_{j\,=\,1}^{3}e_j\widehat{\alpha}_j\right)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}=\widehat{0}$$
и (для всех $\varkappa\geqslant 0$)
$$\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}=(k_{\|}+2\pi N_{\|}+i(\varkappa\pm|k_{\perp}+2\pi N_{\perp}|))\left(\sum_{j\,=\,1}^{3}e_j\widehat{\alpha}_j\right)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}.$$
Следовательно,
$$\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}=\widehat{0},\tag{1.2}$$
$$\|\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}u\|=G_N^{\pm}(k;\varkappa)\|\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}u\|,\quad u\in\mathbb{C}^4.\tag{1.3}$$
Если $k_{\perp}+2\pi N_{\perp}=0$, то $G_N^{+}(k;\varkappa)=G_N^{-}(k;\varkappa)$.

Пусть $\mathbb{K}(e)=\{k\in\mathbb{R}^3\colon|(k,\gamma)|=\pi$ и $k_{\perp}+2\pi N_{\perp}\neq 0$ для всех $N\in\Lambda^*\}$. Множество $\{k\in\mathbb{R}^3\colon|(k,\gamma)|=\pi\}\setminus\mathbb{K}(e)$ счетное. Для векторов $k\in\mathbb{K}(e)$ определим ортогональные проекторы в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$:
$$\widehat{P}^{\,\pm}\varphi=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)},\quad\varphi\in L^2(K;\mathbb{C}^4)$$

(операторы $\widehat{P}^{\pm}$ зависят от k, но эта зависимость указываться в обозначениях не будет). Условие $k \in \mathbb{K}(e)$ (вместо условия $|(k,\gamma)| = \pi$) является техническим. Оно позволяет избежать неоднозначности в определении операторов $\widehat{P}^{\pm}$ для векторов $k \in \mathbb{R}^3$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$ и $k_\perp + 2\pi N_\perp = 0$ для некоторого вектора $N \in \Lambda^*$. Так как $\widehat{P}^+ + \widehat{P}^- = \widehat{I}$, то из (1.2) и (1.3) для всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$ получаем

$$\|\widehat{P}^{\pm}\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\| = \|\widehat{G}_{\mp}\widehat{P}^{\mp}\varphi\|, \quad \|\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\|^2 = \|\widehat{G}_-\widehat{P}^-\varphi\|^2 + \|\widehat{G}_+\widehat{P}^+\varphi\|^2.$$

Следовательно,

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\,\widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac12}\,\widehat{P}^-)\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\| = \|(\widehat{G}_-^{\frac12}\,\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\,\widehat{P}^+)\varphi\|, \quad \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4). \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Пусть периодический (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ удовлетворяет условиям (1_γ) и (2_γ) (и $e = |\gamma|^{-1}\gamma$). Тогда существует константа $C = C(\gamma,\Lambda;A) \in (0,1]$ такая, что для любых $\delta > 0$ и $\theta > 0$ существуют константы $C_1'' = C_1''(\gamma,\Lambda,\delta,\theta;A) > 0$ и $C_2'' = C_2''(\gamma,\Lambda,\delta;A) > 0$ такие, что для любой матричной функции $\widehat{V} = \widehat{V}^{(1)} + \widehat{V}^{(2)}$, где $\widehat{V}^{(s)}\colon \mathbb{R}^3 \to \widetilde{\mathcal{S}}_4$, $s = 1,2$, — периодические (с решеткой периодов Λ) матричные функции, для которых $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$, $\widehat{V}^{(2)} \in \mathcal{K}(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и $\|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant C_1''$, $q(\widehat{V}^{(2)}) \leqslant C_2''$, найдется число $\varkappa_0 > 4$ такое, что для любого $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ существует число $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_1^{1+\theta}]$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$*

$$C^{-\frac12}\,\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\,(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\| \geqslant \|(C^{-\frac12}\,\widehat{G}_-^{-\frac12}\,\widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac12}\,\widehat{P}^-)(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\| \geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta)\,\|(C^{\frac12}\,\widehat{G}_-^{\frac12}\,\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\,\widehat{P}^+)\varphi\| \geqslant (1-\delta)\,C^{\frac12}\,\|\widehat{G}_-^{\frac12}\,\varphi\|.$$

Теорема 1.1 непосредственно следует из теорем 1.2, 1.3 и 1.5.

Теорема 1.2 (см. [17, 19]). *Предположим, что для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ $(e = |\gamma|^{-1}\gamma)$ периодический (с решеткой периодов Λ) магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям (1_γ) и (2_γ). Тогда существует константа $C = C(\gamma,\Lambda;A) \in (0,1]$ такая, что для любого $\delta \in (0,1)$ существует число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|(C^{-\frac12}\,\widehat{G}_-^{-\frac12}\,\widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac12}\,\widehat{P}^-)\big(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) - \sum_{j=1}^{3} A_j\widehat{\alpha}_j\big)\varphi\| \geqslant (1-\delta)\,\|(C^{\frac12}\,\widehat{G}_-^{\frac12}\,\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\,\widehat{P}^+)\varphi\|.$$

Замечание 4. Если $A \equiv 0$, то в условиях теорем 1.1 и 1.2 можно положить $C = 1$ (см. (1.4)) и выбрать вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ с минимальной длиной $|\gamma|$. Тогда константа C_1'' (из теоремы 1.1) будет зависеть только от δ и θ, а константа C_2'' — от δ.

Пусть $\widetilde{\gamma} \in \Lambda\backslash\{0\}$ — какой-либо из векторов, для которых $|\widetilde{\gamma}| = \min\limits_{\gamma' \in \Lambda\backslash\{0\}} |\gamma'|$.

Теорема 1.3. *Пусть $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ $(e = |\gamma|^{-1}\gamma)$. Тогда для любой периодической (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) матричной функции $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и любых $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется число $\varkappa_0 > 4$ такое, что для любого $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ существует число $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_1^{1+\theta}]$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\,\widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac12}\,\widehat{P}^-)\widehat{V}^{(1)}\varphi\| \leqslant c_1\,\frac{|\gamma|}{|\widetilde{\gamma}|}\,\Big(\frac{1+\theta}{\theta}\Big)^{\frac13}\big(\varepsilon + \|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\big)\|(\widehat{G}_-^{\frac12}\,\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\,\widehat{P}^+)\varphi\|,$$

где $c_1 > 0$ — универсальная константа.

Для матричных функций $\widehat{V}^{(1)} \in L^3(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ (для них $\|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} = 0$) справедливо более сильное утверждение, чем утверждение, следующее из теоремы 1.3.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$). *Тогда для любой периодической* (*с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) *матричной функции* $\widehat{V}^{(1)} \in L^3(K; \widetilde{\mathcal{S}}_4)$ *и любых чисел* $\varepsilon > 0$, $\theta \in (0,1]$ *и* $\tau \in (0,1)$ *найдется число* $\varkappa_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ *найдется измеримое* (*по Лебегу*) *множество* $\mathcal{Z} \subseteq [\varkappa_1, (1+\theta)\varkappa_1]$ *такое, что* $\operatorname{mes}\mathcal{Z} \geqslant \tau\theta\varkappa_1$ *и для всех* $\varkappa \in \mathcal{Z}$, *всех векторов* $k \in \mathbb{K}(e)$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^4)$

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^-)\widehat{V}^{(1)}\varphi\| \leqslant \varepsilon\, \|(\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^+)\varphi\|. \tag{1.5}$$

Более простой вариант теоремы 1.4 (когда вместо выполнения оценки (1.5) для всех $\varkappa \in \mathcal{Z}$ требуется ее выполнение только для одного числа $\varkappa \in [\varkappa_1, (1+\theta)\varkappa_1]$) приведен в [20], но из доказательства, предложенного в [20], следует, что справедлива также теорема 1.4.

Т е о р е м а 1.5. *Пусть* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$). *Тогда для любой периодической* (*с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) *матричной функции* $\widehat{V}^{(2)} \in \mathcal{K}(K; \widetilde{\mathcal{S}}_4) \subset L^3_w(K; \mathcal{M}_4)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\varkappa_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{K}(e)$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^4)$

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^-)\widehat{V}^{(2)}\varphi\| \leqslant c_2\, (\varepsilon + q(\widehat{V}^{(2)}))\, \|(\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\, \widehat{P}^+)\varphi\|,$$

где $c_2 > 0$ — *универсальная константа.*

Теорема 1.5 является следствием теоремы 1.6 из [19]. Теорема 1.3 доказывается в следующем параграфе.

§ 2. Доказательство теоремы 1.3

Воспользуемся обозначениями и некоторыми утверждениями из [19, 20].

Пусть $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. Коэффициенты Фурье $\widehat{\mathcal{W}}_N$, $N \in \Lambda^*$, матричных функций $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K; \widetilde{\mathcal{S}}_4)$, коммутируют с ортогональными проекторами $\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}}$, $\widetilde{e} \in S^1(e)$. Для множеств $\mathcal{C} \subseteq \Lambda^*$ будем через $\widehat{P}^{\mathcal{C}}$ обозначать ортогональные проекторы в $L^2(K; \mathbb{C}^4)$, ставящие в соответствие вектор-функциям $\varphi \in L^2(K; \mathbb{C}^4)$ вектор-функции

$$\widehat{P}^{\mathcal{C}}\varphi = \sum_{N \in \mathcal{C}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}$$

(в частности, $\widehat{P}^{\varnothing} = \widehat{0}$).

Будем далее считать, что базисные векторы E_j, $j = 1, 2, 3$, решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ выбраны так, что

$$\prod_{j=1}^{3} |E_j| \leqslant c_3 \operatorname{mes} K, \tag{2.1}$$

где $c_3 > 0$ — некоторая универсальная константа (при этом $\operatorname{mes} K$ от выбора базиса $\{E_j\}$ не зависит). Для этого достаточно выбрать вектор $E_1 = \widetilde{\gamma}$, после этого из множества $\Lambda \setminus \{m_1 E_1 : m_1 \in \mathbb{Z}\}$ выбрать вектор E_2 с минимальной длиной и, наконец, из множества $\Lambda \setminus \{m_1 E_1 + m_2 E_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ выбрать вектор E_3, также имеющий минимальную длину. Тогда векторы E_j, $j = 1, 2, 3$, образуют базис решетки Λ и удовлетворяют неравенству (2.1).

Число $\varkappa_0 > 0$ будет далее выбираться достаточно большим и оценки снизу для него будут приведены по ходу доказательства. Вначале предположим, что $\varkappa_0 > 4$ и $\varkappa_0 \geqslant 8\pi \operatorname{diam} K^*$, где $\operatorname{diam} K^*$ — диаметр элементарной ячейки K^* (и в дальнейшем предполагается, что эти неравенства выполнены). Пусть $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, $l = l(K^*) \in \mathbb{Z}$ — наименьшее число, для которого $2^l > 2\pi \operatorname{diam} K^*$, и $L = L(\varkappa) \in \mathbb{N}$ — наибольшее число, для которого $2^{L+1} \leqslant \varkappa$ (тогда $l \leqslant L$ и $\varkappa < 2^{L+2}$).

Пусть $k \in \mathbb{K}(e)$. Обозначим

$$\mathcal{K}(b) = \{N \in \Lambda^* : G^-_N(k; \varkappa) \leqslant b\}, \quad b \in [0, \varkappa)$$

(множество $\mathcal{K}(b)$ зависит также от k и $\varkappa$). При $b > 2\pi \operatorname{diam} K^*$ (и $b < \varkappa$) для числа элементов множества $\mathcal{K}(b)$ справедлива оценка

$$\#\,\mathcal{K}(b) \leqslant c_4\,(\operatorname{mes} K^*)^{-1}\varkappa b^2,$$

где $c_4 > 0$ — универсальная константа. Если $N,\,N' \in \mathcal{K}(2^L)$, то

$$|\widetilde{e}(k+2\pi N) - \widetilde{e}(k+2\pi N')| \leqslant \frac{4\pi}{\varkappa}\,|N_\perp - N'_\perp|.$$

Обозначим

$$\mathcal{K}_l = \mathcal{K}(2^l), \quad \mathcal{K}_\mu = \mathcal{K}(2^\mu)\backslash\mathcal{K}(2^{\mu-1}), \quad \mu = l+1, l+2, \dots, L\,; \quad \widehat{P}^{(\pm)} = \widehat{P}^{\,\pm}\,\widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}.$$

Имеет место равенство $\widehat{P}^{(+)} + \widehat{P}^{(-)} = \widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}$. Для любой вектор-функции $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$

$$\sqrt{\frac{\pi}{|\gamma|}}\;\|\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_l}\varphi\| \leqslant \|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_l}\varphi\| \leqslant h^{\frac{l}{2}}\,\|\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_l}\varphi\|, \tag{2.2}$$

$$2^{\frac{\mu-1}{2}}\,\|\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant \|\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant 2^{\frac{\mu}{2}}\,\|\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_\mu}\varphi\|, \quad \mu = l+1,\dots,L. \tag{2.3}$$

Положим

$$q_\mu = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\gamma|}{\pi}}\,2^{\frac{l-1}{2}}, & \text{если } \ \mu = l, \\ \quad 1, & \text{если } \ \mu = l+1,\dots,L. \end{cases}$$

При этом

$$q_l^2 \;>\; |\gamma|\,\operatorname{diam} K^* \;>\; |\widetilde{\gamma}|\cdot|E_1^*| \;\geqslant\; (E_1, E_1^*) \;=\; 1.$$

Получим также оценку сверху для q_l^2. Пусть среди базисных векторов E_j^* (решетки Λ^*), $j = 1,2,3$, вектор E_s^* имеет максимальную длину. Тогда $\operatorname{diam} K^* \;<\; 3\,|E_s^*|$. Используя (2.1), получаем

$$c_3^{-1}\prod_{j=1}^{3}|E_j| \;\leqslant\; \operatorname{mes} K \;\leqslant\; \Bigl(E_s, \frac{E_s^*}{|E_s^*|}\Bigr)\prod_{j:\,j\neq s}|E_j| \;=\; |E_s^*|^{-1}\prod_{j:\,j\neq s}|E_j|.$$

Тогда $|E_s|\cdot|E_s^*| \leqslant c_3$ и, следовательно,

$$q_l^2 \leqslant \frac{|\gamma|}{|\widetilde{\gamma}|}\,\frac{|\widetilde{\gamma}|}{\pi}\,2^{\,l-1} \leqslant 2\,\frac{|\gamma|}{|\widetilde{\gamma}|}\,|E_s|\operatorname{diam} K^* \leqslant 6\;\frac{|\gamma|}{|\widetilde{\gamma}|}\;|E_s|\cdot|E_s^*| \leqslant 6\,c_3\,\frac{|\gamma|}{|\widetilde{\gamma}|}\,. \tag{2.4}$$

Из (2.2) и (2.3) следуют неравенства

$$\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant q_\mu\,2^{-\frac{\mu-1}{2}}\,\|\,\widehat{P}^{\,\mathcal{K}_\mu}\varphi\,\|, \quad \mu = l, l+1,\dots,L. \tag{2.5}$$

Для матричных функций $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$, всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{\,+} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{\,-})\widehat{V}^{(1)}\varphi\| \;\leqslant \tag{2.6}$$

$$\leqslant\; \|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)})\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}\varphi\| \;+\; \|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)})\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\Lambda^*\backslash\mathcal{K}(2^L)}\varphi\| \,+$$

$$+\,\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{\,+} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{\,-})\widehat{P}^{\,\Lambda^*\backslash\mathcal{K}(2^L)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}\varphi\| \,+$$

$$+\,\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{\,+} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{\,-})\widehat{P}^{\,\Lambda^*\backslash\mathcal{K}(2^L)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\Lambda^*\backslash\mathcal{K}(2^L)}\varphi\|,$$

при этом

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)} + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)})\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}\varphi\| \leqslant \tag{2.7}$$

$$\leqslant \|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{(-)}\varphi\| \;+\; \|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{(+)}\varphi\| \;+\; \|\widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{\,\mathcal{K}(2^L)}\varphi\|\,.$$

В [19] доказано, что существует универсальная константа $c_5 > 0$ такая, что для любой матричной функции $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\varkappa_0' > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0'$, всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^4)$ последние три слагаемых в правой части неравенства (2.6) и последние два слагаемых в правой части неравенства (2.7) не превосходят

$$c_5\,\bigl(\varepsilon + \|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr)\ \|(\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{P}^+)\varphi\|$$

(для матричных функций $\widehat{V}^{(1)} \in L^3(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ (для которых $\|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} = 0$) доказательство этих оценок приведено также в [20]). Поэтому при $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_0'$ (и $\varkappa \geqslant \varkappa_0$) из (2.6) и (2.7) (а также из неравенства $\|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty),\,\mathrm{loc}}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant \|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}$, которое справедливо для всех матричных функций $\widehat{V}^{(1)} \in L^3_w(K;\mathcal{M}_4)$) следует оценка

$$\|(\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^+ + \widehat{G}_+^{-\frac12}\widehat{P}^-)\widehat{V}^{(1)}\varphi\| \leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant \|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{(-)}\varphi\| \,+\, 5c_5\,\bigl(\varepsilon + \|\widehat{V}^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr)\,\|(\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^- + \widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{P}^+)\varphi\|.$$

Доказательство теоремы 1.3 теперь сводится к получению соответствующей оценки сверху для нормы $\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{P}^{(-)}\varphi\|$.

Обозначим

$$\widehat{P}^{(\pm)}_\mu = \widehat{P}^{\pm}\widehat{P}^{\mathcal{K}_\mu}, \quad \mu = l, l+1, \ldots, L\,; \quad \widehat{P}^{(\pm)} = \sum_{\mu=l}^{L}\widehat{P}^{(\pm)}_\mu.$$

Для чисел $\mu,\nu \in \{l,\ldots,L\}$ положим $j(\mu,\nu) \doteq \mu+\nu+\min\{\mu,\nu\}$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *(и* $e = |\gamma|^{-1}\gamma$*). Тогда для любой периодической (с решеткой периодов* $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$*) матричной функции* $\widehat{\mathcal{W}} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ *и любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\theta > 0$ *найдется число* $\varkappa_0 > 4$ *такое, что для любого* $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ *существует число* $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_1^{1+\theta}]$ *такое, что для всех* $\mu,\nu = l,\ldots,L(\varkappa)$*, всех векторов* $k \in \mathbb{K}(e)$ *и всех вектор-функций* $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$

$$\|\widehat{P}^{(+)}_\mu\widehat{\mathcal{W}}\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant c_6\left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{\frac13}\bigl(\varepsilon + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr)2^{\,\frac13 j(\mu,\nu)}\|\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\|, \tag{2.9}$$

где $c_6 > 0$ *— универсальная константа.*

Теорема 2.1 доказывается в § 3, а в оставшейся части этого параграфа с помощью теоремы 2.1 завершим доказательство теоремы 1.3.

Введем краткое обозначение

$$\mathcal{P}(\widehat{V}^{(1)}) \,=\, c_6\left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{\frac13}\bigl(\varepsilon + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr).$$

Учитывая (2.5) и определение чисел q_μ, для выбираемых в теореме 2.1 для матричной функции $\widehat{\mathcal{W}} = \widehat{V}^{(1)}$ чисел $\varkappa$ и для всех $\mu,\nu = l,\ldots,L(\varkappa)$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$ с помощью оценки (2.9) получаем

$$\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}_\mu\widehat{V}^{(1)}\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant$$

$$\leqslant\, 2\,\mathcal{P}(\widehat{V}^{(1)})\,q_\mu q_\nu\,2^{-\frac{\mu+\nu}{2}+\frac13 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\| \,\leqslant\, 2\,q_l^2\,\mathcal{P}(\widehat{V}^{(1)})\,2^{-\frac16|\mu-\nu|}\,\|\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\|$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}\widehat{V}^{(1)}\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)}\psi\|^2 = \sum_{\mu=l}^{L}\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}_\mu\widehat{V}^{(1)}\widehat{G}_-^{-\frac12}\left(\sum_{\nu=l}^{L}\widehat{P}^{(-)}_\nu\right)\psi\|^2 \,\leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant \sum_{\mu=l}^{L}\left(\sum_{\nu=l}^{L}\|\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(+)}_\mu\widehat{V}^{(1)}\widehat{G}_-^{-\frac12}\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\|\right)^2 \,\leqslant\, \bigl(2\,q_l^2\,\mathcal{P}(\widehat{V}^{(1)})\bigr)^2\sum_{\mu=l}^{L}\left(\sum_{\nu=l}^{L}2^{-\frac16|\mu-\nu|}\,\|\widehat{P}^{(-)}_\nu\psi\|\right)^2.$$

При этом

$$\sum_{\mu=l}^{L}\Big(\sum_{\nu=l}^{L}2^{-\frac16|\mu-\nu|}\,\|\widehat P_\nu^{(-)}\psi\|\Big)^2\leqslant\sum_{\mu=l}^{L}\Big(\sum_{\nu=l}^{L}2^{-\frac16|\mu-\nu|}\Big)\Big(\sum_{\nu=l}^{L}2^{-\frac16|\mu-\nu|}\,\|\widehat P_\nu^{(-)}\psi\|^2\Big)\leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant\Big(\frac{1+2^{-\frac16}}{1-2^{-\frac16}}\Big)\sum_{\nu=l}^{L}\Big(\sum_{\mu=l}^{L}h^{-\frac16|\mu-\nu|}\Big)\|\widehat P_\nu^{(-)}\psi\|^2\leqslant\Big(\frac{1+2^{-\frac16}}{1-2^{-\frac16}}\Big)^2\sum_{\nu=l}^{L}\|\widehat P_\nu^{(-)}\psi\|^2\leqslant 81\,\|\widehat P^{(-)}\psi\|^2.$$

Из (2.10) и (2.11) (см. также (2.4)) вытекает оценка

$$\|\widehat G_-^{-\frac12}\widehat P^{(+)}\widehat V^{(1)}\widehat G_-^{-\frac12}\widehat P^{(-)}\psi\|\leqslant 108\,c_3c_6\,\frac{|\gamma|}{|\widetilde\gamma|}\Big(\frac{1+\theta}{\theta}\Big)^{\frac13}\big(\varepsilon+\|\widehat V^{(1)}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal M_4)}\big)\|\widehat P^{(-)}\psi\|.$$

Осталось в полученном неравенстве сделать замену $\psi=\widehat G_-^{\frac12}\widehat P^{(-)}\varphi$, $\varphi\in\widetilde H^1(K;\mathbb C^4)$, и воспользоваться неравенством (2.8) (при выборе достаточно большого числа $\varkappa_0\geqslant\varkappa_0'$). При этом можно положить $c_1=5c_5+108\,c_3c_6$. Теорема 1.3 доказана. □

§ 3. Доказательство теоремы 2.1

Для $n\in\Lambda^*$ и $\mu,\nu\in\{l,\dots,L(\varkappa)\}$ (при $\varkappa\geqslant\varkappa_0$ и $k\in\mathbb K(e)$) пусть $S_{\mu\nu}(n)$ — число векторов $N\in\mathcal K_\mu$ таких, что $N-n\in\mathcal K_\nu$. Если $2\pi|n_\perp|>2\varkappa+2^{\mu}+2^{\nu}$ или $2\pi|n_\parallel|>2^{\mu}+2^{\nu}$, то $S_{\mu\nu}(n)=0$. Существует универсальная константа $c_7>0$ такая, что для всех $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$ и всех векторов $n\in\Lambda^*$, для которых $\pi|n_\perp|\leqslant\varkappa+2^{\max\{\mu,\nu\}}$ (и $\pi|n_\parallel|\leqslant 2^{\max\{\mu,\nu\}}$), справедлива оценка

$$S_{\mu\nu}(n)\leqslant\frac{c_7}{\operatorname{mes}K^*}\cdot\frac{2^{\,j(\mu,\nu)}\,\varkappa^{\frac32}}{(\pi|n_\perp|+2^{\max\{\mu,\nu\}})\sqrt{\varkappa+2^{1+\max\{\mu,\nu\}}-\pi|n_\perp|}} \tag{3.1}$$

(так как $2^{\,l}>2\pi\operatorname{diam}K^*$ и $2^{\,L}<\varkappa-2\pi\operatorname{diam}K^*$, то оценка (3.1) следует из соответствующей оценки сверху для площади пересечения двух колец в $\mathbb R^2$ с внешними и внутренними радиусами $\varkappa\pm(2^{\mu}+2\pi\operatorname{diam}K^*)$ и $\varkappa\pm(2^{\nu}+2\pi\operatorname{diam}K^*)$ и с расстоянием между центрами $2\pi|n_\perp|$). Доказательство оценки (3.1) (в более общем виде) приведено в [20] (см. также [10, 16]).

Выберем (и зафиксируем) четную функцию Ω из пространства Шварца $\mathcal S(\mathbb R^3;\mathbb R)$, для которой преобразование Фурье

$$\widehat\Omega(p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb R^3}\Omega(x)\,e^{-i\,(p,x)}\,dx\,,\quad p\in\mathbb R^3,$$

обладает следующими свойствами: $\widehat\Omega(p)=1$ при $|p|\leqslant1$, $0\leqslant\widehat\Omega(p)\leqslant1$ при $1<|p|<\frac32$ и $\widehat\Omega(p)=0$ при $|p|\geqslant\frac32$. При $b>0$ обозначим

$$\Omega_b(x)\doteq b^3\Omega(bx),\quad x\in\mathbb R^3.$$

Тогда $\|\Omega_b\|_{L^1(\mathbb R^3)}=\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}$ и $\widehat{\Omega_b}(p)=\widehat\Omega(\frac pb)$, $p\in\mathbb R^3$.

Пусть $\widehat{\mathcal W}\in L^2(K;\mathcal M_4)$. При $a>0$ определим функции

$$\mathbb R^3\ni x\mapsto\widehat{\mathcal W}_{a,\uparrow}(x)=\begin{cases}\widehat{\mathcal W}(x)\,, & \text{если } \|\widehat{\mathcal W}(x)\|_{\mathcal M_4}\geqslant a,\\ \widehat 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$\widehat{\mathcal W}_{a,\downarrow}(x)=\widehat{\mathcal W}(x)-\widehat{\mathcal W}_{a,\uparrow}(x),\quad x\in\mathbb R^3.$$

Обозначим

$$\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{in}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb R^3}\Omega_b(y)\,\widehat{\mathcal W}(x-y)\,dy\,,\quad\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{out}}(x)=\widehat{\mathcal W}(x)-\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{in}}(x),\quad b>0;$$

$$\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{in}}_{a,\uparrow\downarrow}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb R^3}\Omega_b(y)\,\widehat{\mathcal W}_{a,\uparrow\downarrow}(x-y)\,dy,\quad\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{out}}_{a,\uparrow\downarrow}(x)=\widehat{\mathcal W}_{a,\uparrow\downarrow}(x)-\widehat{\mathcal W}^{\,b,\,\mathrm{in}}_{a,\uparrow\downarrow}(x).$$

Для любой матричной функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\mathcal{M}_4)$ операторы $\widehat{P}^{(+)}_{\mu}\widehat{\mathcal{W}}\widehat{P}^{(-)}_{\nu}$ (действующие в $L^2(K;\mathbb{C}^4)$) ограничены. Если $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$, то для всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$ справедливы оценки

$$\|\widehat{P}^{(+)}_{\mu}\widehat{\mathcal{W}}\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|^2 = \tag{3.2}$$

$$= (\operatorname{mes} K) \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu} \Big\| \sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} \widehat{P}^{+}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\widehat{\mathcal{W}}_n\widehat{P}^{-}_{\widetilde{e}(k+2\pi(N-n))}\psi_{N-n}\Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac14 (\operatorname{mes} K) \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu}\Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} |\,\widetilde{e}(k+2\pi N)-\widetilde{e}(k+2\pi(N-n))\,|\cdot \|\widehat{\mathcal{W}}_n\|_{\mathcal{M}_4}\|(\widehat{P}^{\,-}\psi)_{N-n}\|\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{mes} K)\,\varkappa^{-2}\sum_{N\in\mathcal{K}_\mu}\Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} 2\pi|n_\perp|\,\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|_{\mathcal{M}_4}\|(\widehat{P}^{\,-}\psi)_{N-n}\|\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{mes} K)\,\varkappa^{-2}\sum_{N\in\mathcal{K}_\mu}\Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}}(2\pi|n_\perp|)^2\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}\Big)\Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}}\|(\widehat{P}^{\,-}\psi)_{N-n}\|^2\Big) =$$

$$= \varkappa^{-2}\Big(\sum_{n\in\Lambda^*}\Big(\sum_{N\in\mathcal{K}_{\mu\nu}(n)}1\Big)(2\pi|n_\perp|)^2\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}\Big)\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|^2 =$$

$$= \varkappa^{-2}\Big(\sum_{n\in\Lambda^*}S_{\mu\nu}(n)\,(2\pi|n_\perp|)^2\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}\Big)\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|^2.$$

Так как $(\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}})_n = \widehat{\Omega}\big(\frac{2\pi n}{\varkappa}\big)\widehat{\mathcal{W}}_n$, $n\in\Lambda^*$, то $(\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}})_n = \widehat{0}$ при всех $n\in\Lambda^*$, для которых $2\pi|n| \geqslant \frac32\varkappa$. С другой стороны, если $2\pi|n| < \frac32\varkappa$, то $\varkappa + 2^{\,1+\max\{\mu,\nu\}} - \pi|n_\perp| > \frac14\varkappa$ (для всех $\mu,\nu = l,\dots,L$). Поэтому из (3.1) и (3.2) при $\varkappa\geqslant\varkappa_0$ (и для всех $\mu,\nu = l,\dots,L(\varkappa)$, всех $k\in\mathbb{K}(e)$ и всех $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^4)$) получаем

$$\|\widehat{P}^{(+)}_{\mu}\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}}\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\| \leqslant 2\,(c_7\operatorname{mes}K)^{\frac12}\Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ 2\pi|n|<\frac32\varkappa}}\frac{2\pi|n|}{\varkappa}\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}\Big)^{\frac12}2^{\,\frac12 j(\mu,\nu)}\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\| \leqslant \tag{3.3}$$

$$\leqslant (6c_7\operatorname{mes}K)^{\frac12}\Big(\sum_{n\in\Lambda^*}\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}\Big)^{\frac12}2^{\,\frac12 j(\mu,\nu)}\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\| \leqslant 2\sqrt{6c_7}\,\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_4)}\,2^{\,\frac12 j(\mu,\nu)}\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|.$$

Следствием (первого неравенства в) (3.3) является

Л е м м а 3.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$. Тогда для любых $\varepsilon' > 0$ и $\mu,\nu\in\{l,l+1,\dots\}$ существует число $\varkappa_0^* = \varkappa_0^*(\mu,\nu;\varepsilon',\widehat{\mathcal{W}}) > 0$ такое, что $\max\{\mu,\nu\}\leqslant L(\varkappa_0^*)$ и для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0^*$, всех векторов $k\in\mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|\widehat{P}^{(+)}_{\mu}\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}}\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\| \leqslant \varepsilon'\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|.$$

Т е о р е м а 3.1. *Существует универсальная константа $C^* > 0$ такая, что для любой матричной функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0 > \max\{4, 8\pi\operatorname{diam}K^*\}$, всех $\mu,\nu = l,\dots,L(\varkappa)$, всех векторов $k\in\mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|\widehat{P}^{(+)}_{\mu}\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}}\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\| \leqslant C^*\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\,2^{\,\frac13 j(\mu,\nu)}\|\widehat{P}^{(-)}_{\nu}\psi\|. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 3.1 справедлива, если $\widehat{\mathcal{W}}(x) = \widehat{0}$ при п. в. (почти всех) $x\in\mathbb{R}^3$. Поэтому можно считать, что $\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} > 0$. Для всех $j\in\mathbb{Z}$ (для которых $j\geqslant 3l$) выберем числа $a_j = \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\,2^{\,\frac13 j}$. При п. в. $x\in\mathbb{R}^3$ имеет место оценка

$$\|\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\mathrm{in}}_{a_j,\downarrow}(x)\| \leqslant (2\pi)^{-3}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,a_j.$$

Поэтому (для всех $\mu, \nu = l, \ldots, L(\varkappa)$)

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{a_{j(\mu,\nu)},\downarrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant (2\pi)^{-3}\, \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\, \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\, 2^{\frac{1}{3}\, j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|. \tag{3.5}$$

С другой стороны, из неравенства (3.3) (в котором вместо функции $\widehat{\mathcal{W}}$ рассматриваются функции $\widehat{\mathcal{W}}_{a_j,\uparrow}$) получаем

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant 2\sqrt{6c_7}\, \|\widehat{\mathcal{W}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_4)}\, 2^{\frac{1}{2}\, j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|.$$

Обозначим

$$K_s^{(j)} = \{x \in K : 2^{s-1} a_j < \|\widehat{\mathcal{W}}(x)\|_{\mathcal{M}_4} \leqslant 2^s a_j\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Так как

$$\operatorname{mes} K_s^{(j)} \leqslant \bigl(2^{-s+1} a_j^{-1} \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr)^3,$$

то

$$a_j\, \|\widehat{\mathcal{W}}_{a_j,\uparrow}\|^2_{L^2(K;\mathcal{M}_4)} = a_j \sum_{s\,\in\,\mathbb{N}} \int_{K_s^{(j)}} \|\widehat{\mathcal{W}}(x)\|^2_{\mathcal{M}_4}\, dx \leqslant 8\, \|\widehat{\mathcal{W}}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \tag{3.6}$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant 8\sqrt{3c_7}\, \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\, 2^{\frac{1}{3}\, j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|. \tag{3.7}$$

Теперь неравенство (3.4) непосредственно следует из оценок (3.5) и (3.7), если воспользоваться равенствами $\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}} = \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{a_{j(\mu,\nu)},\downarrow} + \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow}$ (при $\mu, \nu = l, \ldots, L(\varkappa)$). При этом можно положить $C^* = 8\sqrt{3c_7} + (2\pi)^{-3} \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$. $\square$

Т е о р е м а 3.2. *Для любых матричной функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и числа $\varepsilon > 0$ существует число $\widetilde{\varkappa}_0^* = \widetilde{\varkappa}_0^*(\varepsilon, \widehat{\mathcal{W}}) > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0 \geqslant \widetilde{\varkappa}_0^*$, всех $\mu, \nu = l, \ldots, L(\varkappa)$, всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant C^* \bigl(\varepsilon + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\bigr)\, 2^{\frac{1}{3}\, j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|\,, \tag{3.8}$$

где $C^* > 0$ — универсальная константа из теоремы 3.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $t_0 > 0$, для которого

$$\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}. \tag{3.9}$$

В силу теоремы 3.1 (при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, при всех $\mu, \nu = l, \ldots, L(\varkappa)$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$)

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{t_0,\uparrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant C^* \Bigl(\frac{\varepsilon}{2} + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\Bigr)\, 2^{\frac{1}{3}\, j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|. \tag{3.10}$$

Так как $\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\downarrow}(x)\|_{\mathcal{M}_4} \leqslant t_0$ при п. в. $x \in \mathbb{R}^3$, то также выполняются оценки

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{t_0,\downarrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant (2\pi)^{-3}\, \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\; t_0\, \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|. \tag{3.11}$$

Пусть $J \in \mathbb{Z}$ — наименьшее число, для которого

$$(2\pi)^{-3}\, \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\; t_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, C^*\, 2^{\frac{1}{3}\, J}.$$

Если $j(\mu,\nu) \geqslant J$, то из (3.11) получаем

$$\|\widehat{P}_\mu^{(+)} \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{t_0,\downarrow} \widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, C^*\, 2^{\frac{1}{3}\, j(\mu,\nu)}\, \|\widehat{P}_\nu^{(-)} \psi\|. \tag{3.12}$$

С другой стороны, множество $\mathcal{Q}_J$ упорядоченных пар (μ,ν) чисел $\mu, \nu \in \{l, \ldots, L(\varkappa)\}$, для которых $j(\mu,\nu) < J$, конечно (или пусто) и для таких упорядоченных пар $2\max\{\mu,\nu\} < J - l$.

Поэтому из леммы 3.1 следует существование такого числа $\widetilde{\varkappa}_0^* > 0$, что при всех $(\mu,\nu) \in \mathcal{Q}_J$ выполняется неравенство $\max\{\mu,\nu\} \leqslant L(\widetilde{\varkappa}_0^*)$ и при всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0 \geqslant \widetilde{\varkappa}_0^*$, всех $(\mu,\nu) \in \mathcal{Q}_J$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$ имеет место оценка (3.12). Следовательно, оценка (3.12) справедлива при всех $\mu,\nu = l,\dots,L(\varkappa)$. Теперь неравенство (3.8) непосредственно следует (при $\varkappa \geqslant \varkappa_0 \geqslant \widetilde{\varkappa}_0^*$) из (3.10) и (3.12) (и равенства $\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}} = \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{t_0,\uparrow} + \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}}_{t_o,\downarrow}$). $\square$

Теперь получим оценку сверху для норм $\|\widehat{P}^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}} \widehat{P}^{(-)}_\nu \psi\|$. Пусть $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$. Так как $\big(\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}\big)_n = \big(1 - \widehat{\Omega}\big(\frac{2\pi n}{\varkappa}\big)\big)\,\widehat{\mathcal{W}}_n$, $n \in \Lambda^*$, то $\big(\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}\big)_n = \widehat{0}$ при всех $n \in \Lambda^*$, для которых $2\pi|n| \leqslant \varkappa$. Используя оценку $2\pi|N - N'| < 2(\varkappa + 2^\mu + 2^\nu) \leqslant 4\varkappa$, выполняющуюся при $N \in \mathcal{K}_\mu$ и $N' \in \mathcal{K}_\nu$, из (3.1) и (3.2) для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех $\mu,\nu = l,\dots,L(\varkappa)$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$ получаем

$$\|\widehat{P}^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}} \widehat{P}^{(-)}_\nu \psi\| \leqslant \tag{3.13}$$

$$\leqslant (6c_7 \,\mathrm{mes}\, K)^{\frac12} \Bigg(\sqrt{\varkappa} \sum_{\substack{n \in \Lambda^*: \\ \pi|n_\perp| \leqslant \varkappa + 2^{\max\{\mu,\nu\}}, \\ \varkappa \leqslant 2\pi|n| < 4\varkappa}} \frac{\|\widehat{\mathcal{W}}_n\|^2_{\mathcal{M}_4}}{\sqrt{\varkappa + 2^{\,1+\max\{\mu,\nu\}} - \pi|n_\perp|}}\Bigg)^{\frac12} 2^{\,\frac12 j(\mu,\nu)}\, \|\widehat{P}^{(-)}_\nu \psi\|.$$

Т е о р е м а 3.3. *Для любых периодической (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$) матричной функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^3_w(K;\widetilde{\mathcal{S}}_4)$ и чисел $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ существует число $\varkappa_0'' > 4$ такое, что для любого $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0 \geqslant \varkappa_0''$ найдется число $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_1^{1+\theta}]$ такое, что для всех $\mu,\nu = l,\dots,L(\varkappa)$, всех векторов $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$*

$$\|\widehat{P}^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}} \widehat{P}^{(-)}_\nu \psi\| \leqslant \widetilde{C}^* \Big(\frac{1+\theta}{\theta}\Big)^{\frac13} \big(\varepsilon + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\big)\, 2^{\,\frac13 j(\mu,\nu)} \|\widehat{P}^{(-)}_\nu \psi\|, \tag{3.14}$$

где $\widetilde{C}^* > 0$ — универсальная константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 3.2, выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство (3.9). Обозначим $\widehat{\mathcal{V}} = \widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}$. Пусть

$$a_j = \Big(\frac{1+\theta}{\theta}\Big)^{\frac13} \Big(\frac{\varepsilon}{2} + \|\widehat{\mathcal{W}}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}\Big)\, 2^{\,\frac13 j}, \quad j = 3l, 3l+1, \dots .$$

Из (3.6) следуют оценки

$$\|\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow}\|^2_{L^2(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant 8a_j^{-1}\, \|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}.$$

Будем далее считать, что $\varkappa_0^\theta \geqslant 8$. Пусть $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$. Выберем число $s_0 \in \mathbb{N}$ так, что $8^{s_0}\varkappa_1 \leqslant \varkappa_1^{1+\theta} < 8^{s_0+1}\varkappa_1$. Для чисел $s = 0,1,\dots,s_0$ определим числа $\varkappa_1^{(s)} = 8^s\varkappa_1$. Обозначим $L_s \doteq L(2\varkappa_1^{(s)})$; $L_s \leqslant 3s + \frac{\ln\varkappa_1}{\ln 2}$. Число $\varkappa_0$ будет выбираться достаточно большим так, чтобы для числа s_0 (при всех $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$) выполнялись неравенства

$$s_0^{-1}(3L_{s_0} - 3l + 1) \leqslant 6s_0^{-1}L_{s_0} \leqslant 6\Big(3 + \frac{1}{s_0}\,\frac{\ln\varkappa_1}{\ln 2}\Big) < 18\Big(\frac{1+\theta}{\theta} + \frac{1}{\theta s_0}\Big) < 20\,\frac{1+\theta}{\theta}$$

(дополнительные условия на выбор числа $\varkappa_0$ будут приведены в дальнейшем). Справедливы оценки

$$\frac{1}{s_0}\sum_{s=0}^{s_0-1}\sum_{j=3l}^{3L_s} a_j \sum_{\substack{n \in \Lambda^*: \\ \varkappa_1^{(s)} \leqslant 2\pi|n| < 8\varkappa_1^{(s)}}} \|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4} \leqslant \frac{1}{s_0}\sum_{j=3l}^{3L_{s_0}} a_j \sum_{s=0}^{s_0-1} \sum_{\substack{n \in \Lambda^*: \\ \varkappa_1^{(s)} \leqslant 2\pi|n| < 8\varkappa_1^{(s)}}} \|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s_0}\sum_{j=3l}^{3L_{s_0}} a_j \sum_{\substack{n \in \Lambda^*: \\ \varkappa_1^{(0)} \leqslant 2\pi|n| < 8\varkappa_1^{(s_0)}}} \|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4} \leqslant \frac{4}{s_0}\,(\mathrm{mes}\,K)^{-1} \sum_{j=3l}^{3L_{s_0}} a_j\, \|\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow}\|^2_{L^2(K;\mathcal{M}_4)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{32}{s_0}\,(\operatorname{mes} K)^{-1}\,(3L_{s_0}-3l+1)\,\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)} \;\leqslant\; 640\,(\operatorname{mes} K)^{-1}\,\frac{1+\theta}{\theta}\,\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)},$$

из которых вытекает существование числа $s\in\{0,1,\dots,s_0-1\}$ такого, что

$$\sum_{j\,=\,3l}^{3L_s} a_j \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4} \;\leqslant\; 640\,(\operatorname{mes} K)^{-1}\,\frac{1+\theta}{\theta}\,\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}. \tag{3.15}$$

Определим функции

$$\mathbb{R}\ni\xi\mapsto\mathcal{G}^{(s)}(\xi)=\begin{cases}0, & \text{если }\ \xi<-2^{L_s},\\ \left(\xi+2^{1+\lambda}\right)^{-\frac12}, & \text{если }\ -2^{\lambda}\leqslant\xi<-2^{\lambda-1},\ \ \lambda=l+1,\dots,L_s,\\ \left(\xi+2^{1+l}\right)^{-\frac12}, & \text{если }\ \xi\geqslant-2^{l},\end{cases}$$

и при всех $\varkappa\in[\varkappa_1^{(s)},2\varkappa_1^{(s)}]$ обозначим

$$\mathcal{F}(\varkappa) \;=\; \sqrt{2\varkappa_1^{(s)}}\,\sum_{j\,=\,3l}^{3L_s} a_j \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \mathcal{G}^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)\;\|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_j,\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4},$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\varkappa) \;=\; \sqrt{2\varkappa_1^{(s)}} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \mathcal{G}^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)\;\|(\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4}.$$

Так как при всех $\xi<-2^l$ имеет место оценка $\mathcal{G}^{(s)}(\xi)<\left(-\xi-2^{1+l}\right)^{-\frac12}$, то

$$\left(\varkappa_1^{(s)}\right)^{-1}\int_{\varkappa_1^{(s)}}^{2\varkappa_1^{(s)}} \mathcal{G}^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)\,d\varkappa \;\leqslant\; 4\left(\varkappa_1^{(s)}\right)^{-\frac12}$$

и, следовательно (см. (3.15)),

$$\left(\varkappa_1^{(s)}\right)^{-1}\int_{\varkappa_1^{(s)}}^{2\varkappa_1^{(s)}} \mathcal{F}(\varkappa)\,d\varkappa \;\leqslant\; 2560\sqrt{2}\,(\operatorname{mes} K)^{-1}\,\frac{1+\theta}{\theta}\;\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)},$$

$$\left(\varkappa_1^{(s)}\right)^{-1}\int_{\varkappa_1^{(s)}}^{2\varkappa_1^{(s)}} \widetilde{\mathcal{F}}(\varkappa)\,d\varkappa \;\leqslant\; 4\sqrt{2} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \|(\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4}.$$

Откуда вытекает существование числа $\varkappa\in[\varkappa_1^{(s)},2\varkappa_1^{(s)}]$ (именно такое число рассматривается в дальнейшем), для которого

$$\mathcal{F}(\varkappa) \;\leqslant\; 5120\sqrt{2}\;(\operatorname{mes} K)^{-1}\,\frac{1+\theta}{\theta}\;\|\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal{M}_4)}, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\varkappa) \;\leqslant\; 8\sqrt{2} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \|(\widehat{\mathcal{W}}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4}. \tag{3.17}$$

С другой стороны, так как для всех μ, $\nu=l,\dots,L(\varkappa)$ и всех $n\in\Lambda^*$, для которых $\pi|n_\perp|\leqslant$ $\leqslant\varkappa+2^{\max\{\mu,\nu\}}$, справедливо неравенство $\left(\varkappa+2^{1+\max\{\mu,\nu\}}-\pi|n_\perp|\right)^{-\frac12}\leqslant\mathcal{G}^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)$, то для всех $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$

$$\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \pi\,|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa+2^{\max\{\mu,\nu\}},\\ \varkappa\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,4\varkappa}} \frac{\|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4}}{\sqrt{\varkappa+2^{1+\max\{\mu,\nu\}}-\pi|n_\perp|}} \;\leqslant\; \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\,\leqslant\,2\pi|n|\,<\,8\varkappa_1^{(s)}}} \mathcal{G}^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)\;\|(\widehat{\mathcal{V}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow})_n\|^2_{\mathcal{M}_4},$$

$$\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ \pi|n_\perp|\leqslant\varkappa+2^{\max\{\mu,\nu\}},\\ \varkappa\leqslant 2\pi|n|<4\varkappa}} \frac{\|(\widehat{\mathcal W}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal M_4}}{\sqrt{\varkappa+2^{1+\max\{\mu,\nu\}}-\pi|n_\perp|}} \ \leqslant \sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ \varkappa_1^{(s)}\leqslant 2\pi|n|<8\varkappa_1^{(s)}}} \mathcal G^{(s)}(\varkappa-\pi|n_\perp|)\ \|(\widehat{\mathcal W}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal M_4}.$$

Поэтому из (3.13) и (3.16), (3.17) для всех $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$, всех $k\in\mathbb K(e)$ и всех $\psi\in L^2(K;\mathbb C^4)$ получаем

$$\|\widehat P^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow}\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant c_8\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\ \|\widehat{\mathcal W}_{t_0,\uparrow}\|^3_{L^3_w(K;\mathcal M_4)}\Bigr)^{\frac12} a^{-\frac12}_{j(\mu,\nu)}\,2^{\frac12 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| = \tag{3.18}$$

$$= c_8\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\Bigr)^{\frac13}\|\widehat{\mathcal W}_{t_0,\uparrow}\|_{L^3_w(K;\mathcal M_4)}\,2^{\frac13 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\|,$$

$$\|\widehat P^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\downarrow}\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant c_9\Bigl((\mathrm{mes}\,K)\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ \varkappa_1\leqslant 2\pi|n|<\varkappa_1^{1+\theta}}}\|(\widehat{\mathcal W}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal M_4}\Bigr)^{\frac12} 2^{\frac12 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\|, \tag{3.19}$$

где $c_8=(30720\sqrt2\,c_7)^{\frac12}$, $c_9=(48\sqrt2\,c_7)^{\frac12}$.

При п. в. $x\in\mathbb R^3$

$$\|\widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{a_{j(\mu,\nu)},\downarrow}(x)\|_{\mathcal M_4} \leqslant \bigl(1+(2\pi)^{-3}\,\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}\bigr)\,a_{j(\mu,\nu)}.$$

Следовательно,

$$\|\widehat P^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{a_{j(\mu,\nu)},\downarrow}\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant \tag{3.20}$$

$$\leqslant \bigl(1+(2\pi)^{-3}\,\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}\bigr)\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\Bigr)^{\frac13}\|\widehat{\mathcal W}_{t_0,\downarrow}\|_{L^3_w(K;\mathcal M_4)}\,2^{\frac13 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\|.$$

Так как $\widehat{\mathcal W}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\uparrow}=\widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{a_{j(\mu,\nu)},\downarrow}+\widehat{\mathcal V}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{a_{j(\mu,\nu)},\uparrow}$, то из (3.18) и (3.20) для всех $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$, всех $k\in\mathbb K(e)$ и всех $\psi\in L^2(K;\mathbb C^4)$ вытекает оценка

$$\|\widehat P^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal W}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\uparrow}\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant \widetilde C^*\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\Bigr)^{\frac13}\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}+\|\widehat{\mathcal W}\|^{(\infty)}_{L^3_w(K;\mathcal M_4)}\Bigr)2^{\frac13 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\|, \tag{3.21}$$

где $\widetilde C^*=c_8+1+(2\pi)^{-3}\,\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}$.

Пусть теперь $J\in\mathbb Z$ — наименьшее число, для которого

$$\bigl(1+(2\pi)^{-3}\,\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}\bigr)\,t_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\widetilde C^*\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\Bigr)^{\frac13}2^{\frac13 J}.$$

При п. в. $x\in\mathbb R^3$ выполняется неравенство

$$\|\widehat{\mathcal W}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\downarrow}(x)\|_{\mathcal M_4} \leqslant \bigl(1+(2\pi)^{-3}\,\|\Omega\|_{L^1(\mathbb R^3)}\bigr)\,t_0.$$

Следовательно, для всех чисел $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$, для которых $j(\mu,\nu)\geqslant J$, всех $k\in\mathbb K(e)$ и всех $\psi\in L^2(K;\mathbb C^4)$

$$\|\widehat P^{(+)}_\mu \widehat{\mathcal W}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\downarrow}\widehat P^{(-)}_\nu\psi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\widetilde C^*\Bigl(\frac{1+\theta}{\theta}\Bigr)^{\frac13}2^{\frac13 j(\mu,\nu)}\,\|\widehat P^{(-)}_\nu\psi\|. \tag{3.22}$$

С другой стороны, существует конечное (или пустое) множество $\mathcal Q'_J$ упорядоченных пар (μ,ν) чисел $\mu,\nu=l,\dots,L(\varkappa)$, для которых $j(\mu,\nu)<J$, и для таких пар (как и при доказательстве теоремы 3.2) $2\max\{\mu,\nu\}<J-l$. Для каждой упорядоченной пары $(\mu,\nu)\in\mathcal Q'_J$ справедливо неравенство (3.19). При этом

$$\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ \varkappa_1\leqslant 2\pi|n|<\varkappa_1^{1+\theta}}}\|(\widehat{\mathcal W}_{t_0,\downarrow})_n\|^2_{\mathcal M_4} \ \to\ 0$$

при $\varkappa_1 \to +\infty$. Поэтому при выборе достаточно большого числа $\varkappa_0 > 4$ (в зависимости от решетки Λ, матричной функции $\widehat{\mathcal{W}}$ и чисел ε, θ) и при (любом) $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ для определенного выше числа $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_1^{1+\theta}]$ из оценки (3.19) при всех $(\mu,\nu) \in \mathcal{Q}'_J$ следует оценка (3.22). Но тогда оценка (3.22) справедлива при всех $\mu,\nu = l,\ldots,L(\varkappa)$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$. Доказываемая оценка (3.14) теперь следует (при всех $\mu,\nu = l,\ldots,L(\varkappa)$, всех $k \in \mathbb{K}(e)$ и всех $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^4)$) из (3.21) и (3.22), так как $\widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}} = \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\uparrow} + \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}_{t_0,\downarrow}$. $\square$

В силу равенства $\widehat{\mathcal{W}} = \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{in}} + \widehat{\mathcal{W}}^{\varkappa,\,\mathrm{out}}$ теорема 2.1 является следствием теорем 3.2 и 3.3.

Список литературы

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
3. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.1996, № 3855-В96.
4. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations // Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-3-0348-8573-7
5. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307.
6. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
7. Kuchment P., Levendorskii S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. No. 2. P. 537–569. DOI: 10.1090/S0002-9947-01-02878-1
8. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bull. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 53. No. 3. P. 343–413. DOI: 10.1090/bull/1528
9. Данилов Л.И. О спектре оператора Дирака в $\mathbb{R}^n$ с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1990. Т. 85. № 1. С. 41–53.
10. Данилов Л.И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 103. № 1. С. 3–22.
11. Данилов Л.И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 233–240.
12. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118. № 1. С. 3–14.
13. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous // Integr. Equat. Oper. Theory. 1999. Vol. 34. P. 377–395. DOI: 10.1007/BF01272881
14. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 124. № 1. С. 3–17.
15. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 47–80.
16. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра трехмерного периодического оператора Дирака // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. Вып. 1 (35). С. 49–76. `http://mi.mathnet.ru/iimi79`
17. Данилов Л.И. Абсолютная непрерывность спектра многомерного периодического магнитного оператора Дирака // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 61–96. DOI: 10.20537/vm080106
18. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. No. 4. P. 1741–1758. DOI: 10.1090/S0002-9947-07-04545-X
19. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator // arXiv: 0805.0399 [math-ph]. 2008.
20. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a 3D periodic magnetic Dirac operator // Integr. Equat. Oper. Theory. 2011. Vol. 71. P. 535–556. DOI: 10.1007/s00020-011-1906-z
21. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шрёдингера и Дирака. I / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 2000. 76 с. Деп. в ВИНИТИ 15.06.00, № 1683-В00.
22. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1982. 488 с.
23. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
24. Гельфанд И.М. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 6. С. 1117–1120.
25. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. Vol. 33. P. 335–343. DOI: 10.1007/BF01646745

Поступила в редакцию 01.09.2016

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov
On the spectrum of a periodic magnetic Dirac operator

Keywords: Dirac operator, absolute continuity of the spectrum, periodic potential.

MSC2010: 35P05

We consider the periodic three-dimensional Dirac operator $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}=\sum\widehat{\alpha}_j(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j)+\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$. The vector potential $A\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ and the functions $\widehat{V}_s$, $s=0,1$, with values in the space of Hermitian (4×4)-matrices are periodic with a common period lattice $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$. The functions $\widehat{V}_s$ are supposed to satisfy the commutation relations $\widehat{V}_s\widehat{\alpha}_j=(-1)^s\widehat{\alpha}_j\widehat{V}_s$, $j=1,2,3$, $s=0,1$. Let K be the fundamental domain of the lattice Λ. We prove absolute continuity of the spectrum of the operator $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{W}$ provided that $A\in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $q>1$, or $\sum\|A_N\|<+\infty$ where A_N are the Fourier coefficients of the magnetic potential A, and the function $\widehat{V}=\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$ belongs to the space $L^3_w(K)$ and satisfies the estimate $\operatorname{mes}\{x\in K:\|\widehat{V}(x)\|>t\}\leqslant Ct^{-3}$ for all sufficiently large numbers $t>0$. The constant $C>0$ depends on the A (if $A\equiv 0$ then C is a universal constant), and mes is the Lebesgue measure. We can also add a function of the same form with several Coulomb singularities $|x-x_m|^{-1}\widehat{w}_m$ in neighborhoods of points $x_m\in K$, $m=1,\ldots,m_0$, to the function $\widehat{V}=\widehat{V}_0+\widehat{V}_1$ provided that this function is continuous for $x\notin x_m+\Lambda$, $m=1,\ldots,m_0$, and $\|\widehat{w}_m\|\leqslant C_1$ for all m. The constant $C_1>0$ also depends on the magnetic potential A (and does not depend on the m_0).

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness*, New York: Academic Press, 1975. 361 p. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom II: Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978, 400 p.
2. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*, Berlin: Springer Verlag, 1976. DOI: 10.1007/978-3-642-66282-9
3. Danilov L.I. The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. VI, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1996, 45 p. Deposited in VINITI 31.12.1996, no. 3855-B96 (in Russian).
4. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations, *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-3-0348-8573-7
5. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 136, pp. 3826–3831. DOI: 10.1007/s10958-006-0203-x
6. Birman M.Sh., Suslina T.A. Periodic magnetic Hamiltonian with variable metric. The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232.
7. Kuchment P., Levendorskii S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569. DOI: 10.1090/S0002-9947-01-02878-1
8. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 343–413. DOI: 10.1090/bull/1528
9. Danilov L.I. Spectrum of the Dirac operator in $\mathbb{R}^n$ with periodic potential, *Theoret. and Math. Phys.*, 1990, vol. 85, no. 1, pp. 1039–1048. DOI: 10.1007/BF01017245
10. Danilov L.I. Resolvent estimates and the spectrum of the Dirac operator with periodic potential, *Theoret. and Math. Phys.*, 1995, vol. 103, no. 1, pp. 349–365. DOI: 10.1007/BF02069779
11. Danilov L.I. Absolute continuity of the spectrum of a periodic Dirac operator, *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 262–271. DOI: 10.1007/BF02754212
12. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional periodic Dirac operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 1999, vol. 118, no. 1, pp. 1–11. DOI: 10.1007/BF02557191
13. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1999, vol. 34, pp. 377–395. DOI: 10.1007/BF01272881
14. Danilov L.I. On the spectrum of the periodic Dirac operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 2000, vol. 124, no. 1, pp. 859–871. DOI: 10.1007/BF02551063
15. Danilov L.I. Absence of eigenvalues for the generalized two-dimensional periodic Dirac operator, *St. Petersburg Math. J.*, 2006, vol. 17, no. 3, pp. 409–433. DOI: 10.1090/S1061-0022-06-00911-3
16. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a three-dimensional periodic Dirac operator, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 1 (35), pp. 49–76 (in Russian). `http://mi.mathnet.ru/iimi79`

17. Danilov L.I. Absolute continuity of the spectrum of a multidimensional periodic magnetic Dirac operator, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut Nauki*, 2008, no. 1, pp. 61–96 (in Russian). DOI: 10.20537/vm080106
18. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 4, pp. 1741–1758. DOI: 10.1090/S0002-9947-07-04545-X
19. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator, 2008, arXiv: 0805.0399v3 [math-ph].
20. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a 3D periodic magnetic Dirac operator, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2011, vol. 71, pp. 535–556. DOI: 10.1007/s00020-011-1906-z
21. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of periodic Schrödinger and Dirac operators. I, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 2000, 76 p. Deposited in VINITI 15.06.2000, no. 1683-B00 (in Russian).
22. Richtmyer R.D. *Principles of advanced mathematical physics. Vol. I*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer Verlag, 1978. Translated under the title *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom I*, Moscow: Mir, 1982, 488 p.
23. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. IV. Analysis of operators*, New York–London: Academic Press, 1978. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom IV. Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982, 428 p.
24. Gel'fand I.M. Expansion in characteristic functions of an equation with periodic coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 73, no. 6, pp. 1117–1120 (in Russian).
25. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Commun. Math. Phys.*, 1973, vol. 33, pp. 335–343. DOI: 10.1007/BF01646745

Received 01.09.2016

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru