УДК 517.977

© *А. А. Соколов*

К ГРУППОВОМУ ПРЕСЛЕДОВАНИЮ НЕСКОЛЬКИХ УБЕГАЮЩИХ

Рассматривается задача простого группового преследования нескольких убегающих на плоскости. Цель преследователей — поймать всех убегающих, а цель убегающих — хотя бы одному уклониться от встречи. Все игроки обладают равными динамическими возможностями. Начальные позиции преследователей находятся в вершинах выпуклого многоугольника. В рассмотрении находится позиционная задача. Получены достаточные условия поимки группой преследователей нескольких убегающих.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, простое преследование.

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известна задача о преследовании группой преследователей одного убегающего [1–3]. Естественным обобщением указанной задачи является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы — преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [4–9]. При этом практически во всех работах задача о преследовании группы убегающих рассматривается при дополнительных ограничениях. В представленной работе рассматривается задача простого преследования на плоскости группой преследователей группы убегающих при условии, что все участники обладают равными возможностями. Получены достаточные условия поимки.

§ 1. Основные определения и обозначения

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра Γ $m+n$ лиц: m преследователей $P_1, \ldots, P_m$ и n убегающих $E_1, \ldots, E_n$, причем $m \geqslant 3n$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad y_j(0) = y_i^0, \quad \|v_j\| \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $X_0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\}$, $X = \operatorname{int} \operatorname{co} X_0$, где $\operatorname{int} A$, $\operatorname{co} A$ соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A. Считаем, что все точки x_i^0 являются крайними точками множества X и пронумерованы по часовой стрелке.

Будем предполагать, что преследователи используют квазистратегии. Целью преследователей является поимка всех убегающих, при этом условием поимки преследователем P_i убегающего E_j является равенство

$$x_i(\tau) = y_j(\tau)$$

при некотором $\tau > 0$. Целью убегающих является уклонение от поимки хотя бы одного из убегающих.

Определение 1. *Соседней точкой* для точки x_k^0 называется любая точка x_l^0, $1 \leqslant l \leqslant m$, $l \neq k$, удовлетворяющая условию

$$\min(m - |l-k|, |l-k|) < n.$$

Замечание 1. Если в ходе вычислений для x_l индекс $l \notin \{1, \ldots, m\}$, то следует считать, что $l = \operatorname{mod}(l, m)$, где $\operatorname{mod}(l, m) = l - m\lfloor \frac{l}{m} \rfloor$, а $\lfloor \frac{l}{m} \rfloor$ — наибольшее целое, меньшее или равное $\frac{l}{m}$.

Определим множества

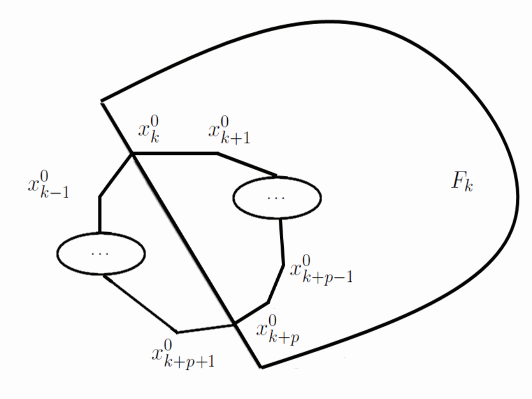

Рис. 1. Пример F_k.

$$G_k(p) = \mathrm{int}\ \mathrm{co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p}^0\}, \tag{1}$$

$$C_k = X \backslash G_k, \tag{2}$$

$$A = \bigcap_{k=1}^{m} C_k, \tag{3}$$

где p — заданное натуральное число. Отметим, что

$$C_k = X \backslash F_k, \tag{4}$$

где F_k — полуплоскость, точки $x_{k+1}^0, x_{k+p-1}^0 \in F_k$ и прямая, проходящая через x_k^0, x_{k+p}^0, является граничной для F_k (см. рис. (1)).

Пусть x_α^0, x_β^0, x_γ^0 (α, β, $\gamma \in \{1, \dots, m\}$) — попарно не соседние точки.

§ 2. Вспомогательные леммы

Пусть A_1 — множество вида (3), построенное по точкам X_0 для $p = p_1$, A_2 — множество вида (3), построенное по точкам $X_0 \backslash \{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}$ для $p = p_1 - 1$.

Л е м м а 1. $A_1 \subseteq A_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим множество $\widetilde{A}$ по точкам X_0 для $p = p_1 - 1$ таким образом, чтобы $\widetilde{A}$ совпадало с A_2:

$$\widetilde{A} = \bigcap_{k=1}^{m} \widetilde{C_k}.$$

Исходя из определения 1, среди точек x_k^0, $\dots$, $x_{k+p_1-1}^0$ может находиться не более одной исключаемой точки. Условие вхождения исключаемой точки в подобный набор точек имеет вид

$$\begin{cases} \{x_k^0, \dots, x_{k+p_1-1}^0\} \cap \{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\} \neq \varnothing, \\ x_k^0 \notin \{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда

$$\widetilde{C_k} = \begin{cases} X \backslash \mathrm{int}\ \mathrm{co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1-1}^0\}, \quad \text{если не выполнено (5);} & \text{(6a)} \\ X \backslash \mathrm{int}\ \mathrm{co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1}^0\}, \quad \text{если выполнено (5);} & \text{(6b)} \\ X, \quad \text{если } x_k^0 \in \{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}. & \text{(6c)} \end{cases}$$

Сравним множества $\widetilde{A}$ и A_1. Имеем

$$A_1 = \bigcap_{k=1}^{m} C_k, \text{ где } C_k = X \backslash \text{int co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1}^0\}.$$

Рассмотрим каждый из случаев (6a), (6b), (6c) по отдельности.

Случай (6a). $\widetilde{C_k} = X \backslash \text{int co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1-1}^0\}$. Так как в наборе $\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1-1}^0\}$ нет исключаемой точки, то

$$X \backslash \text{int co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1-1}^0\} \subset X \backslash \text{int co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1}^0\}.$$

Отсюда

$$C_k \subseteq \widetilde{C_k}.$$

Случай (6b). $\widetilde{C_k} = X \backslash \text{int co}\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1}^0\}$. В наборе $\{x_k^0, \dots, x_{k+p_1}^0\}$ содержится исключаемая точка. Пусть x_ω^0 — исключаемая точка. Тогда, согласно определению (2),

$$\widetilde{C_k} = X \backslash \text{int co} \left\{x_k^0, \dots, x_{\omega-1}^0, x_{\omega+1}^0, \dots, x_{k+p_1}^0\right\}, \quad x_\omega^0 \notin \{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}.$$

Тогда в силу (4) имеем

$$C_k \subseteq \widetilde{C_k}.$$

Случай (6c). $\widetilde{C_k} = X$. В этом случае построенное для исключаемой точки множество $\widetilde{C_k}$ не влияет на построение множества $\widetilde{A}$.

Из (6a), (6b), (6c) следует, что для каждого k выполняется $C_k \subseteq \widetilde{C_k}$. Так как $A_1 = \bigcap\limits_{k=1}^{m} C_k$, $\widetilde{A} = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \widetilde{C_k}$, то

$$A_1 \subseteq \widetilde{A}.$$

Учитывая, что $\widetilde{A} = A_2$, получаем

$$A_1 \subseteq A_2,$$

что и требовалось доказать.

Определение 2. *Симплексом* $K(x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0)$ в $\mathbb{R}^2$ называется выпуклая оболочка трех точек:

$$K(x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0) = \text{int co}\{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}.$$

Лемма 2. *Для любой точки* $y_j^0 \in A$ $(j = 1, \dots, n)$ *всегда найдется хотя бы один симплекс* $K(x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0)$ *такой, что*

$$y_j^0 \in A \bigcap \text{int co}\{x_\alpha^0, x_\beta^0, x_\gamma^0\}.$$

Доказательство. Пусть

$$A^* = \left(\bigcap_{k=1+ln} C_k \right) \bigcap (C_{m-n}), \quad l = 1, \dots, k_{\max},$$

где $k_{\max} = \lceil \frac{m}{n} \rceil$ ($\lceil \frac{m}{n} \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное $\frac{m}{n}$). Построение начнем с точки x_1^0.

Из построения A и A^* следует, что $A \subseteq A^*$ (см. рис. 2). Если $m = k_{\max} \cdot n$, то множество C_{m-n} совпадает с одним из множеств C_k. Пусть $X_0^k = \{x_{1+n}^0, x_{1+2n}^0, \dots, x_{1+(k_{\max}-1)n}^0\}$, тогда любые две точки из X_0^k не соседние. Следовательно, любой треугольник будет составлен из попарно не соседних точек. Пусть $A_1^* = \text{int co}\, X_0^k$. Тогда для всех $y_j^0 \in A_1^*$ найдутся три попарно не соседние точки из множества X_0^k.

Далее имеем

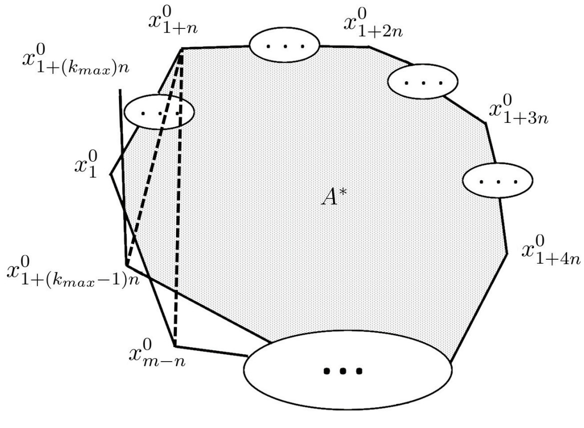

Рис. 2. Пример A^* (заштрихованная область).

$$A^* \setminus \text{int co}\,\{x^0_{1+(k_{\max}-1)n}, x^0_1, x^0_{1+n}\} \subseteq A^*_1,$$
$$\text{int co}\,\{x^0_{1+(k_{\max}-1)n}, x^0_1, x^0_{1+n}\} \subseteq \text{int co}\,\{x^0_{m-n}, x^0_1, x^0_{1+n}\}. \tag{7}$$

Если точка $y^0_j \notin A^*_1$, то, согласно (7), $y^0_j \in \text{int co}\{x^0_{m-n}, x^0_1, x^0_{1+n}\}$, а так как x^0_{m-n}, x^0_1, x^0_{1+n} являются попарно не соседними точками, то в качестве симплекса K берем $K\left(x^0_{m-n}, x^0_1, x^0_{1+n}\right)$.

Если y^0_j лежит на отрезке $[x^0_{m-n}, x^0_{1+n}]$, то вместо x^0_{m-n} выбираем x^0_{m-n-1}. Для точек $y^0_j \in A^*_1$, находящихся на одном из отрезков треугольника, выбирается другое построение, начинающееся с другой вершины x^0_i.

Так как A^* — объединение симплексов, вершинами которых являются попарно не соседние точки, то лемма доказана.

§ 3. Основная теорема

Т е о р е м а 1. *Пусть $y^0_j \in A$ для всех j, тогда в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе Пшеничного Б. Н. [10] доказано, что группа преследователей осуществляет поимку убегающего тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

Пусть $y^0_j \in A$. Тогда, согласно лемме 2, существуют три попарно не соседние точки x^0_α, x^0_β, x^0_γ такие, что
$$y^0_j \in A \bigcap \text{int co}\left\{x^0_\alpha, x^0_\beta, x^0_\gamma\right\}.$$

Поэтому, согласно теореме Пшеничного, для E_j гарантирована поимка. После исключения x^0_α, x^0_β, x^0_γ, y^0_j, согласно лемме 1, условие вхождения оставшихся убегающих во вновь построенное множество A также будет выполняться. Итеративно для всех y^0_j будут найдены симплексы, следовательно, поимка гарантирована. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если все $y^0_j \in A$ $(j = 1, \dots, n)$, то для поимки всех убегающих достаточно $3n$ преследователей.*

Справедливость данного утверждения следует из леммы 2.

Список литературы

1. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
2. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
4. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1246–1254.

5. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
6. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // Доклады АН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054.
7. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 1. С. 21–31.
8. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Доклады АН УзССР. 1983. № 4. С. 3–6.
9. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 22–26.
10. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

Поступила в редакцию 01.10.2016

Соколов Александр Александрович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: tier2005@mail.ru

A. A. Sokolov

On group pursuit of several evaders

Keywords: differential game, pursuer, evader, simple pursuit.

MSC2010: 91A23

We consider a problem of simple group pursuit of several evaders on plane. The purpose of the pursuers is to catch all evaders. The purpose of the evaders is escape from meeting at least for one evader. All players have equal dynamical capabilities. Initial positions of pursuers are in the vertices of a convex polygon. We consider a positional game. We obtain sufficient conditions for capture of all evaders by pursuers.

REFERENCES

1. Chikrii A. *Conflict-controlled processes.* Springer, 1997, XX+404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
2. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
3. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
4. Petrov N.N., Petrov N.Nikandr. On the differential game «Casacks-robbers», *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian).
5. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
6. Grigorenko N.L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Sov. Math., Dokl.*, 1985, vol. 31, pp. 550–553 (in Russian).
7. Vinogradova M.N. On the capture of two escapees in the non-stationary problem of simple pursuit, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 21–31 (in Russian).
8. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
9. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. DOI: 10.1134/S1064230712060081
10. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 484–485. `http://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036`

Received 01.10.2016

Sokolov Aleksandr Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: tier2005@mail.ru