УДК 517.977, 519.837.3

© *А. Г. Ченцов*

ИТЕРАЦИИ СТАБИЛЬНОСТИ И ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ФОРМИРУЕМОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается один из вариантов метода программных итераций, используемый для решения дифференциальной игры сближения-уклонения. Предлагаемую процедуру связываем с итерациями на основе свойства стабильности множеств, предложенного Н. Н. Красовским. Установлена связь получающейся при этом итерационной процедуры с решением задачи уклонения при ограничении на число переключений формируемого управления: итерации стабильности определяют множество успешной разрешимости упомянутой задачи. Доказано, что гарантированное осуществление уклонения возможно тогда и только тогда, когда осуществимо (гарантированное) строгое уклонение (а именно, уклонение по отношению к окрестностям множеств, определяющих рассматриваемую игру сближения-уклонения). Указано представление стратегий, гарантирующих уклонение с ограничением на число переключений. Конкретное действие каждой такой стратегии состоит в формировании постоянного управления, выталкивающего траекторию из множества, отвечающего очередной итерации на основе оператора стабильности. Продолжительность действия упомянутого управления определяется в терминах результата применения неупреждающего мультифункционала на пространстве траекторий, значениями которого являются непустые подмножества оставшегося промежутка управления. Исследуются вопросы, связанные со сходимостью в метрике Хаусдорфа фрагментов множеств, реализующихся посредством итерационной процедуры. На этой основе получены условия сходимости (в метрике Хаусдорфа) самих множеств-итераций.

Ключевые слова: метод программных итераций, неупреждающий мультифункционал, оператор стабильности, стратегия коррекции.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-02

Общее введение

Исследуются задачи теории дифференциальных игр (ДИ) [1–3]. Рассматривается вариант известного метода программных итераций (МПИ) [4–7], именуемый ниже итерациями стабильности. Данный вариант МПИ (см. [8; 9, гл. V]) реализует, при традиционных предположениях относительно управляемой системы и параметров ДИ, множество позиционного поглощения (МПП) в смысле альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [2,10] в виде предела последовательности итераций, но (одновременно) доставляет [11,12] на каждом этапе итерационной процедуры множество успешной разрешимости задачи уклонения с дополнительными ограничениями на число переключений формируемого управления (основные результаты настоящей работы анонсированы в [11,12]). Постановке игровой задачи с упомянутым ограничением отвечают (на идейном уровне) некоторые инженерные задачи управления в условиях помех (управление «по функционалу»), где смена режима функционирования системы осуществляется по мере наступления того или иного события (например, достижения заданной высоты). В этой связи представляется, что более подробное в сравнении с [11, 12] изложение математических конструкций может быть полезным специалистам в области систем управления. Заметим, что некоторые конкретные примеры применения упомянутой итерационной процедуры рассматривались в [13]. Краткое изложение конструкций настоящей работы приведено в [14].

Особенностью приводимой ниже итерационной процедуры, развивающейся в пространстве множеств, является то, что на каждом шаге (этапе) определяется множество успешной разрешимости задачи сближения в условиях, когда (дискриминируемый) игрок-противник (второй игрок) может использовать только постоянные программные управления, в то время как игрок-союзник (первый игрок) может их парировать обобщенными управлениями-мерами, формируя при этом в системе скользящие режимы. На такой основе определяется оператор (стабильности), неподвижные точки которого автоматически оказываются стабильными мостами Н. Н. Красовского. Как уже отмечалось, в пределе мы получим МПП соответствующей ДИ сближения-уклонения. Однако оказываются интересными и сами итерации, а точнее, их дополнения до множества, определяющего фазовые ограничения (ФО) в задаче сближения. Дело в том, что эти множества-дополнения исчерпывающим образом определяют возможности успешной разрешимости задачи уклонения с ограничением на число переключений формируемого вторым игроком управления. В этой задаче, однако, возникает проблема управления моментами коррекции. Простые примеры [13] показывают, что, вообще говоря, процедуры формирования очередного момента коррекции в виде функции позиции, сложившейся на момент предыдущей коррекции, оказываются недостаточными; приходится привлекать неупреждающие правила выбора следующего момента коррекции. В статье показано, что эти правила могут быть определены в терминах некоторых событий, связанных с построениями на основе МПИ.

§ 1. Содержательное обсуждение задачи

Обсудим на содержательном и предельно упрощенном уровне общую схему формирования управления вторым игроком-уклонистом, заинтересованным в осуществлении уклонения по отношению к заданной паре множеств, определяющих поставленную задачу и являющихся ее параметрами. В дальнейшем приводимая сейчас конструкция будет определена в более строгом и более общем виде.

Рассматриваются n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ и (невырожденный) отрезок $T \triangleq [t_o, \vartheta_o]$, где $t_o \in \mathbb{R}, \vartheta_o \in \mathbb{R}$ и $t_o < \vartheta_o$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). В $\mathbb{R}^n$ (это фазовое пространство) функционирует система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \ v \in Q, \tag{1.1}$$

где f есть непрерывная n-вектор-функция на $T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$, а P и Q — конечномерные непустые компакты, $P \subset \mathbb{R}^p$ и $Q \subset \mathbb{R}^q$. Полагаем, что в (1.1) $u \in P$ и $v \in Q$ суть управляющие параметры игроков I и II, преследующих противоположные цели. Полагаем также сейчас для простоты, что при каждом заданном $t_* \in T$ игроки могут формировать только кусочно-постоянные, непрерывные справа и непрерывные слева в точке ϑ_o функции

$$u(\cdot) = u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o}, \ v(\cdot) = v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o} \tag{1.2}$$

на $[t_*, \vartheta_o]$ со значениями в P и Q соответственно.

Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности решений, подобным [15].

Рассмотрим вариант [11, § 2] формирования $v(\cdot)$ в (1.2), полагая заданным число $s \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$. Пусть объектом выбора игрока II является триплет (V, γ, k). Здесь V — отображение, сопоставляющее каждой позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ непустое подмножество (п/м) Q. Полагаем далее (см. [11,12]), что γ есть система отображений $\gamma_t, \ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_o$, где t_* определяется начальной позицией $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$; при $t \in [t_*, \vartheta_o]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_t(x)$ есть многозначный неупреждающий [11, с. 7, 8] функционал, определенный на множестве $C_n([t, \vartheta_o])$ всех непрерывных n-вектор-функций на $[t, \vartheta_o]$ и принимающий значения в $[t, \vartheta_o]$. Наконец, $k \in \mathbb{N}$ таково, что $k \leqslant s$. Общая логика управления, связанная с поэтапным построением $v(\cdot)$ в (1.2) в виде склейки k векторов из Q, состоит в следующем. В начальный момент $\tau_1 = t_*$ выбирается $v_1 \in V(t_*, x_*)$ и «включается» правило $g_1 = \gamma_{t_*}(x_*)$ слежения за будущей траекторией. Константа v_1 вместе с помеховым (по смыслу) управлением $u(\cdot)$ в (1.2) порождает траекторию $x_1(\cdot)$, стартующую из $(t_*, x_*) = \big(\tau_1, x(\tau_1)\big)$. По мере ее развития правило g_1 формирует момент

$$\tau_2 \in g_1\big(x_1(\cdot)\big),$$

зависящий только от начального «отрезка» $\big(x_1(t), t_* \leqslant t \leqslant \tau_2\big)$ траектории $x_1(\cdot)$. В момент τ_2 выбираются $v_2 \in V\big(\tau_2, x_1(\tau_2)\big)$ и новое правило $g_2 = \gamma_{\tau_2}\big(x_1(\tau_2)\big)$ слежения за будущей траекторией. В результате воздействия v_2 и управления $u(\cdot)$ (см. (1.2)) из позиции $\big(\tau_2, x_1(\tau_2)\big)$ развивается траектория $x_2(\cdot)$, определяющая момент

$$\tau_3 \in g_2\big(x_2(\cdot)\big)$$

(сейчас имеем в виду случай $k > 3$), когда выбираются $v_3 \in V\big(\tau_3, x_2(\tau_3)\big)$ и правило $g_3 = \gamma_{\tau_3}\big(x_2(\tau_3)\big)$. Дальнейшее построение аналогично; оно продолжается вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,k}$. В итоге реализуется «совокупная» траектория $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, склеенная из фрагментов «частичных» траекторий $x_1(\cdot), \ldots, x_k(\cdot)$. Поскольку выбор $u(\cdot)$ в (1.2) может быть произвольным (это любая кусочно-постоянная, непрерывная справа и непрерывная слева в точке ϑ_o функция со значениями в P), то стратегии — триплету (V, γ, k) — сопоставляется на самом деле целый пучок $\mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k)$, являющийся непустым п/м $C_n([t_*, \vartheta_o])$. Полагаем, что стратегия (V, γ, k) разрешает ту или иную задачу, если требуемое решение достигается на всех траекториях из вышеупомянутого пучка. Иными словами, речь идет о гарантированном достижении той или иной цели.

Допустим сейчас, что заданы два п/м $T \times \mathbb{R}^n$, а именно, M и N. Определим цель выбора триплета (V, γ, k) для заданной позиции $(t_*, x_*) \in N$ посредством требования:

$$\forall\, x(\cdot) \in \mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k) \quad \forall\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o] \quad \Big(\big(\vartheta, x(\vartheta)\big) \in M\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta[: \ \big(t, x(t)\big) \notin N\Big). \tag{1.3}$$

Осуществление (1.3) называем (M, N)-уклонением (траекторий $x(\cdot)$). Если допустимый триплет (V, γ, k), $k \leqslant s$, со свойством гарантированной реализации (1.3) существует, то позицию (t_*, x_*) назовем успешной для игрока II. Целью нашего исследования является:

1) нахождение множества $\mathcal{N}$ всех таких успешных (для игрока II) позиций;

2) для всякой позиции $(t_*, x_*) \in \mathcal{N}$ построение стратегии в виде триплета (V, γ, k), $k \leqslant s$, гарантирующего (1.3).

Решение данной задачи анонсировано в [11] и связывается (в [11]) с вышеупомянутым вариантом МПИ (итерациями стабильности), предложенным для решения ДИ сближения-уклонения, отвечающего альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина. Наряду с осуществлением «обычного» уклонения (см. (1.3)) будет рассматриваться задача о строгом уклонении, то есть об уклонении с некоторым «запасом» в виде окрестностей множеств M и N. Более того, будет показано, что «обычное» уклонение (с ограничением на число переключений) осуществимо тогда и только тогда, когда осуществимо строгое уклонение.

§ 2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество). Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Произвольному объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z в качестве своего элемента. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X. Для произвольных непустого семейства $\mathcal{X}$ и множества Y в виде

$$\mathcal{X}|_Y \overset{\triangle}{=} \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big) \tag{2.1}$$

имеем след $\mathcal{X}$ на множество Y. В терминах (2.1) определяются, в частности, подпространства (п/п) топологических пространств (ТП) и измеримых пространств (ИП). Если A и B — непустые множества, то, следуя [16, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (при $\mathbf{f} \in B^A$ и $a \in A$ в виде $\mathbf{f}(a) \in B$ имеем значение $\mathbf{f}$ в точке a); при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$ отображение

$$(g|\, C) \overset{\triangle}{=} \big(g(x)\big)_{x \in C} \in B^C$$

есть обычное сужение g на множество C.

Традиционные обозначения $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ соответствуют § 1, $\mathbb{N}_o \overset{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ и при $r_1 \in \mathbb{N}_o$, $r_2 \in \mathbb{N}_o$

$$\overline{r_1, r_2} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N}_o |\, (r_1 \leqslant k) \& (k \leqslant r_2)\}.$$

Кроме того, полагаем, что $\overrightarrow{m, \infty} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N}_o |\, m \leqslant k\}$ при $m \in \mathbb{N}_o$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное обозначение H^k, полагая, что элементы $\mathbb{N}_o$

(неотрицательные целые числа) не являются множествами; в виде $H^{\mathbb{N}}$ имеем множество всех последовательностей в H. Если $\mathbb{H}$ — множество, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, то, как обычно,

$$\big((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\big(H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i\big) \,\&\, (H_{j+1} \subset H_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N})\Big).$$

Для любых ТП (X,τ) и множества $Y \in \mathcal{P}(X)$ через $\mathrm{cl}(Y,\tau)$ обозначаем замыкание Y в (X,τ); в виде $(Y, \tau|_Y)$ имеем п/п (X,τ).

Если E — множество и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то через $\sigma_E^o(\mathcal{E})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathcal{E}$; в связи с описанием п/п ИП отметим, что при $H \in \mathcal{P}(E)$ справедливо равенство $\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H) = \sigma_E^o(\mathcal{E})|_H$, и, в случае $H \in \sigma_E^o(\mathcal{E})$,

$$\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H) = \{\Sigma \in \sigma_E^o(\mathcal{E}) |\, \Sigma \subset H\}.$$

Меры, определенные на σ-алгебре борелевских п/м ТП, называем борелевскими. Для ИП $(S,\mathcal{S})$ через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{S}]$ обозначаем множество (точнее, конус при поточечном определении линейных операций) всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных (с.-а.) мер на σ-алгебре $\mathcal{S}$.

§ 3. Обобщенные программные управления

В настоящем параграфе вводятся обобщенные программные управления-меры и отвечающие им движения — скользящие режимы, в терминах которых будет определен затем нужный вариант оператора программного поглощения, именуемый также оператором стабильности. Пусть T, P и Q соответствуют § 1; при $t \in T$ получаем непустые конечномерные компакты $[t,\vartheta_o], Y_t \triangleq [t,\vartheta_o] \times P$ и $\Omega_t \triangleq [t,\vartheta_o] \times P \times Q$. Упомянутые компакты оснащаем σ-алгебрами борелевских п/м: $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{C}_t$ соответственно. Получаем стандартные ИП:

$$([t,\vartheta_o], \mathcal{T}_t), (Y_t, \mathcal{K}_t), (\Omega_t, \mathcal{C}_t)$$

(символика в основном соответствует [8,9]). Если $t \in T$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$, то ИП $([\theta,\vartheta_o], \mathcal{T}_\theta), (Y_\theta, \mathcal{K}_\theta)$ и $(\Omega_\theta, \mathcal{C}_\theta)$ таковы, что

$$\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_t|_{[\theta,\vartheta_o]} = \{\Gamma \in \mathcal{T}_t |\, \Gamma \subset [\theta,\vartheta_o]\}, \quad \mathcal{K}_\theta = \mathcal{K}_t|_{Y_\theta} = \{K \in \mathcal{K}_t |\, K \subset Y_\theta\}, \quad \mathcal{C}_\theta = \{C \in \mathcal{C}_t |\, C \subset \Omega_\theta\}$$

(согласованность п/п). Пусть далее $\mathcal{T} \triangleq \mathcal{T}_{t_o}$. Через λ обозначаем след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}$. Заметим, что [17, с. 17] при $t \in T \quad \Omega_t = Y_t \times Q$; кроме того, при $K \in \mathcal{K}_t$ имеем, что $K \times Q \in \mathcal{C}_t$ (полезно учесть, что при $\mathbb{K} \in \mathcal{P}(Y_t)$

$$\Omega_t \setminus (\mathbb{K} \times Q) = (Y_t \setminus \mathbb{K}) \times Q;$$

используется также то легко проверяемое свойство, что $\{S \in \mathcal{K}_t |\, S \times Q \in \mathcal{C}_t\}$ есть σ-алгебра п/м Y_t, содержащая топологию Y_t, порождающую $\mathcal{K}_t$), а при $\Gamma \in \mathcal{T}_t \quad \Gamma \times P \times Q = (\Gamma \times P) \times Q \in \mathcal{C}_t$ и $\Gamma \times P \in \mathcal{K}_t$. С учетом этих обстоятельств (см. [8; 9, гл. IV]) полагаем при $t \in T$, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] |\, \eta(\Gamma \times \mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = \lambda(\Gamma) \quad \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \tag{3.1}$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] |\, \mu(\Gamma \times \mathrm{P}) = \lambda(\Gamma) \quad \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \tag{3.2}$$

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t |\, \eta(K \times Q) = \mu(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{K}_t\} \quad \forall\, \mu \in \mathcal{R}_t. \tag{3.3}$$

Меры из множеств (3.1) являются аналогами пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ кусочно-постоянных, непрерывных справа и непрерывных слева в точке ϑ_o вектор-функций $u(\cdot) \in P^{[t,\vartheta_o]}$ и $v(\cdot) \in Q^{[t,\vartheta_o]}$, а меры из $\mathcal{R}_t$ (3.2) — аналоги упомянутых вектор-функций $u(\cdot)$. Наконец, меры из множеств (3.3) являются аналогами пар вектор-функций (упомянутого типа) $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$, где $u(\cdot)$ фиксировано, то есть $u(\cdot) = \overline{u}(\cdot)$, а $v(\cdot)$ варьируется. Отметим, что, как легко видеть (см. [9, гл. IV]), при $t \in T$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$

$$\mathcal{H}_\theta = \{(\eta |\, \mathcal{C}_\theta) : \ \eta \in \mathcal{H}_t\}, \ \ \mathcal{R}_\theta = \{(\mu |\, \mathcal{K}_\theta) : \ \mu \in \mathcal{K}_t\}; \tag{3.4}$$

$$\eta_1 \perp \eta_2 \overset{\triangle}{=} \Big(\eta_1\big(H \cap ([t,\theta[\times P \times Q)\big) + \eta_2(H \cap \Omega_\theta)\Big)_{H \in \mathcal{C}_t} \in \mathcal{H}_t \ \ \forall \eta_1 \in \mathcal{H}_t \ \ \forall \eta_2 \in \mathcal{H}_\theta, \tag{3.5}$$

$$\mu_1 \bowtie \mu_2 \overset{\triangle}{=} \Big(\mu_1\big(K \cap ([t,\theta[\times P)\big) + \mu_2(K \cap Y_\theta)\Big)_{K \in \mathcal{K}_t} \in \mathcal{R}_t \ \ \forall \mu_1 \in \mathcal{R}_t \ \ \forall \mu_2 \in \mathcal{R}_\theta. \tag{3.6}$$

Посредством равенств (3.4)–(3.6) определены свойства «нарезки-склейки» обобщенных управлений (ОУ). В последующих построениях важную роль будут играть «совокупные» ОУ, реализующиеся всякий раз при совместном действии ОУ $\mu \in \mathcal{R}_t$ и обычного управления-константы $v \in Q$; здесь $t \in T$. В интересах точного определения введем сначала σ-алгебру $\mathcal{B}$ борелевских п/м компакта Q и при $v \in Q$ меру Дирака $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ посредством правила:

$$\forall\, B \in \mathcal{B} \quad \Big((v \in B) \Rightarrow \big(\delta_v(B) \overset{\triangle}{=} 1\big)\Big) \,\&\, \Big((v \notin B) \Rightarrow \big(\delta_v(B) \overset{\triangle}{=} 0\big)\Big). \tag{3.7}$$

Заметим, что семейство $\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B} \overset{\triangle}{=} \{K \times B : K \in \mathcal{K}_t,\ B \in \mathcal{B}\}$ является полуалгеброй п/м Ω_t, порождающей σ-алгебру $\mathcal{C}_t$. Тогда при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ через $\mu \otimes v$ обозначаем единственную меру из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t]$, для которой

$$(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B) \ \ \forall\, K \in \mathcal{K}_t \ \ \forall\, B \in \mathcal{B}; \tag{3.8}$$

с учетом (3.1), (3.4), (3.7) и (3.8) легко проверяется, что $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$.

Всюду в дальнейшем при $t \in T$ через $C([t,\vartheta_o]), C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на $[t,\vartheta_o]$, Ω_t и Y_t соответственно, получая (при оснащении этих множеств нормами равномерной сходимости) три банаховых пространства; нам потребуются также пространства $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$ линейных непрерывных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ соответственно. По теореме Рисса, меры из $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{R}_t$ (все они являются регулярными [18]) отождествимы с (неотрицательными) элементами $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$, что позволяет оснащать $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{R}_t$ соответствующими относительными $*$-слабыми топологиями (см. [9, гл. IV, § 2]), которые метризуемы в силу сепарабельности пространств $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ в оснащении вышеупомянутыми нормами. Заметим, что при $t \in T$ множества $\mathcal{H}_t$, $\mathcal{R}_t$ и $\pi_t(\mu)$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, сильно ограничены и $*$-слабо замкнуты (см. свойства, отмеченные в [9, с. 163]), а потому $*$-слабо компактны в силу теоремы Алаоглу. Как следствие, относительные $*$-слабые топологии упомянутых множеств секвенциально компактны; замкнутость их п/м в смысле упомянутых топологий эквивалентна секвенциальной замкнутости (упомянутые свойства см. в [19, гл. V]; кроме того, см. [20, § 2.7]). Все это позволяет обходиться в последующих построениях секвенциальной сходимостью, для обозначения которой ниже используется символ $\rightharpoonup$; иными словами, упомянутые относительные топологии полностью описываются посредством сходящихся последовательностей (подробнее см. в [9, гл. IV]). Отметим следующее простое свойство: если

$$t \in T,\ (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{R}_t,\ \mu \in \mathcal{R}_t,$$

то истинна следующая импликация:

$$\big((\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \mu\big) \Longrightarrow \big((\mu_i \otimes v)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \mu \otimes v \ \ \forall\, v \in Q\big); \tag{3.9}$$

в связи с проверкой (3.9) отметим построения [21, гл. 5] (в частности, см. [21, теорема 5.5.2]), а также конструкции [22, § III.2].

Напомним, что (см. (1.1)) $f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным (по совокупности переменных) отображением, а при $t \in T$ $\ C_n([t,\vartheta_o])$ есть множество всех непрерывных отображений из $[t,\vartheta_o]$ в $\mathbb{R}^n$, оснащаемое метрикой равномерной сходимости; для обозначения упомянутой равномерной сходимости используем традиционный символ $\rightrightarrows$. Если $x(\cdot) = \big(x(\xi)\big)_{\xi\in[t,\vartheta_o]} \in C_n([t,\vartheta_o])$, то

$$(\xi,u,v) \longmapsto f(\xi,x(\xi),u,v) : \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

есть непрерывное отображение, а тогда (покомпонентно) определяются интегралы

$$\int\limits_{[t,\theta[\times P\times Q} f\big(\xi,x(\xi),u,v\big)\eta\,\big(d(\xi,u,v)\big) \in \mathbb{R}^n \ \ \forall\, \eta \in \mathcal{H}_t \ \ \forall\, \theta \in [t,\vartheta_o] \tag{3.10}$$

(в (3.10) может использоваться простейшая схема [21, гл. 3]). Пусть при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \overset{\triangle}{=} \Big\{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \,\Big|\, x(t) = \\ = x_* + \int\limits_{[t_*, t[\times P \times Q} f\big(\xi, x(\xi), u, v\big)\eta\big(d(\xi, u, v)\big) \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta_o]\Big\} \tag{3.11}$$

(введена интегральная воронка, отвечающая триплету (t_*, x_*, η)). Всюду в дальнейшем постулируем, что множество (3.11) одноэлементно при всяком выборе $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$. В этой связи полагаем при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_t$, что n-вектор-функция

$$\varphi(\cdot, t, x, \eta) = \big(\varphi(\xi, t, x, \eta)\big)_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o]) \tag{3.12}$$

реализует равенство $\Phi(t, x, \eta) = \{\varphi(\cdot, t, x, \eta)\}$. Рассматриваем (3.12) как программное движение, отвечающее триплету (t, x, η). Если $\kappa \in [0, \infty[$, то полагаем, что $B_n(\kappa) \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n |\, \|x\| \leqslant \kappa\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Полагаем в дальнейшем, что

$$\forall\, a \in [0, \infty[\ \exists\, b \in [0, \infty[\colon\ \varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \ \ \forall\, t \in T \ \ \forall\, x \in \mathbb{B}_n(a) \ \ \forall\, \eta \in \mathcal{H}_t \ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta_o].$$

Напомним, что (см. [23]) при $t \in T$ оператор

$$(x, \eta) \longmapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) :\ \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \longrightarrow C_n([t, \vartheta_o]) \tag{3.13}$$

непрерывен (при этом $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t$ оснащается топологией произведения $\mathbb{R}^n$ в топологии покоординатной сходимости и $\mathcal{H}_t$ в относительной $*$-слабой топологии). Из данного свойства непрерывности оператора (3.13) следует (см. (3.9)), что при $t \in T$ и $v \in Q$ оператор

$$(x, \mu) \longmapsto \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v) :\ \mathbb{R}^n \times \mathcal{R}_t \longrightarrow C_n([t, \vartheta_o])$$

непрерывен: если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} :\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathcal{R}_t$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$\Big(\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow x\big) \& \big((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\varphi(\cdot, t, x_i, \mu_i \otimes v)\big)_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v)\Big). \tag{3.14}$$

Ниже используются также свойства [23, (4.12), (4.13)], связанные с «нарезкой-склейкой» ОУ (см. (3.4)–(3.6)). Из (3.14) вытекает, в частности, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, v) \overset{\triangle}{=} \big\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) :\ \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\big\} \in \mathcal{P}'\big(C_n([t_*, \vartheta_o])\big) \tag{3.15}$$

есть (непустой) компакт в $C_n([t_*, \vartheta_o])$ с топологией равномерной сходимости. Действительно, (3.15) есть непрерывный (в силу (3.14)) образ компакта $\mathcal{R}_{t_*}$ в относительной $*$-слабой топологии. Элементы множества (3.15) называем v-траекториями, стартующими из позиции (t_*, x_*). Они отвечают всякий раз совместному действию на систему постоянного управления $v \in Q$ и обобщенного управления из множества (3.2).

§ 4. Операторы стабильности

Оснащаем $T \times \mathbb{R}^n$ обычной топологией $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости, получая ТП, метризуемое, в частности, метрикой ρ следующего вида: ρ определяется как

$$\big((t_1, x_1), (t_2, x_2)\big) \longmapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) : (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty[. \tag{4.1}$$

Как обычно, при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$ определяем расстояние от z до множества H:

$$\rho(z; H) \overset{\triangle}{=} \inf\big(\{\rho(z, h) :\ h \in H\}\big) \in [0, \infty[.$$

Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то $\rho(\cdot; H) \overset{\triangle}{=} \big(\rho(z; H)\big)_{z \in T \times \mathbb{R}^n}$ есть равномерно непрерывная в/з функция (см. [20, (2.7.14)]), определенная на метрическом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$. Полагаем, что $\mathcal{F}$ есть def семейство всех замкнутых в ТП $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$ п/м $T\times\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что при $H\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$

$$S_o(H,\varepsilon)\stackrel{\triangle}{=}\{z\in T\times\mathbb{R}^n|\,\rho(z;H)\leqslant\varepsilon\}\in\mathcal{F}\setminus\{\varnothing\} \tag{4.2}$$

есть (замкнутая) окрестность H в упомянутом ТП.

Полагая $\tau_\partial\stackrel{\triangle}{=}\mathcal{P}(T)$, получаем в виде (T,τ_∂) дискрет с «единицей» T (дискретное ТП). Через $\tau_\partial\otimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости на $\mathbb{R}^n$, обозначаем естественную топологию произведения ТП (T,τ_∂) и $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ (см. [24, с. 127]). Для семейства $\mathfrak{F}$ всех п/м $T\times\mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП

$$(T\times\mathbb{R}^n,\ \tau_\partial\otimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}),$$

имеем простое представление в терминах сечений. При $H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $t\in T$ в виде $H\langle t\rangle\stackrel{\triangle}{=}$ $\stackrel{\triangle}{=}\{x\in\mathbb{R}^n|\,(t,x)\in H\}$ имеем сечение H гиперплоскостью $t=\mathrm{const}$. Тогда

$$\mathfrak{F}=\{F\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)|\,F\langle t\rangle\in\mathbf{F}\ \ \forall\,t\in T\}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{F}$ есть def семейство всех п/м $\mathbb{R}^n$, замкнутых в $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Ясно, что $\mathbf{t}\subset\tau_\partial\otimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ и $\mathcal{F}\subset\mathfrak{F}$. Если $\Lambda\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$\mathrm{Supp}(\Lambda)\stackrel{\triangle}{=}\{t\in T|\Lambda\langle t\rangle\neq\varnothing\}. \tag{4.4}$$

При $S\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x\in\mathbb{R}^n$ введем $(\|\cdot\|-\inf)[x;S]\stackrel{\triangle}{=}\inf(\{\|x-y\|:\ y\in S\})$. Если $L\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, то в виде

$$(\|\cdot\|-\inf)[\cdot;L]\stackrel{\triangle}{=}\big((\|\cdot\|-\inf)[x;L]\big)_{x\in\mathbb{R}^n}$$

имеем равномерно непрерывную неотрицательную функцию на $\mathbb{R}^n$, а потому

$$B_n^o(L,\varepsilon)\stackrel{\triangle}{=}\{x\in\mathbb{R}^n|(\|\cdot\|-\inf)[x;L]\leqslant\varepsilon\}\in\mathbf{F}\setminus\{\varnothing\}\ \ \forall\,\varepsilon\in]0,\infty[; \tag{4.5}$$

получили (замкнутые) окрестности L в $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, так как $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ порождается нормой $\|\cdot\|$. С учетом (4.4) имеем, что при $\Lambda\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathrm{Supp}(\Lambda)$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$ определено $B_n^o(\Lambda\langle t\rangle,\varepsilon)\in\mathbf{F}\setminus\{\varnothing\}$. С учетом этого полагаем, что

$$\mathbb{S}(H,\varepsilon)\stackrel{\triangle}{=}\{(t,x)\in\mathrm{Supp}(H)\times\mathbb{R}^n|\,x\in B_n^o(H\langle t\rangle,\varepsilon)\}\ \ \forall\,H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\ \ \forall\,\varepsilon\in]0,\infty[. \tag{4.6}$$

Легко видеть, что при $H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$ непременно $\mathbb{S}(H,\varepsilon)\in\mathfrak{F}$. Ясно, что $\mathbb{S}(\varnothing,\varepsilon)=\varnothing$ $\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[$.

Если $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, то полагаем, что оператор

$$\mathbb{A}[M]:\,\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n) \tag{4.7}$$

определяется следующими условиями:

$$\begin{gathered}\mathbb{A}[M](H)\stackrel{\triangle}{=}\{(t,x)\in H|\,\forall\,v\in Q\ \exists\,\mu\in\mathcal{R}_t\ \exists\,\vartheta\in[t,\vartheta_o]:\ \Big(\big(\vartheta,\varphi(\vartheta,t,x,\mu\otimes v)\big)\in M\Big)\&\\ \&\Big(\big(\xi,\varphi(\xi,t,x,\mu\otimes v)\big)\in H\ \ \forall\,\xi\in[t,\vartheta[\Big)\Big\}\ \ \forall\,H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Множество M в (4.7), (4.8) играет роль целевого для игрока I; предполагается, что оператор (4.7) реализует сжатие фазовых ограничений (ФО) соответствующей задачи сближения. Условимся называть (4.7), (4.8) оператором стабильности, имея в виду связь с классическим понятием, введенным Н. Н. Красовским; данная связь проявляется при рассмотрении неподвижных точек оператора (4.7). Отметим, что (см. (4.8)) при $M_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $H_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $M_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $H_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1\subset M_2)\&(H_1\subset H_2)\big)\Longrightarrow\big(\mathbb{A}[M_1](H_1)\subset\mathbb{A}[M_2](H_2)\big); \tag{4.9}$$

в (4.9) отражена «усиленная» изотонность операторов программного программного поглощения (ОПП) типа (4.7), (4.8). В дальнейшем основное внимание уделяется случаю, когда в (4.8) $M \in \mathcal{F}$ и $H \in \mathfrak{F}$, при этом

$$\big((M = \varnothing) \vee (H = \varnothing)\big) \Longrightarrow \big(\mathbb{A}[M](H) = \varnothing\big). \tag{4.10}$$

Следовательно, интерес представляет случай, когда посылка импликации (4.10) ложна. В этой связи отметим, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $F \in \mathfrak{F}$ *и* $(t_*, x_*) \in F \setminus \mathbb{A}[M](F)$, *то*

$$\exists\, \varepsilon \in]0, \infty[:\ (t_*, x_*) \notin \mathbb{A}[S_o(M, \varepsilon)]\big(\mathbb{S}(F, \varepsilon)\big). \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия предложения в отношении M, F и (t_*, x_*). Допустим, однако, что (4.11) не выполняется, то есть

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_o(M, \varepsilon)]\big(\mathbb{S}(F, \varepsilon)\big) \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{4.12}$$

Тогда в силу (4.8), (4.12) имеем, в частности, что $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, v \in Q\ \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$:

$$\Big(\big(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes v)\big) \in S_o(M, \frac{1}{k})\Big) \& \Big(\big(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \otimes v)\big) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\ \ \forall\, \xi \in [t_*, \vartheta[\Big). \tag{4.13}$$

Пусть $\mathbf{v} \in Q$. Тогда из (4.13) следует, что

$$\Lambda_k \triangleq \Big\{(\mu, \vartheta) \in \mathcal{R}_{t_*} \times [t_*, \vartheta_o] \,\Big|\, \Big(\big(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})\big) \in S_o(M, \frac{1}{k})\Big) \&$$

$$\& \Big(\big(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})\big) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\ \ \forall\, \xi \in [t_*, \vartheta[\Big)\Big\} \neq \varnothing \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому с использованием (счетной) аксиомы выбора имеем свойство

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k \neq \varnothing. \tag{4.14}$$

С учетом (4.14) получаем для некоторых последовательностей

$$(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{R}_{t_*}, \quad (\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow [t_*, \vartheta_o] \tag{4.15}$$

следующие свойства: $\forall\, r \in \mathbb{N}$

$$\Big(\big(\vartheta_r, \varphi(\vartheta_r, t_*, x_*, \mu_r \otimes \mathbf{v})\big) \in S_o(M, \frac{1}{r})\Big) \& \Big(\big(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu_r \otimes \mathbf{v})\big) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{r})\ \ \forall\, \xi \in [t_*, \vartheta_r[\Big). \tag{4.16}$$

В силу компактности $\mathcal{R}_{t_*}$ и $[t_*, \vartheta_o]$ последовательности (4.15) можно считать сходящимися: для некоторых $\mu^o \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta^o \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu^o\big) \& \big((\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \to \vartheta^o\big). \tag{4.17}$$

С учетом (3.14) и (4.17) имеем с очевидностью, что

$$\big(\varphi(\cdot, t_*, x_*.\mu_k \otimes \mathbf{v})\big)_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}). \tag{4.18}$$

Как следствие, получаем (см. (4.2), (4.17), 4.18)), что

$$\bigg(\rho\Big(\big(\vartheta_k.\varphi(\vartheta_k, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v})\big), \big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big)\Big)\bigg)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0. \tag{4.19}$$

Заметим, что (см. (4.1)) в силу замкнутости M

$$\big(S_o(M, \frac{1}{k})\big)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow M. \tag{4.20}$$

Пусть $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$. Тогда $S_o(M, \frac{1}{k}) \subset S_o(M, \frac{1}{\mathbf{k}})$ $\forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}$. Поэтому, в силу (4.16),

$$\big(\vartheta_k, \varphi(\vartheta_k, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v})\big) \in S_o(M, \frac{1}{\mathbf{k}}) \ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}.$$

С учетом (4.2) и (4.19) получаем, как следствие, что

$$\big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in S_o(M, \frac{1}{\mathbf{k}}).$$

Коль скоро выбор $\mathbf{k}$ был произвольным, $\big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in S_o(M, \frac{1}{k})$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. С учетом (4.20) имеем теперь

$$\big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in M. \tag{4.21}$$

Пусть $t^* \in [t_*, \vartheta^o[$. Тогда, в силу (4.17), для некоторого $\mathbf{j} \in \mathbb{N}$

$$t^* \in [t_*, \vartheta_k[\ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{j}, \infty}.$$

Как следствие, имеем из (4.16), что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v}) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\langle t^* \rangle \ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{j}, \infty}. \tag{4.22}$$

В этом случае (см. (4.7)) $t^* \in \mathrm{Supp}\big(\mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\big)$ $\forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{j}, \infty}$. Покажем, что $t^* \in \mathrm{Supp}(F)$. Действительно, если $t^* \notin \mathrm{Supp}(F)$, то согласно (4.6) $\mathbb{S}(F, \varepsilon)\langle t^* \rangle = \varnothing$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$, что противоречит (хотя бы при $\varepsilon = \frac{1}{\mathbf{j}}$) свойству (4.22). Полученное противоречие показывает, что $t^* \in \mathrm{Supp}(F)$, а потому (см. (4.6))

$$\mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\langle t^* \rangle = B_n^o(F\langle t^* \rangle, \frac{1}{k}) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Напомним, что $F\langle t^* \rangle \in \mathbf{F}$ и, согласно (4.18),

$$\big(\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v})\big)_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}). \tag{4.24}$$

Фиксируем $\mathbf{r} \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbf{l} \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{\mathbf{j}; \mathbf{r}\}) \in \mathbb{N}$. При этом, согласно (4.23),

$$\mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\langle t^* \rangle \subset \mathbb{S}(F, \frac{1}{\mathbf{r}})\langle t^* \rangle \ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{l}, \infty}. \tag{4.25}$$

С учетом (4.22) имеем по выбору $\mathbf{l}$, что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v}) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\langle t^* \rangle \ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{l}, \infty}. \tag{4.26}$$

Из (4.25), (4.26) вытекает с очевидностью, что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_k \otimes \mathbf{v}) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{\mathbf{r}})\langle t^* \rangle \ \ \forall\, k \in \overrightarrow{\mathbf{l}, \infty}. \tag{4.27}$$

При этом (см. (4.5), (4.23)) $\mathbb{S}(F, \frac{1}{\mathbf{r}})\langle t^* \rangle \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$, а потому (см. (4.24), (4.27))

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{\mathbf{r}})\langle t^* \rangle. \tag{4.28}$$

Коль скоро выбор $\mathbf{r}$ был произвольным, установлено (см. (4.28)), что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}) \in \mathbb{S}(F, \frac{1}{k})\langle t^* \rangle \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

С учетом (4.23) и замкнутости $F\langle t^* \rangle$ имеем из (4.29), что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}) \in F\langle t^* \rangle,$$

откуда вытекает, что
$$\bigl(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\bigr) \in F. \tag{4.30}$$
Коль скоро и выбор t^* был произвольным, получаем из (4.30), что
$$\bigl(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\bigr) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta^o[. \tag{4.31}$$
Получили, что $\mu^o \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta^o \in [t_*, \vartheta_o]$ таковы, что (см. (4.21), (4.31))
$$\Bigl(\bigl(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\bigr) \in M\Bigr) \& \Bigl(\bigl(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\bigr) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta^o[\Bigr).$$
Поскольку выбор $\mathbf{v}$ был произвольным, установлено, что $\forall\, v \in Q\ \exists\, \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$:
$$\Bigl(\bigl(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes v)\bigr) \in M\Bigr) \& \Bigl(\bigl(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes v)\bigr) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Bigr). \tag{4.32}$$
Тогда, поскольку $(t_*, x_*) \in F$, имеем из (4.8) и (4.32), что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$, что невозможно по условиям предложения. Полученное противоречие показывает, что (4.12) невозможно. Следовательно, справедливо (4.11). $\square$

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathfrak{F}$, то $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $M \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{P}(F)$ согласно (4.8). Воспользуемся представлением (4.3), учитывая, что $F \subset T \times \mathbb{R}^n$, а потому $\mathbb{A}[M](F) \subset T \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $t_* \in T$. Рассмотрим множество-сечение $\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и его замыкание в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$:
$$\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle \subset \mathrm{cl}\bigl(\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\bigr). \tag{4.33}$$
Пусть $x_* \in \mathrm{cl}\bigl(\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\bigr)$. Тогда для некоторой последовательности
$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle \tag{4.34}$$
имеем сходимость
$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_*. \tag{4.35}$$
Из (4.34) легко следует (см. (4.8)), что
$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow F\langle t_*\rangle. \tag{4.36}$$
По выбору F имеем из (4.3), что
$$F\langle t_*\rangle \in \mathbf{F}.$$
Тогда (см. (4.35), (4.36)) получаем, что
$$x_* \in F\langle t_*\rangle. \tag{4.37}$$
Выберем произвольно $\mathbf{v} \in Q$. Поскольку (см. (4.34))
$$(t_*, x_j) \in \mathbb{A}[M](F) \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$
получаем следующее свойство. А именно, $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists\, \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$:
$$\Bigl(\bigl(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_j, \mu \otimes \mathbf{v})\bigr) \in M\Bigr) \& \Bigl(\bigl(t, \varphi(t, t_*, x_j, \mu \otimes \mathbf{v})\bigr) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Bigr).$$
Это означает, что
$$\begin{gathered}\Lambda_j \triangleq \Bigl\{(\mu, \vartheta) \in \mathcal{R}_{t_*} \times [t_*, \vartheta_o] \Bigm| \Bigl(\bigl(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_j, \mu \otimes \mathbf{v})\bigr) \in M\Bigr) \& \\ \& \Bigl(\bigl(t, \varphi(t, t_*, x_j, \mu \otimes \mathbf{v})\bigr) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Bigr)\Bigr\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{R}_{t_*} \times [t_*, \vartheta_o]) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Из (4.38) вытекает по (счетной) аксиоме выбора, что

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i \neq \varnothing. \tag{4.39}$$

С учетом (4.39) получаем, что для некоторых последовательностей

$$(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{R}_{t_*},\ (\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow [t_*, \vartheta_o] \tag{4.40}$$

реализуется свойство

$$(\mu_j, \vartheta_j) \in \Lambda_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Последнее означает, что $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\Big(\big(\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_j, \mu_j \otimes \mathbf{v})\big) \in M\Big) \& \Big(\big(t, \varphi(t, t_*, x_j, \mu_j \otimes \mathbf{v})\big) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta_j[\Big). \tag{4.41}$$

Поскольку $\mathcal{R}_{t_*}$ и $[t_*, \vartheta_o]$ компактны, полагаем, не ограничивая общности, последовательности (4.40) сходящимися: для некоторых

$$(\mu^o \in \mathcal{R}_{t_*}) \& (\vartheta^o \in [t_*, \vartheta_o]) \tag{4.42}$$

имеют место свойства

$$\big((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu^o\big) \& \big((\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} \to \vartheta^o\big). \tag{4.43}$$

Тогда (см. (4.35), (4.43)) имеем в силу (3.14) свойство сходимости

$$\big(\varphi(\cdot, t_*, x_i, \mu_i \otimes \mathbf{v})\big)_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}). \tag{4.44}$$

Из (4.43), (4.44) вытекает, что

$$\bigg(\rho\Big(\big(\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_j, \mu_j \otimes \mathbf{v})\big), \big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big)\Big)\bigg)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0. \tag{4.45}$$

Поскольку $M \in \mathcal{F}$, из (4.41), (4.45) следует, что

$$\big(\vartheta^o, \varphi(\vartheta^o, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in M. \tag{4.46}$$

Выберем произвольно $t^* \in [t_*, \vartheta^o[$. Тогда, в силу (4.43), для некоторого $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$t^* \in [t_*, \vartheta_j[\quad \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty} \tag{4.47}$$

(учитываем, что $\vartheta^o - t^* \in]0, \infty[$). Поэтому, согласно (4.41) и (4.47),

$$\varphi(t^*, t_*, x_j, \mu_j \otimes \mathbf{v}) \in F\langle t^* \rangle \quad \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}. \tag{4.48}$$

Из (4.44) следует, в свою очередь, что

$$\big(\varphi(t^*, t_*, x_i, \mu_i \otimes \mathbf{v})\big)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}). \tag{4.49}$$

При этом по выбору F имеем из (4.3), что $F\langle t^* \rangle \in \mathbf{F}$, а тогда из (4.48), (4.49) следует, что

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v}) \in F\langle t^* \rangle$$

и, как следствие,

$$\big(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in F.$$

Поскольку выбор t^* был произвольным, установлено, что

$$\big(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu^o \otimes \mathbf{v})\big) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta^o[. \tag{4.50}$$

Из (4.42), (4.46), и (4.50) следует, что

$$\exists\,\mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists\,\vartheta \in [t_*, \vartheta_o]:\ \Big(\big(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})\big) \in M\Big) \& \Big(\big(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})\big) \in F\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big).$$

Поскольку выбор $\mathbf{v}$ был произвольным, установлено, что $\forall\, v \in Q\ \exists\,\mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists\,\vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$:

$$\Big(\big(\vartheta; \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes v)\big) \in M\Big) \& \Big(\big(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes v)\big) \in F\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big). \tag{4.51}$$

Поскольку (см. (4.37)) $(t_*, x_*) \in F$, из (4.8), (4.51) следует, что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$ (а тогда $x_* \in \mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle$), чем завершается проверка вложения

$$\mathrm{cl}\big(\mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) \subset \mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle. \tag{4.52}$$

Из (4.33), (4.52) следует, что

$$\mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle = \mathrm{cl}\big(\mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\big) \in \mathbf{F}.$$

Поскольку выбор t_* был произвольным, установлено, что

$$\mathbb{A}[M](F)\langle t \rangle \in \mathbf{F}\ \ \forall\, t \in T.$$

Из (4.3) имеем, как следствие, требуемое свойство $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$. □

Подобно [23, предложение 5.2] устанавливается следующее

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n),\ F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ *и при этом*

$$\big((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M\big) \& \big((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F\big),$$

то $M \in \mathcal{F},\ F \in \mathfrak{F}$ *и* $\big(\mathbb{A}[M_i](F_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(M_i)_{i \in \mathbb{N}},\ (F_i)_{i \in \mathbb{N}},\ M$ и F удовлетворяют условиям предложения. Тогда, в частности, $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$(M_j \in \mathcal{F})\ \&\ (F_j \in \mathfrak{F}). \tag{4.53}$$

При этом справедливы следующие равенства:

$$(M = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i)\ \&\ (F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i), \tag{4.54}$$

а потому по свойствам замкнутых множеств в ТП имеем из (4.53), что

$$(M \in \mathcal{F})\ \&\ (F \in \mathfrak{F}). \tag{4.55}$$

Согласно (4.9), из вышеупомянутых свойств монотонной сходимости множеств вытекает, что

$$\mathbb{A}[M_{j+1}](F_{j+1}) \subset \mathbb{A}[M_j](F_j)\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{4.56}$$

В свою очередь, из (4.9) и (4.54) имеем вложения

$$\mathbb{A}[M](F) \subset \mathbb{A}[M_j](F_j)\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому справедливо следующее свойство:

$$\mathbb{A}[M](F) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i). \tag{4.57}$$

Осталось установить свойство

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i) \subset \mathbb{A}[M](F). \tag{4.58}$$

Итак, пусть выбрана произвольная позиция

$$(t_*, x_*) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i).$$

Тогда, в частности, имеем с очевидностью включение

$$(t_*, x_*) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

(см. (4.8)), а потому, согласно (4.54),

$$(t_*, x_*) \in F. \tag{4.59}$$

Далее, по выбору (t_*, x_*) имеем следующее свойство:

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M_j](F_j) \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому с учетом (4.8) получаем, что $\forall j \in \mathbb{N} \, \forall v \in Q \, \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*} \, \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes v)) \in M_j) \ \& \ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes v)) \in F_j \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{4.60}$$

Фиксируем $\mathbf{v} \in Q$. Тогда согласно (4.60)

$$\begin{gathered}\tilde{\Lambda}_j \triangleq \{(\mu, \vartheta) \in \mathcal{R}_{t_*} \times [t_*, \vartheta_0] | ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})) \in M_j) \ \& \ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})) \\ \in F_j \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[)\} \neq \emptyset \ \ \forall j \in \mathbb{N}.\end{gathered}$$

С учетом (счетной) аксиомы выбора имеем свойство

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\Lambda}_i \neq \emptyset.$$

Поэтому для некоторых последовательностей

$$(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{R}_{t_*}, \ \ (\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} : \ \mathbb{N} \longrightarrow [t_*, \vartheta_0] \tag{4.61}$$

имеет место свойство $(\mu_j, \vartheta_j) \in \tilde{\Lambda}_j \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $\forall j \in \mathbb{N}$

$$((\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v})) \in M_j) \ \& \ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v})) \in F_j \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_j[). \tag{4.62}$$

С учетом компактности $\mathcal{R}_*$ и $[t_*, \vartheta_0]$ полагаем, не ограничивая общности, что последовательности (4.61) являются сходящимися: для некоторых

$$(\mu^0 \in \mathcal{R}_{t_*}) \ \& \ (\vartheta^0 \in [t_*, \vartheta_0]) \tag{4.63}$$

имеют место свойства

$$((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu^0) \ \& \ ((\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \vartheta^0). \tag{4.64}$$

Тогда, в силу (3.14) и (4.64), получаем свойство сходимости

$$(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu_i \otimes \mathbf{v}))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v}). \tag{4.65}$$

В частности, из (4.1), (4.64) и (4.65) получаем следующее свойство сходимости:

$$\rho((\vartheta_i, \varphi(\vartheta_i, t_*, x_*, \mu_i \otimes \mathbf{v})), (\vartheta^0, \varphi(\vartheta^0, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0. \tag{4.66}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу предположения о монотонной сходимости имеем, в частности, что

$$M_j \subset M_m \ \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{4.67}$$

С учетом (4.62) и (4.67) получаем свойство

$$(\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v})) \in M_m \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{4.68}$$

При этом согласно (4.53) $M_m \in \mathcal{F}$. Поэтому (см. (4.66), (4.68)) $(\vartheta^0, \varphi(\vartheta^0, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in M_m$. Поскольку выбор m был произвольным, установлено, что

$$(\vartheta^0, \varphi(\vartheta^0, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in M_j \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Тогда, как следствие, получаем свойство

$$(\vartheta^0, \varphi(\vartheta^0, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i. \tag{4.69}$$

Из (4.54) и (4.69) получаем очевидное включение

$$(\vartheta^0, \varphi(\vartheta^0, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in M. \tag{4.70}$$

Выберем произвольно $t^* \in [t_*, \vartheta^0[$. Тогда в силу (4.64) можно указать $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$t^* \in [t_*, \vartheta_j[\ \ \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}. \tag{4.71}$$

Тогда, согласно (4.62) и (4.71), имеем следующее свойство:

$$(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v})) \in F_j \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}. \tag{4.72}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом предположения о монотонной сходимости множеств получаем

$$F_j \subset F_r \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{r, \infty}. \tag{4.73}$$

При этом число $\mathbf{r} \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{\mathbf{k}; r\}) \in \mathbb{N}$ таково, что

$$(\overrightarrow{\mathbf{r}, \infty} \subset \overrightarrow{\mathbf{k}, \infty}) \& (\overrightarrow{\mathbf{r}, \infty} \subset \overrightarrow{r, \infty}). \tag{4.74}$$

Согласно (4.72) и (4.74) получаем свойство

$$(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v})) \in F_j \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{r}, \infty}. \tag{4.75}$$

Из (4.73) и (4.74) вытекает, однако, что

$$F_j \subset F_r \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{r}, \infty}. \tag{4.76}$$

Поэтому (см. (4.75), (4.76)) имеем свойство

$$\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_j \otimes \mathbf{v}) \in F_r\langle t^* \rangle \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{\mathbf{r}, \infty}. \tag{4.77}$$

Напомним, что (см. (4.53)) $F_r \in \mathfrak{F}$, а потому, согласно (4.3),

$$F_r\langle t^* \rangle \in \mathbf{F}.$$

Напомним также, что согласно (4.65) имеет место сходимость

$$(\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu_i \otimes \mathbf{v}))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v}). \tag{4.78}$$

Тогда в силу (4.77)–(4.78) получаем по определению $\mathbf{F}$, что $\varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v}) \in F_r\langle t^* \rangle$. Иными словами, $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in F_r$. Поскольку выбор r был произвольным, установлено, что

$$(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in F_j \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Как следствие, получаем очевидное включение

$$(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$

С учетом (4.54) получаем, что $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in F$. Однако выбор t^* был произвольным, а потому установлено свойство

$$(t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu^0 \otimes \mathbf{v})) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta^0[. \tag{4.79}$$

Таким образом (см. (4.63), (4.70), (4.79)), установлено, что $\exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})) \in M) \ \&\ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes \mathbf{v})) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta[).$$

Поскольку выбор $\mathbf{v}$ был произвольным, установлено, что $\forall\, v \in Q\ \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \mu \otimes v)) \in M) \ \&\ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \mu \otimes v)) \in F \quad \forall\, t \in [t_*, \vartheta[).$$

С учетом (4.8) и (4.59) получаем теперь включение

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено (4.58). С учетом (4.57) получаем требуемое равенство:

$$\mathbb{A}[M](F) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i). \tag{4.80}$$

Из (4.56) и (4.80) вытекает свойство сходимости

$$\big(\mathbb{A}[M_i](F_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F).$$

С учетом (4.55) получаем требуемое утверждение. □

С л е д с т в и е 4.1. *Если $M \in \mathcal{F}$, а $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ таковы, что*

$$(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F,$$

то $F \in \mathfrak{F}$ и, кроме того,

$$\big(\mathbb{A}[M](F_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F).$$

Доказательство непосредственно следует из предыдущего предложения.

§ 5. Итерации стабильности

В настоящем параграфе излагается (с несущественными изменениями) итерационная процедура ([8, § 11]; см. также [9, гл. V, § 4]). Данная процедура, приводимая здесь в обобщенном варианте, реализуется в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и (при естественных предположениях топологического характера) доставляет в пределе МПП. Наряду со свойствами МПП мы отметим и некоторые свойства множеств, реализующихся по мере выполнения итераций. Иными словами, мы будем рассматривать не только предельные множества.

Если $\alpha \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$ (то есть α — оператор, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$), то последовательность

$$(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_o} : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$$

степеней α определяется следующими традиционными условиями:

$$\big(\alpha^o(H) \overset{\triangle}{=} H \quad \forall\, H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\big) \& (\alpha^{k+1} = \alpha \circ \alpha^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_o), \tag{5.1}$$

где $\circ$ используется для обозначения композиции отображений. С учетом (5.1) получаем, что при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $k \in \mathbb{N}_o$ определен оператор $\mathbb{A}[M]^k$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. При этом $\mathbb{A}[M]^0$ — тождественый оператор. Полагаем, что

$$\mathcal{W}_k(M,N) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{A}[M]^k(N) \ \ \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_o. \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) получаем, что $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big(\mathcal{W}_o(M,N) = N\big) \& \Big(\mathcal{W}_{s+1}(M,N) = \mathbb{A}[M]\big(\mathcal{W}_s(M,N)\big) \subset \mathcal{W}_s(M,N) \ \ \forall s \in \mathbb{N}_o\Big). \tag{5.3}$$

Наконец, имеем также $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{W}(M,N) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}_o} \mathcal{W}_k(M,N) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k(M,N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{5.4}$$

Легко видеть, что (см. (5.3), (5.4)) в этих конструкциях реализуется монотонная сходимость:

$$\big(\mathcal{W}_k(M,N)\big)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M,N) \ \ \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}_s(M,N) \in \mathfrak{F} \ \ \forall s \in \mathbb{N}_o$.*

Доказательство следует из (5.3) и предложения 4.2. Используя (5.4) и свойства замкнутых множеств в ТП, получаем

Следствие 5.1. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M,N) \in \mathfrak{F}$.*

Из предложений 4.3, 5.1 и (5.5) вытекает следующее важное

Предложение 5.2. *Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M,N) = \mathbb{A}[M]\big(\mathcal{W}(M,N)\big)$.*

Отметим два очевидных, но полезных свойства:

1) если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n), \ N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(N)$, то

$$\big(H = \mathbb{A}[M](H)\big) \Longrightarrow \big(H \subset \mathcal{W}(M,N)\big);$$

2) если $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и $L \in \mathcal{P}(N)$, то

$$\big(\mathcal{W}(M,N) \subset L\big) \Longrightarrow \big(\mathcal{W}(M,N) = \mathcal{W}(M,L)\big).$$

В связи с первым свойством отметим следствие: если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M,N)$ есть наибольшая (в упорядоченности по включению) неподвижная точка оператора (4.7) на семействе всех п/м N. Иными словами, в данном случае $\mathcal{W}(M,N)$ — наибольший стабильный мост Н. Н. Красовского в игре сближения-уклонения с параметрами $M, \ N$.

В качестве простого следствия предложения 4.3 отметим также

Предложение 5.3. *Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \ (N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}, \ M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то*

$$\Big(\big((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M\big) \& \big((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathcal{W}_s(M_i,N_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M,N) \ \ \forall s \in \mathbb{N}_o\Big).$$

Следствие 5.2. *Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \ (N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}, \ M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то*

$$\Big(\big((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M\big) \& \big((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathcal{W}(M_i,N_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M,N)\Big).$$

Доказательство получаем непосредственной комбинацией (5.4) и предложения 5.3. Из определений легко следует, что при $M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)\big) \Longrightarrow \big(\mathcal{W}_s(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}_s(M_2,N_2) \ \ \forall s \in \mathbb{N}_o\big);$$

как следствие, получаем импликацию

$$\big((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)\big) \Longrightarrow \big(\mathcal{W}(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}(M_2,N_2)\big).$$

Упомянутые простые свойства используем ниже без дополнительных пояснений. Из предложения 5.3 вытекает

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Если* $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $N \in \mathfrak{F}$, $s \in \mathbb{N}$ *и* $(t_*, x_*) \in N \setminus \mathcal{W}_s(M, N)$, *то*

$$\exists\, \varepsilon \in]0, \infty[\colon\ (t_*, x_*) \notin \mathcal{W}_s\big(S_o(M, \varepsilon), \mathbb{S}(N, \varepsilon)\big).$$

Отметим, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ в виде $\mathcal{W}(M, N)$ имеем МПП, которое исчерпывает возможности успешного решения задачи наведения на M при ФО, определяемых сечениями N, в классе квазистратегий. В этой связи см. [8, теорема 11.1; 23, теорема 10.1]; в указанном случае $\mathcal{W}(M, N)$ есть множество успешной разрешимости задачи сближения в классе (обобщенных многозначных) квазистратегий.

§ 6. Слои пространства позиций

В настоящем параграфе общая схема МПИ (итераций стабильности) конкретизируется в интересах последующего исследования задач уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления. Всюду в дальнейшем фиксируем множества

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})\&(\mathbf{N} \in \mathfrak{F}) \tag{6.1}$$

(наряду с множествами (6.1) будем рассматривать их окрестности); $\mathbf{M}$ играет роль целевого множества задачи сближения, а сечения $\mathbf{N}$ определяют ФО упомянутой задачи. Полагаем далее для краткости, что

$$\big(W_s \triangleq \mathcal{W}_s(\mathbf{M}, \mathbf{N})\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o\big)\&\big(W \triangleq \mathcal{W}(\mathbf{M}, \mathbf{N})\big). \tag{6.2}$$

В связи с (6.2) отметим, что $W_s \in \mathfrak{F}$ при $s \in \mathbb{N}_o$; кроме того, $W \in \mathfrak{F}$. Заметим также, что в силу (5.4) справедливо равенство

$$\mathbf{N} \setminus W = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} (\mathbf{N} \setminus W_s).$$

Отметим, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$ реализуются множества $S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \in \mathfrak{F}$. В этой связи полагаем для краткости, что $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[$

$$\Big(W_s^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}_s\big(S_o(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\big)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o\Big)\&\Big(W^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}\big(S_o(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\big)\Big). \tag{6.3}$$

Ясно, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$ реализуются свойства $(W_s^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_o)\&(W^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F})$. С учетом предложения 5.4 имеем, что

$$\forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\, (t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s\ \exists\, \varepsilon \in]0, \infty[\colon\ (t, x) \notin W_s^{(\varepsilon)}. \tag{6.4}$$

Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то полагаем, что

$$\Big(\mathbb{F}_o^{(\varepsilon)} \triangleq \big((T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\big) \cup W^{(\varepsilon)}\Big)\&\,\Big(\mathbb{F}_s^{(\varepsilon)} \triangleq W_{s-1}^{(\varepsilon)} \setminus W_s^{(\varepsilon)}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\Big). \tag{6.5}$$

Множества (6.5) называем слоями пространства позиций. Отметим легко проверяемые свойства слоев (доказательства очевидным образом извлекаются из (6.5)).

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $\varepsilon \in]0, \infty[$ *и* $s \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)} = \bigcup_{k=1}^{s} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}.$$

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если* $\varepsilon \in]0, \infty[$, *то последовательность* $(\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)})_{k \in \mathbb{N}}$ *образует разбиение множества* $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}$*:*

$$\big(\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)})\&(\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \varnothing\ \ \forall\, k_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}).$$

С л е д с т в и е 6.1. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то* $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} : k \in \mathbb{N}_o\}$ *есть разбиение* $T \times \mathbb{R}^n$*:*

$$(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}) \& (\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \varnothing \quad \forall\, k_1 \in \mathbb{N}_o \quad \forall\, k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

С л е д с т в и е 6.2. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$ *и* $t \in T$, *то* $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\langle t \rangle : k \in \mathbb{N}_o\}$ *есть разбиение* $\mathbb{R}^n$*:*

$$(\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}\langle t \rangle) \& (\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)}\langle t \rangle \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)}\langle t \rangle = \varnothing \quad \forall\, k_1 \in \mathbb{N}_o \quad \forall\, k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

Итак, в виде системы слоев получаем разбиение пространства позиций, а сечения слоев образуют (при фиксации одного и того же момента времени) разбиение фазового пространства. Заметим, что в последующих построениях переход от (6.2) к (6.3) связывается с (6.4), то есть с предложением 5.4. Само свойство (6.4) играет в последующих построениях весьма важную роль.

§ 7. Процедуры уклонения, 1

В настоящем параграфе уточняются построения § 1, касающиеся задач уклонения с ограничением на число переключений. Прежде всего это касается стратегий-троек (триплетов). Рассмотрим соответствующие точные определения.

Через $\mathfrak{V}$ обозначаем множество всех отображений из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathcal{P}'(Q)$; итак, $\mathfrak{V} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n}$. Стало быть, элементы $\mathfrak{V}$ (позиционные стратегии) суть непустозначные мультифункции из $T \times \mathbb{R}^n$ в Q, что идейно соответствует определению позиционных стратегий в [2, 3].

Если $t \in T$, то через $G^*(t)$ обозначаем множество всех отображений

$$g^* : C_n([t,\vartheta_o]) \longrightarrow \mathcal{P}'([t,\vartheta_o]),$$

обладающих каждое следующим свойством неупреждаемости:

$$\forall\, g_1 \in C_n([t,\vartheta_o]) \quad \forall\, g_2 \in C_n([t,\vartheta_o]) \quad \forall\, \theta \in [t,\vartheta_o]$$
$$\big((g_1 |\, [t,\theta]) = (g_2 |\, [t,\theta])\big) \Longrightarrow \big(g^*(g_1) \cap [t,\theta] = g^*(g_2) \cap [t,\theta]\big) \qquad (7.1)$$

(см. [11, 12]). Итак, элементы $G^*(t)$ суть неупреждающие (см. (7.1)) мультифункционалы на $C_n([t,\vartheta_o])$; ясно, что отображения-константы со значениями в $\mathcal{P}'([t,\vartheta_o])$ являются элементами $G^*(t)$. Через $\mathbb{G}_o^*(t)$ обозначаем множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$: $\mathbb{G}_o^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$. Наконец, полагаем при $\theta \in T$, что

$$\mathbb{G}_\theta^* \triangleq \prod_{t \in [\theta,\vartheta_o]} \mathbb{G}_o^*(t) \qquad (7.2)$$

($\mathbb{G}_\theta^*$ есть (обобщенное) декартово произведение множеств $\mathbb{G}_o^*(t),\ t \in [\theta,\vartheta_o]$). Элементы (7.2) называем стратегиями коррекции на $[t,\vartheta_o]$ (см. [11, с. 8]). Каждая стратегия коррекции из множества (7.2) является отображением на $[\theta,\vartheta_o]$, значения которого при $t \in [\theta,\vartheta_o]$ содержатся в $\mathbb{G}_o^*(t)$ и являются, следовательно, всякий раз отображением из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$. Итак, при $\theta \in T,\ \gamma \in \mathbb{G}_\theta^*,\ t \in [\theta,\vartheta_o]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ в виде $\gamma(t)(x)$ имеем (неупреждающий) мультифункционал из множества $G^*(t)$. В частности,

$$\gamma(t)(x) :\ C_n([t,\vartheta_o]) \longrightarrow \mathcal{P}'([t,\vartheta_o])$$

(значениями отображения $\gamma(t)(x)$ являются всякий раз непустые п/м $[t,\vartheta_o]$). Отметим в связи с (7.2) очевидное свойство: если $t \in T,\ \gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $\tau \in [t,\vartheta_o]$, то определено сужение

$$(\gamma |\, [\tau,\vartheta_o]) \in \mathbb{G}_\tau^* \qquad (7.3)$$

исходного отображения γ на отрезок $[\tau,\vartheta_o]$. Наконец, располагая позицией $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и значением $s \in \mathbb{N}$, мы определяем множество допустимых процедур уклонения из данной позиции в виде $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_t^* \times \overline{1,s}$. Здесь s определяет ограничение на число переключений формируемого управления.

Рассмотрим вопрос о траекториях, порождаемых стратегиями-тройками из множества $\mathfrak{V}\times$ $\times\mathbb{G}_t^* \times \mathbb{N}$. Сначала введем несколько вспомогательных определений. Если $t \in T$ и $m \in \mathbb{N}$, то

$$\Delta_m[t] \overset{\triangle}{=} \{(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in [t,\vartheta_o]^{m+1} | \, (\tau_1 = t)\&(\tau_{m+1} = \vartheta_o)\&(\tau_j \leqslant \tau_{j+1} \quad \forall\, j \in \overline{1,m})\}; \tag{7.4}$$

каждый кортеж из множества (7.4) порождает разбиение $[t,\vartheta_o]$ в сумму m промежутков (некоторые из них могут быть вырожденными). Если $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$, то полагаем, что

$$\overrightarrow{k,l} \overset{\triangle}{=} \{j \in \mathbb{N} | \, (k \leqslant j)\&(j < l)\}; \tag{7.5}$$

при этом, конечно, $\overrightarrow{k,l} = \overline{k,l-1}$, где $l-1 \in \mathbb{N}_o$, но мы сохраним обозначение (7.5) в целях более полного согласования с конструкциями [12].

Если $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $v \in Q$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$, то полагаем, что

$$\mathcal{X}_\Pi^{(\theta)}(t,x,v) \overset{\triangle}{=} \{(\mathbf{x}| \, [t,\theta]) : \, \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t,x,v)\},$$

получая непустое множество n-вектор-функций на $[t,\theta]$. Если $V \in \mathfrak{V}$, $t \in T$, $m \in \mathbb{N}$, $(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in$ $\in \Delta_m[t]$ и $\mathbf{x} \in C_n([t,\vartheta_o])$, то

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_Q[V;t;m;(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}};\mathbf{x}] \overset{\triangle}{=} \Big\{(v_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^{m} V\big(\tau_i,\mathbf{x}(\tau_i)\big) | \, (\mathbf{x}|[\tau_k,\tau_{k+1}]) \in \\ \in \mathcal{X}_\Pi^{(\tau_{k+1})}\big(\tau_k,\mathbf{x}(\tau_k),v_k\big) \quad \forall\, k \in \overline{1,m}\Big\}\end{gathered} \tag{7.6}$$

(допускается, что множество (7.6) может быть пустым). Разумеется, (7.6) представляет интерес при условии, что $\mathbf{x} = x(\cdot)$ — траектория системы. Далее, если $V \in \mathfrak{V}$, $t \in T$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$, $\mathbf{x} \in$ $\in C_n([t,\vartheta_o])$ и $m \in \mathbb{N}$, то полагаем

$$\begin{gathered}\Delta_{\text{pos}}[V;t;\gamma;\mathbf{x};m] \overset{\triangle}{=} \Big\{(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}} \in \Delta_m[t] | \, \big(\mathfrak{M}_Q[V;t;m;(\tau_i)_{i\in\overline{1,m+1}};\mathbf{x}] \neq \varnothing\big)\& \\ \&\Big(\tau_{k+1} \in \gamma(\tau_k)\big(\mathbf{x}(\tau_k)\big)\big((\mathbf{x}| \, [\tau_k,\vartheta_o])\big) \quad \forall\, k \in \overrightarrow{1,m}\Big)\Big\}.\end{gathered} \tag{7.7}$$

В (7.7) указаны возможные «временные сценарии» организации коррекций, согласованных с (V,γ,m) и «привязанных» к вектор-функции $\mathbf{x}$ (последняя, кстати, в силу (7.6) непременно является траекторией, а точнее, конечной склейкой v-траекторий; см. (3.5), (3.6)). Наконец, сопоставим стратегии-тройке множество не противоречащих ей траекторий: если $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;m] \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{x} \in C_n([t,\vartheta_o]) | \, \big(\mathbf{x}(t) = x\big)\&(\Delta_{\text{pos}}[V;t;\gamma;\mathbf{x};m] \neq \varnothing)\}. \tag{7.8}$$

Элементы (7.8) — траектории системы, которые стартуют из позиции (t,x) и не противоречат стратегии-тройке (V,γ,m). Эти траектории называем далее порожденными данной стратегией-тройкой из позиции (t,x).

З а м е ч а н и е 7.1. В (7.8) допускается, что формируемое на основе (V,γ,m) обычное кусочно-постоянное, непрерывное справа и непрерывное слева в точке ϑ_o управление $v(\cdot)$ со значениями в Q воздействует на систему вместе с некоторой обобщенной помехой $\mu \in \mathcal{R}_t$; см. в этой связи (3.5), (3.6). Итак, мы существенно расширяем возможности игрока I в части формирования помеховых воздействий. Отметим здесь же вариант [11] излагаемой ниже конструкции, в рамках которого допускалось использование игроком I только обычных помеховых управлений. □

Из (7.6)–(7.8) легко следует свойство: если $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$ и $\gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*$, то

$$\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\gamma;1] = \bigcup_{v\in V(t_*,x_*)} \mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,v) \in \mathcal{P}'\big(C_n([t_*,\vartheta_o])\big). \tag{7.9}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Если* $t_* \in T$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$ *и* $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in$ $\in \Delta_{\mathrm{pos}}[V; t_*; \gamma; \mathbf{x};\ m+1]$, *то*

$$(\tau_{i+1})_{i \in \overline{1, m+1}} \in \Delta_{\mathrm{pos}}[V; \tau_2; (\gamma |\, [\tau_2, \vartheta_o]); (\mathbf{x} |\, [\tau_2, \vartheta_o]); m].$$

Доказательство легко следует из определений. Из (7.8) и предложения 7.1 вытекает

П р е д л о ж е н и е 7.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; m+1]$$

и $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\mathrm{pos}}[V; t_*; \gamma; \mathbf{x};\ m+1]$, *то*

$$(\mathbf{x} |\, [\tau_2, \vartheta_o]) \in \mathfrak{X}\big[\tau_2; \mathbf{x}(\tau_2); V; (\gamma |\, [\tau_2, \vartheta_o]); m\big].$$

В дальнейшем используется «обычная» операция склеивания n-вектор-функций: если

$$t \in T,\ \theta \in [t, \vartheta_o],\ g_1\colon\ [t, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n,\ \ g_2\colon\ [\theta, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n,$$

то склеенная n-вектор-функция

$$g_1 \square\, g_2\colon\ [t, \vartheta_o] \to \mathbb{R}^n$$

определяется условиями

$$\big((g_1 \square\, g_2)(\xi) \overset{\triangle}{=} g_1(\xi) \quad \forall\, \xi \in [t, \theta[\big) \,\&\, \big((g_1 \square\, g_2)(\xi) \overset{\triangle}{=} g_2(\xi) \quad \forall\, \xi \in [\theta, \vartheta_o]\big). \tag{7.10}$$

Ясно, что при $g_1 \in C_n([t, \vartheta_o])$ и $g_2 \in C_n([\theta, \vartheta_o])$

$$\big(g_1(\theta) = g_2(\theta)\big) \Longrightarrow \big(g_1 \square\, g_2 \in C_n([t, \vartheta_o])\big). \tag{7.11}$$

П р е д л о ж е н и е 7.3. *Если* $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_t$ *и* $m \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; m] \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем математическую индукцию. Введем в рассмотрение следующее множество:

$$\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \{m \in \mathbb{N} |\, \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; m] \neq \varnothing \ \ \forall\, (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \ \ \forall\, V \in \mathfrak{V} \ \ \forall\, \gamma \in \mathbb{G}^*_t\}.$$

Из (7.9) следует, что $1 \in \mathfrak{N}$. Пусть $r \in \mathfrak{N}$. Выберем и зафиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$ и $\kappa \in \mathbb{G}^*_{t_*}$. По выбору r имеем, что

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V} : \kappa; r] \neq \varnothing.$$

С учетом этого выберем $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; r]$. Тогда $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, $\mathbf{x}(t_*) = x_*$ и

$$\Delta_{\mathrm{pos}}[\mathbb{V}; t_*; \kappa; \mathbf{x}; r] \neq \varnothing.$$

Пусть

$$(\theta_i)_{i \in \overline{1, r+1}} \in \Delta_{\mathrm{pos}}[\mathbb{V}; t_*; \kappa; \mathbf{x}; r]. \tag{7.12}$$

В частности, $(\theta_i)_{i \in \overline{1, r+1}} \in \Delta_r[t_*]$. С учетом (7.7) и (7.12) имеем свойство

$$\mathfrak{M}_Q[\mathbb{V}; t_*; r; (\theta_i)_{i \in \overline{1, r+1}}; \mathbf{x}] \neq \varnothing;$$

кроме того,

$$\theta_{k+1} \in \kappa(\theta_k)\big(\mathbf{x}(\theta_k)\big)\big((\mathbf{x} |\, [\theta_k, \vartheta_o])\big) \quad \forall\, k \in \overrightarrow{1, r}.$$

Выберем и зафиксируем $(v_*^{(i)})_{i \in \overline{1, r}} \in \mathfrak{M}_Q[\mathbb{V}; t_*; r; (\theta_i)_{i \in \overline{1, r+1}}; \kappa]$; тогда $v_*^{(j)} \in \mathbb{V}\big(\theta_j, \mathbf{x}(\theta_j)\big)\ \forall\, j \in \overline{1, r}$. Кроме того,

$$(\mathbf{x} |\, [\theta_k, \theta_{k+1}]) \in \mathcal{X}_\Pi^{(\theta_{k+1})}\big(\theta_k, \mathbf{x}(\theta_k), v_*^{(k)}\big) \quad \forall\, k \in \overline{1, r}.$$

Заметим, что $\kappa(\theta_r)\big(\mathbf{x}(\theta_r)\big)\in G^*(\theta_r)$. Данный неупреждающий функционал не использовался при построении $\mathbf{x}$. Сейчас мы его применим по отношению к $\overline{\mathbf{x}} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{x}|\,[\theta_r,\vartheta_o])$:

$$\kappa(\theta_r)\big(\mathbf{x}(\theta_r)\big)(\overline{\mathbf{x}}) \in \mathcal{P}'([\theta_r,\vartheta_o]).$$

С учетом этого выберем $\overline{\theta} \in \kappa(\theta_r)\big(\mathbf{x}(\theta_r)\big)(\overline{\mathbf{x}})$. Пусть $(\zeta_i)_{i\in\overline{1,r+2}} \in [t_*,\vartheta_o]^{r+2}$ имеет вид

$$(\zeta_j \stackrel{\triangle}{=} \theta_j \quad \forall\, j \in \overline{1,r})\&(\zeta_{r+1} \stackrel{\triangle}{=} \overline{\theta})\&(\zeta_{r+2} \stackrel{\triangle}{=} \vartheta_o).$$

Тогда $(\zeta_i)_{i\in\overline{1,r+2}} \in \Delta_{r+1}[t_*]$. При этом $\big(\overline{\theta},\mathbf{x}(\overline{\theta})\big)= \big(\zeta_{r+1},\mathbf{x}(\zeta_{r+1})\big)\in T\times\mathbb{R}^n$. Выберем $\overline{v} \in \mathbb{V}\big(\overline{\theta},\mathbf{x}(\overline{\theta})\big)$ и $\overline{\mu} \in \mathcal{R}_{\overline{\theta}}$, получая $\overline{\mu}\otimes\overline{v} \in \mathcal{H}_{\overline{\theta}}$. С учетом (7.10), (7.11) получаем, что

$$h \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{x}\square\,\varphi\big(\cdot,\overline{\theta},\mathbf{x}(\overline{\theta}),\overline{\mu}\otimes\overline{v}\big)= \mathbf{x}\square\,\varphi\big(\cdot,\zeta_{r+1},\mathbf{x}(\zeta_{r+1}),\overline{\mu}\otimes\overline{v}\big)\in C_n([t_*,\vartheta_o]). \tag{7.13}$$

Более того, как нетрудно проверить, $h \in \mathfrak{X}[t_*;x_*;\mathbb{V};\kappa;r+1]$ (используем неупреждаемость мультифункционалов $\kappa(\zeta_s)\big(h(\zeta_s)\big)= \kappa(\zeta_s)\big(\mathbf{x}(\zeta_s)\big)\quad \forall\, s \in \overline{1,r}$, а также (7.13)). Поскольку выбор (t_*,x_*), $\mathbb{V}$ и κ был произвольным, установлено, что $r+1 \in \mathfrak{N}$. Поэтому $(1 \in \mathfrak{N})\&(k+1 \in \mathfrak{N}\ \ \forall\, k \in \mathfrak{N})$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$, чем и завершается доказательство. □

Итак, каждой стратегии-тройке сопоставляется непустое множество — пучок траекторий, порожденных данной стратегией.

П р е д л о ж е н и е 7.4. *Если* $(t_*,x_*) \in W_1$, *то* $\forall\, V \in \mathfrak{V}\ \forall\,\gamma \in \mathbb{G}^*_{t_*}\ \exists\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\gamma;1]$ $\exists\vartheta \in [t_*,\vartheta_o]$:

$$\Big(\big(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)\big)\in \mathbf{M}\Big)\&\Big(\big(t,\mathbf{x}(t)\big)\in \mathbf{N}\quad \forall\, t \in [t_*,\vartheta[\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По выбору (t_*,x_*) имеем включение

$$(t_*,x_*) \in \mathbb{A}[\mathbf{M}](\mathbf{N}). \tag{7.14}$$

Фиксируя $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$ и $\kappa \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, получаем, в частности, что $\mathbb{V}(t_*,x_*) \in \mathcal{P}'(Q)$, причем согласно (7.9) $\mathfrak{X}[t_*;x_*;\mathbb{V};\kappa;1]$ есть объединение всех множеств $\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,v)$, $v \in \mathbb{V}(t_*,x_*)$. Используя непустоту множества $\mathbb{V}(t_*,x_*)$, выберем $v_* \in \mathbb{V}(t_*,x_*)$, а тогда из (7.14) имеем для некоторых $\mu_* \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta_* \in [t_*,\vartheta_o]$ свойства

$$\Big(\big(\vartheta_*,\mathbf{x}^*(\vartheta_*)\big)\in \mathbf{M}\Big)\&\Big(\big(t,\mathbf{x}^*(t)\big)\in \mathbf{N}\quad \forall\, t \in [t_*,\vartheta_*[\Big),$$

где $\mathbf{x}^* \stackrel{\triangle}{=} \varphi(\cdot,t_*,x_*,\mu_*\otimes v_*) \in \mathcal{X}[t_*;x_*;\mathbb{V};\kappa;1]$. Поскольку $\mathbb{V}$ и κ выбирались произвольно, предложение доказано. □

П р е д л о ж е н и е 7.5. *Если* $s \in \mathbb{N}$, $(t,x) \in W_s$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}^*_t$ *и* $k \in \overline{1,s}$, *то*

$$\exists\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;k]\quad \exists\vartheta \in [t,\vartheta_o]\colon\ \Big(\big(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)\big)\in \mathbf{M}\Big)\&\Big(\big(\xi,\mathbf{x}(\xi)\big)\in \mathbf{N}\quad \forall\,\xi \in [t,\vartheta[\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{s \in \mathbb{N}|\,\forall\,(t,x) \in W_s\ \ \forall\, V \in \mathfrak{V}\ \ \forall\,\gamma \in \mathbb{G}^*_t\ \ \forall\, k \in \overline{1,s}\ \exists\,\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;k]\ \exists\,\vartheta \in [t,\vartheta_o]\colon \\ \Big(\big(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)\big)\in \mathbf{M}\Big)\&\Big(\big(\xi,\mathbf{x}(\xi)\big) \in \mathbf{N}\quad \forall\,\xi \in [t,\vartheta[\Big)\Big\}. \tag{7.15}$$

Из предложения 7.4 вытекает, что $1 \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно $m \in \mathfrak{N}$. Пусть, кроме того, $(t_*,x_*) \in W_{m+1}$, $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$ и $\kappa \in \mathbb{G}^*_{t_*}$. Тогда $\mathbb{V}(t_*,x_*) \in \mathcal{P}'(Q)$ и, в частности, $\mathbb{V}(t_*,x_*) \neq \varnothing$. Выберем произвольно $v_* \in \mathbb{V}(t_*,x_*)$. Тогда, поскольку $W_{m+1} = \mathbb{A}[\mathbf{M}](W_m)$, для некоторых $\mu_* \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta_* \in [t_*,\vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta_*,\mathbf{x}^*(\vartheta_*)\big)\in \mathbf{M}\Big)\&\Big(\big(t,\mathbf{x}^*(t)\big) \in W_m\quad \forall\, t \in [t_*,\vartheta_*[\Big), \tag{7.16}$$

где $\mathbf{x}^* \triangleq \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu_* \otimes v_*)$. При этом $\kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*) \in \mathcal{P}'([t_*, \vartheta_o])$. С учетом этого выберем произвольно
$$t^* \in \kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*). \tag{7.17}$$
Рассмотрим позицию $\big(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)\big) \in T \times \mathbb{R}^n$. Фиксируя $r \in \overline{1,m}$, получаем стратегию-тройку $(\mathbb{V}, \overline{\kappa}, r)$, где $\overline{\kappa} \triangleq (\kappa | [t^*, \vartheta_o]) \in \mathbb{G}^*_{t^*}$ (см. (7.3)). В силу предложения 7.3 $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \overline{\kappa}; r] \in \mathcal{P}'\big(C_n([t^*, \vartheta_o])\big)$. С учетом (7.17) нетрудно показать, что
$$\mathbf{x}^* \square\, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1] \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \overline{\kappa}; r]. \tag{7.18}$$
При этом $(\vartheta_* \leqslant t^*) \vee (t^* < \vartheta_*)$. Оба упомянутых случая рассмотрим отдельно.

1. Пусть $\vartheta_* \leqslant t^*$. Тогда с учетом непустоты $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \overline{\kappa}; r]$ выберем произвольно $\overline{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \overline{\kappa}; r]$, получая (см. (7.18))
$$\overline{\mathbf{z}} \triangleq \mathbf{x}^* \square\, \overline{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]$$
со свойством $\overline{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{x}^*(t) \ \ \forall\, t \in [t_*, t^*]$. С учетом (7.16) получаем, что
$$\Big(\big(\vartheta_*, \overline{\mathbf{z}}(\vartheta_*)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(t, \overline{\mathbf{z}}(t)\big) \in W_m \ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta_*[\Big).$$
Итак, установлена следующая импликация:
$$\begin{gathered}(\vartheta_* \leqslant t^*) \Rightarrow \Big(\exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]\, \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: \\ \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(t, \mathbf{x}(t)\big) \in W_m \ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big)\Big).\end{gathered} \tag{7.19}$$

2. Пусть $t^* < \vartheta_*$. Тогда $t^* \in [t_*, \vartheta_*[$ и с учетом (7.16)
$$\big(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)\big) \in W_m, \ \ r \in \overline{1,m}, \ \ \mathbb{V} \in \mathfrak{V}, \ \overline{\kappa} \in \mathbb{G}^*_{t^*}.$$
Тогда по выбору m имеем, что (см. (7.15)) для некоторых $\mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t^*, \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \overline{\kappa}; r]$ и $\vartheta^\natural \in [t^*, \vartheta_o]$
$$\Big(\big(\vartheta^\natural, \mathbf{x}^\natural(\vartheta^\natural)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(t, \mathbf{x}^\natural(t)\big) \in \mathbf{N} \ \ \forall\, t \in [t^*, \vartheta^\natural[\Big). \tag{7.20}$$
С учетом (7.18) получаем свойство
$$\mathbf{x}^\natural_* \triangleq \mathbf{x}^* \square\, \mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t_*, x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1], \tag{7.21}$$
причем $\mathbf{x}^\natural_*(t) = \mathbf{x}^*(t) \ \ \forall\, t \in [t_*, t^*]$. Тогда из (7.16) получаем, что
$$\big(t, \mathbf{x}^\natural_*(t)\big) = \big(t, \mathbf{x}^*(t)\big) \in \mathbf{N} \ \ \forall\, t \in [t_*, t^*]$$
(учли вложение $W_m \subset \mathbf{N}$), откуда с учетом (7.20) и (7.21) получаем, что
$$\Big(\big(\vartheta^\natural, \mathbf{x}^\natural_*(\vartheta^\natural)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(t, \mathbf{x}^\natural_*(t)\big) \in \mathbf{N} \ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta^\natural[\Big). \tag{7.22}$$
Из (7.21) и (7.22) вытекает, что
$$\begin{gathered}(t^* < \vartheta_*) \Rightarrow \Big(\exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]\ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: \\ \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(t, \mathbf{x}(t)\big) \in \mathbf{N} \ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big)\Big).\end{gathered} \tag{7.23}$$

Поскольку выбор $r \in \overline{1,m}$ был произвольным, из (7.19) и (7.23) вытекает, что

$$\forall\, s \in \overline{2, m+1}\, \exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s]\ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon\ \Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big). \tag{7.24}$$

С другой стороны, $W_{m+1} \subset W_1$, а потому $(t_*, x_*) \in W_1$, и с учетом предложения 7.4 и (7.24)

$$\forall\, s \in \overline{1, m+1}\, \exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s]\ \exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon\ \Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N}\ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta[\Big).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*), $\mathbb{V}$ и κ был произвольным, установлено, что $m+1 \in \mathfrak{N}$. Получили импликацию $(m \in \mathfrak{N}) \Rightarrow (m+1 \in \mathfrak{N})$. Следовательно, $(1 \in \mathfrak{N}) \& (k+1 \in \mathfrak{N}\ \ \forall\, k \in \mathfrak{N})$, а потому $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$, и с учетом (7.15) получаем требуемое утверждение. $\square$

Итак, установлено, что при $s \in \mathbb{N}$ и $(t,x) \in W_s$ гарантированное $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-уклонение в классе стратегий-троек (V, γ, k), $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$, $k \in \overline{1,s}$, невозможно. В следующем параграфе рассмотрим вопрос об осуществимости такого уклонения для позиций из множеств $\mathbf{N} \setminus W_s$. Более того, будем исследовать для вышеупомянутых позиций вопрос об осуществимости строгого уклонения.

§ 8. Процедуры уклонения, 2

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о процедурах, гарантирующих при соответствующем выборе начальной позиции строгое уклонение при том или ином ограничении на число переключений (см. в этой связи [11, 12]). Напомним в этой связи, что согласно (6.4)

$$\Xi_s(t,x) \overset{\triangle}{=} \{\varepsilon \in]0, \infty[\ |\ (t,x) \notin W_s^{(\varepsilon)}\} \in \mathcal{P}'(]0,\infty[)\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(t,x) \in \mathbf{N} \setminus W_s. \tag{8.1}$$

Введем в рассмотрение аналог позиционной стратегии [12, (5.5), (5.6)], для чего отметим сначала, что $\forall\, \varepsilon \in]0,\infty[\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \forall\,(t,x) \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\ \exists\, v \in Q\ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t,x,v)\ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$\Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon\ (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W_{s-1}^{(\varepsilon)}\Big). \tag{8.2}$$

С учетом (8.2) и следствия 6.1 полагаем, что при $\varepsilon \in]0,\infty[$ позиционная стратегия $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathfrak{V}$ определяется следующими условиями:

$$\begin{gathered}\big(\mathbf{V}_\varepsilon(t,x) \overset{\triangle}{=} Q\ \ \forall\,(t,x) \in \mathbb{F}_o^{(\varepsilon)}\big) \& \big(\mathbf{V}_\varepsilon(t,x) \overset{\triangle}{=} \Big\{v \in Q |\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t,x,v)\ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o] \\ \Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon\ (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W_{s-1}^{(\varepsilon)}\Big)\Big\}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(t,x) \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\Big).\end{gathered} \tag{8.3}$$

При $t \in T$ полагаем, что $\Theta_t^o \in G^*(t)$ определяется условием $\Theta_t^o(g) \overset{\triangle}{=} \{\vartheta_o\}\ \ \forall\, g \in C_n([t, \vartheta_o])$. Для построения работоспособных стратегий коррекции потребуются некоторые вспомогательные определения. Если $t \in T$, $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$C_t[\Gamma; \Lambda] \overset{\triangle}{=} \Big\{g \in C_n([t, \vartheta_o]) |\, \exists\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon\ \Big((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda\Big) \& \Big((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma\ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta]\Big)\Big\}. \tag{8.4}$$

О п р е д е л е н и е 8.1. Если $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то мультифункционал

$$\theta^o[\Gamma; \Lambda; t] : C_n([t, \vartheta_o]) \longrightarrow \mathcal{P}'([t, \vartheta_o])$$

определяем следующими условиями:

$$\begin{gathered}\bigg(\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \overset{\triangle}{=} \Big\{\vartheta \in [t, \vartheta_o] |\ \Big((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda\Big) \& \Big((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma\ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta]\Big)\Big\}\ \ \forall\, g \in C_t[\Gamma; \Lambda]\bigg) \& \\ \& \bigg(\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \overset{\triangle}{=} \{\vartheta_o\}\ \ \forall\, g \in C_n([t, \vartheta_o]) \setminus C_t[\Gamma; \Lambda]\bigg).\end{gathered} \tag{8.5}$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если* $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ *и* $t \in T$, *то* $\theta^o[\Gamma; \Lambda; t] \in G^*(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем Γ, Λ и t в соответствии с условиями. Пусть $g_1 \in C_n([t,\vartheta_o])$, $g_2 \in C_n([t,\vartheta_o])$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$ таковы, что

$$(g_1 |\, [t,\theta]) = (g_2 |\, [t,\theta]).$$

Введем $\mathbb{T}_1 \triangleq \theta^o[\Gamma;\Lambda;t](g_1)$ и $\mathbb{T}_2 \triangleq \theta^o[\Gamma;\Lambda;t](g_2)$.

1. Пусть $g_1 \in C_t[\Gamma;\Lambda]$. Тогда $\mathbb{T}_1$ определяется первым положением в (8.5). Пусть $\vartheta_1 \in \mathbb{T}_1 \cap [t,\theta]$. Тогда

$$\Big(\big(\vartheta_1, g_1(\vartheta_1)\big) \in \Lambda\Big) \& \Big(\big(\xi, g_1(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t,\vartheta_1]\Big). \tag{8.6}$$

Поскольку $\vartheta_1 \leqslant \theta$, из (8.6) легко следует, что $\vartheta_1 \in \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]$. Итак, $\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]$. Получили импликацию

$$(g_1 \in C_t[\Gamma;\Lambda]) \Longrightarrow (\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]). \tag{8.7}$$

2. Пусть теперь $g_1 \in C_n([t,\vartheta_o]) \setminus C_t[\Gamma;\Lambda]$. Из определения 8.1 следует, что $\mathbb{T}_1 = \{\vartheta_o\}$, а из (8.4) и совпадения $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на $[t,\theta]$ вытекает, что $\forall\, \vartheta \in [t,\theta]$

$$\Big(\big(\vartheta, g_2(\vartheta)\big) \in \Lambda\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t,\vartheta] \colon \big(\xi, g_2(\xi)\big) \in \Gamma\Big).$$

Допустим, что $(\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]) \neq \varnothing$. Пусть

$$\overline{\vartheta} \in (\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]).$$

Тогда $\overline{\vartheta} \notin \mathbb{T}_2$ и, вместе с тем, $\overline{\vartheta} = \vartheta_o$. Получили, что $\vartheta_o \notin \mathbb{T}_2$, что означает в силу определения 8.1 справедливость включения $g_2 \in C_t[\Gamma;\Lambda]$. При этом

$$\mathbb{T}_2 = \Big\{\vartheta \in [t,\vartheta_o] \,\Big|\, \Big(\big(\vartheta, g_2(\vartheta)\big) \in \Lambda\Big) \& \Big(\big(\xi, g_2(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t,\vartheta]\Big)\Big\} \subset [t,\vartheta_o[. \tag{8.8}$$

Тогда $\mathbb{T}_2 \cap [t,\theta] = \varnothing$ (действительно, при $\widehat{\vartheta} \in \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]$ имеем $\widehat{\vartheta} < \vartheta_o$, и вместе с тем, с учетом (8.8),

$$\Big(\big(\widehat{\vartheta}, g_1(\widehat{\vartheta})\big) \in \Lambda\Big) \& \Big(\big(\xi, g_1(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t,\widehat{\vartheta}]\Big);$$

поэтому при $\mathbb{T}_2 \cap [t,\theta] \neq \varnothing$ имеем в силу (8.4), что $g_1 \in C_t[\Gamma;\Lambda]$, а это невозможно). Кроме того, при $\theta = \vartheta_o$ имеем равенство $g_1 = g_2$, а тогда $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_2 = \{\vartheta_o\}$, что невозможно в силу (8.8). Стало быть, $\theta < \vartheta_o$, а потому

$$\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta] = \{\vartheta_o\} \cap [t,\theta] = \varnothing,$$

и наше предположение о непустоте множества

$$(\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t,\theta])$$

неверно. Таким образом,

$$\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]$$

и в рассматриваемом случае 2. С учетом (8.7) получаем окончательно импликацию

$$\big((g_1 |\, [t,\theta]) = (g_2 |\, [t,\theta])\big) \Longrightarrow (\mathbb{T}_1 \cap [t,\theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t,\theta]).$$

Поскольку g_1, g_2 и θ выбирались произвольно, установлено требуемое свойство неупреждаемости. □

С учетом следствия 6.2 корректно следующее

О п р е д е л е н и е 8.2. Если $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $t \in T$, то полагаем, что отображение $\widetilde{\theta}_t^{(\varepsilon)} \in \mathbb{G}_o^*(t)$ имеет следующий вид:

$$\big(\widetilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x) \triangleq \Theta_t^o \quad \forall x \in \mathbb{F}_o^{(\varepsilon)}\langle t\rangle\big) \& \big(\widetilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x) \triangleq \theta^o[S_o(\mathbf{M},\varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}; t] \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\langle t\rangle\big).$$

С учетом определения 8.2 имеем теперь, что

$$\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t] \triangleq (\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{\xi})_{\xi \in [t,\vartheta_o]} \in \mathbb{G}^*_t \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[\quad \forall t \in T. \tag{8.9}$$

Таким образом (см. (8.3), (8.9)), при $\varepsilon \in]0,\infty[, t \in T$ и $s \in \mathbb{N}$ $\;(\mathbf{V}_{\varepsilon}, \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t], s) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}^*_t \times \mathbb{N}$ (построена «выталкивающая» стратегия-тройка).

П р е д л о ж е н и е 8.2. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $(t,x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}_s$ *и* $v \in \mathbf{V}_{\varepsilon}(t,x)$, *то*

$$\mathcal{X}_{\Pi}(t,x,v) \subset C_t[S_o(\mathbf{M},\varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\varepsilon, s, (t,x)$ и v в соответствии с условиями. В силу предложения 6.1 $(t,x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_k$, где $k \in \overline{1,s}$. С учетом (8.2) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\Pi}(t,x,v) \;\; \forall \vartheta \in [t,\vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t,\vartheta[\colon \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin W^{(\varepsilon)}_{s-1}\Big)$$

(учли неравенство $k \leqslant s$). Заметим, что

$$\begin{gathered} C_t[S_o(\mathbf{M},\varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}] = \Big\{ g \in C_n([t,\vartheta_o]) \,|\, \exists\, \vartheta \in [t,\vartheta_o]\colon \\ \Big(\big(\vartheta, g(\vartheta)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}\Big) \& \Big(\big(\xi, g(\xi)\big) \notin S_o(\mathbb{M},\varepsilon) \;\; \forall \xi \in [t,\vartheta]\Big)\Big\}. \end{gathered} \tag{8.10}$$

Пусть $\mathbf{x}^o \in \mathcal{X}_{\Pi}(t,x,v)$. Получили $\mathbf{x}^o \in C_n([t,\vartheta_o])$. Допустим сначала, что

$$\exists\, \vartheta \in [t,\vartheta_o]\colon \; \big(\vartheta, \mathbf{x}^o(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon). \tag{8.11}$$

В силу (8.11) имеем, конечно,

$$\Theta \triangleq \big\{\vartheta \in [t,\vartheta_o] \,|\, \big(\vartheta, \mathbf{x}^o(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\big\} \in \mathcal{P}'([t,\vartheta_o]),$$

и определено $\vartheta_* \triangleq \inf(\Theta) \in [t,\vartheta_o]$, причем $\vartheta_* \in \Theta$, поскольку $S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\big(\vartheta_*, \mathbf{x}^o(\vartheta_*)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)$$

и по выбору v (см. (8.3)) для некоторого $t^* \in [t,\vartheta_*[$

$$\big(t^*, \mathbf{x}^o(t^*)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}, \tag{8.12}$$

причем $\big(\xi, \mathbf{x}^o(\xi)\big) \notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \;\; \forall \xi \in [t,t^*]$ (в самом деле, $t^* < \vartheta_*$). С учетом (8.10) и (8.12) получили, что

$$\mathbf{x}^o \in C_t[S_o(\mathbf{M},\varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}] \tag{8.13}$$

при условии (8.11). Итак,

$$\Big(\exists\, \vartheta \in [t,\vartheta_o]: \; \big(\vartheta, \mathbf{x}^o(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\Big) \Longrightarrow \big(\mathbf{x}^o \in C_t[S_o(\mathbf{M},\varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}]\big). \tag{8.14}$$

Пусть теперь $\big(\vartheta, \mathbf{x}^o(\vartheta)\big) \notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \;\; \forall \vartheta \in [t,\vartheta_o]$. При этом $\big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \in T \times \mathbb{R}^n$ и

$$\Big(\vartheta_o, \varphi\big(\vartheta_o, \vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o), \mu \otimes v\big)\Big) = \big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \;\; \forall \mu \in \mathcal{R}_{\vartheta_o}. \tag{8.15}$$

Поскольку $[\vartheta_o,\vartheta_o] = \{\vartheta_o\}$, из (8.15) следует, что

$$\big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \notin \mathbb{A}[S_o(\mathbf{M},\varepsilon)]\big(\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\big).$$

Иными словами, $\big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \notin W^{(\varepsilon)}_1$ и, поскольку $1 \leqslant s-1$, то $\big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \notin W^{(\varepsilon)}_{s-1}$. В итоге

$$\Big(\big(\vartheta_o, \mathbf{x}^o(\vartheta_o)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}^o(\xi)\big) \notin S_o(\mathbf{M},\varepsilon) \;\; \forall \xi \in [t,\vartheta_o]\Big). \tag{8.16}$$

С учетом (8.4) и (8.16) получаем, что

$$\Big((\vartheta, \mathbf{x}^o(\vartheta)) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]\Big) \Longrightarrow \big(\mathbf{x}^o \in C_t[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}]\big).$$

С учетом (8.14) получаем, что (8.13) выполнено во всех возможных случаях. Поскольку выбор $\mathbf{x}^o$ был произвольным, предложение доказано. □

Из предложения 8.2 вытекает (см. определение 8.2), что при $\varepsilon \in]0, \infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $(t, x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_s$, $v \in \mathbf{V}_\varepsilon(t, x)$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)$

$$\theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}; t](\mathbf{x}) = \Big\{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \big| \Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_{s-1}\Big) \& \\ \& \Big((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta]\Big)\Big\}.$$

С учетом (7.9) получаем весьма очевидное свойство: $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall\, (t, x) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_1$ $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; 1\big]$ $\forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$\Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[:\ (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big). \tag{8.17}$$

П р е д л о ж е н и е 8.3. *Если* $\varepsilon \in]0, \infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}_s$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s\big]$ *и* $\vartheta \in [t, \vartheta_o]$, *то истинна импликация*

$$\Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[:\ (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$ и введем множество

$$\mathfrak{N} \triangleq \Big\{s \in \mathbb{N} \big| \forall\, (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}_s \ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s\big] \ \ \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o] \\ \Big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[:\ (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big)\Big\}. \tag{8.18}$$

Из (8.17), (8.18) имеем включение $1 \in \mathfrak{N}$. Пусть $m \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}_{m+1},\ \ h \in \mathfrak{X}\big[t_*; x_*; \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; m+1\big],\ \vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]. \tag{8.19}$$

Тогда $h \in C_n([t_*, \vartheta_o])$ и $h(t_*) = x_*$; $\Delta_{\mathrm{pos}}\big[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; h; m+1\big] \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем

$$(\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\mathrm{pos}}\big[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; h; m+1\big],$$

получая, в частности, что $(\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{m+1}[t_*]$ и $\theta_2 \in [t_*, \vartheta_o]$. С учетом (7.3) и предложения 7.2 имеем, что

$$(h|\,[\theta_2, \theta_o]) \in \mathfrak{X}\big[\theta_2; h(\theta_2); \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2]; m\big]. \tag{8.20}$$

Заметим, что $\theta_2 \in \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t_*}(x_*)(h)$, где $\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t_*}(x_*) \in G^*(t_*)$. Заметим здесь же, что

$$\mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; m+1; (\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}}; h] \neq \varnothing.$$

С учетом этого выберем $(v^*_i)_{i \in \overline{1, m+1}} \in \mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; m+1; (\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}}; h]$. Тогда, в частности, $v^*_1 \in \mathbf{V}_\varepsilon(t_*, x_*)$ и согласно (7.5) для некоторой траектории $h_1 \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, v_1)$

$$(h|\,[t_*, \theta_2]) = (h_1|\,[t_*, \theta_2]),$$

откуда в силу неупреждаемости $\widetilde{\theta}_{t_*}(x_*)$ получаем, что

$$\theta_2 \in \widetilde{\theta}_{t_*}(x_*)(h_1). \tag{8.21}$$

С учетом (8.19) и предложения 8.2

$$h_1 \in C_{t_*}[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W^{(\varepsilon)}_m].$$

Данное свойство допускает уточнение: по выбору (t_*, x_*) имеем в силу предложения 6.1, что для некоторого $r \in \overline{1, m+1}$ выполнено $(t_*, x_*) \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}$, а потому $x_* \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}\langle t_*\rangle$. Как следствие (см. определение 8.2),

$$\widetilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*) = \theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}; t_*]. \tag{8.22}$$

С учетом (8.21) и (8.22) получаем, что

$$\Big(\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) = \big(\theta_2, h_1(\theta_2)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}\Big) \& \Big(\big(t, h(t)\big) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \quad \forall t \in [t_*, \theta_2]\Big). \tag{8.23}$$

Из (8.23) имеем, в частности, импликацию

$$\Big(\big(\vartheta_*, h(\vartheta_*)\big) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow (\theta_2 < \vartheta_*). \tag{8.24}$$

Отдельно рассмотрим случаи $r = 1$ и $r \in \overline{2, m+1}$.

1. При $r = 1$ имеем, что $\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$, и с учетом (8.24) получаем в рассматриваемом случае $r = 1$ импликацию

$$\Big(\big(\vartheta_*, h(\vartheta_*)\big) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta_*[\colon \; \big(t, h(t)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big). \tag{8.25}$$

2. Пусть $r \in \overline{2, m+1}$. Тогда в силу (8.23)

$$\Big(\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big) \vee \Big(\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}\Big). \tag{8.26}$$

В первом, из указанных в (8.26), случае имеем сразу (см. (8.24)) импликацию (8.25). Пусть

$$\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}. \tag{8.27}$$

Тогда, поскольку $W_m^{(\varepsilon)} \subset W_{r-1}^{(\varepsilon)}$, получаем, в частности, что

$$\big(\theta_2, h(\theta_2)\big) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_m^{(\varepsilon)}.$$

Поэтому по выбору m имеем следующее свойство: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[\theta_2; h(\theta_2); \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2]; m\big] \;\; \forall\, \vartheta \in [\theta_2, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [\theta_2, \vartheta[\colon \; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big). \tag{8.28}$$

Из (8.20), (8.24) и (8.28) следует сразу, что

$$\Big(\big(\vartheta_*, h(\vartheta_*)\big) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [\theta_2, \vartheta_*[\colon \; \big(\xi, h(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big).$$

Поскольку $[\theta_2, \vartheta_*[\subset [t_*, \vartheta_*[$, имеем с учетом (8.24), что (8.25) истинно и при условии (8.27). Таким образом, (8.25) истинно при $r \in \overline{2, m+1}$. Мы установили, что (8.25) истинно во всех возможных случаях. Поскольку выбор $(t_*, x_*), h$ и ϑ_* (см. (8.19)) был произвольным, получаем, что $m+1 \in \mathfrak{N}$ (см. (8.18)). Итак, $(1 \in \mathfrak{N}) \& (k+1 \in \mathfrak{N} \;\; \forall k \in \mathfrak{N})$. Получили (см. (8.18)) требуемое утверждение. □

С учетом (8.1) и предложения 8.3 имеем, что $\forall s \in \mathbb{N} \; \forall (t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s \; \forall \varepsilon \in \Xi_s(t, x)$ $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s\big] \; \forall\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t, \vartheta[\colon \; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big). \tag{8.29}$$

Мы получаем в (8.29) конкретные варианты процедур, гарантирующих строгое уклонение.

§ 9. Условия разрешимости задач уклонения с ограничением на число переключений

В настоящем параграфе указываются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие возможность успешного решения задач уклонения с тем или иным ограничением на число переключений формируемого управления. Эти условия определяются всякий раз соответствующей итерацией на основе оператора стабильности.

Т е о р е м а 9.1. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо следующее равенство:*

$$\begin{gathered}\mathbf{N} \setminus W_s = \Big\{(t,x) \in \mathbf{N} | \,\exists\, \varepsilon \in]0,\infty[\;\; \exists\, V \in \mathfrak{V} \;\; \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_t^* \;\; \exists\, k \in \overline{1,s} \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;k] \\ \forall\, \vartheta \in [t,\vartheta_o] \;\; \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t,\vartheta[:\; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\Big)\Big\}.\end{gathered} \tag{9.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируя $s \in \mathbb{N}$, обозначим через Ω множество в правой части (9.1); итак, требуется показать, что $\mathbf{N} \setminus W_s = \Omega$.

Пусть $(t_*, x_*) \in \mathbf{N} \setminus W_s$. С учетом (8.1) имеем, что $\Xi_s(t_*, x_*) \in \mathcal{P}'(]0,\infty[)$. Выберем произвольно $\zeta \in \Xi_s(t_*, x_*)$, получая при этом, что

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{N} \setminus W_s^{(\zeta)}.$$

Согласно (8.29) имеем по выбору (t_*, x_*) и ζ следующее положение: $\mathbf{V}_\zeta \in \mathfrak{V}$, $\widetilde{\theta}^{(\zeta)}[t_*] \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $s \in \overline{1,s}$ обладают тем свойством, что $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\big[t_*; x_*; \mathbf{V}_\zeta; \widetilde{\theta}^{(\zeta)}[t_*]; s\big] \;\; \forall\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\zeta)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t_*,\vartheta[:\; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\zeta)\Big).$$

Получили включение $(t_*, x_*) \in \Omega$, чем завершается обоснование вложения $\mathbf{N} \setminus W_s \subset \Omega$.

Пусть $(t^*, x^*) \in \Omega$. Тогда, в частности, $(t^*, x^*) \in \mathbf{N}$. При этом для некоторых $\kappa \in]0,\infty[$, $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$, $\chi \in \mathbb{G}_{t^*}^*$ и $r \in \overline{1,s}$ имеем следующее свойство: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; \mathbb{V}; \chi; r] \;\; \forall\, \vartheta \in [t^*, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in S_o(\mathbf{M},\kappa)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t^*,\vartheta[:\; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa)\Big). \tag{9.2}$$

Отметим, что $\big((t^*, x^*) \in W_s\big) \vee \big((t^*, x^*) \in \mathbf{N} \setminus W_s\big)$. Допустим, что $(t^*, x^*) \in W_s$. Тогда в силу предложения 7.5 $\exists\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; \mathbb{V}; \chi; r] \;\; \exists\, \vartheta \in [t^*, \vartheta_o]$:

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \in \mathbf{N} \;\; \forall\, \xi \in [t^*, \vartheta[\Big).$$

Последнее, однако, противоречит (9.2). Стало быть, включение $(t^*, x^*) \in W_s$ невозможно, и на самом деле $(t^*, x^*) \in \mathbf{N} \setminus W_s$, чем завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbf{N} \setminus W_s$, а следовательно, и равенства $\mathbf{N} \setminus W_s = \Omega$. □

Т е о р е м а 9.2. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо следующее равенство:*

$$\begin{gathered}\mathbf{N} \setminus W_s = \Big\{(t,x) \in \mathbf{N} | \,\exists\, V \in \mathfrak{V} \;\; \exists\, \gamma \in \mathbb{G}_t^* \;\; \exists\, k \in \overline{1,s} \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t;x;V;\gamma;k] \\ \forall\, \vartheta \in [t,\vartheta_o] \;\; \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in \mathbf{M}\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t,\vartheta[:\; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbf{N}\Big)\Big\}.\end{gathered} \tag{9.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Γ множество в правой части (9.3) (здесь $s \in \mathbb{N}$ фиксировано). Из теоремы 9.1 легко следует вложение

$$\mathbf{N} \setminus W_s \subset \Gamma. \tag{9.4}$$

Выберем произвольно $(t^*, x^*) \in \Gamma$, получая, в частности, что $(t^*, x^*) \in \mathbf{N}$. По определению Γ имеем, что для некоторых $\widetilde{V} \in \mathfrak{V}$, $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{G}_{t^*}^*$ и $l \in \overline{1,s}$ справедливо следующее свойство: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; \widetilde{V}; \widetilde{\gamma}; l] \; \forall\, \vartheta \in [t^*, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in \mathbf{M}\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, \xi \in [t^*,\vartheta[:\; \big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \mathbf{N}\Big). \tag{9.5}$$

Если $(t^*, x^*) \in W_s$, то в силу предложения 7.5 вышеупомянутое свойство, связанное с (9.5), невозможно. Стало быть, $(t^*, x^*) \in \mathbf{N} \setminus W_s$, чем завершается проверка вложения $\Gamma \subset \mathbf{N} \setminus W_s$ и, следовательно (см. (9.4)), требуемого равенства $\mathbf{N} \setminus W_s = \Gamma$. □

С л е д с т в и е 9.1. *Если* $s\in\mathbb{N}$ *и* $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}$, *то*

$$\Big(\exists\, V\in\mathfrak{V}\ \exists\,\gamma\in\mathbb{G}^*_{t_*}\ \exists\, k\in\overline{1,s}\ \ \forall\,\mathbf{x}\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\gamma;k]\ \ \forall\,\vartheta\in[t_*,\vartheta_o]\ \ \Big(\big(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)\big)\in\mathbf{M}\Big)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\Big(\exists\xi\in[t_*,\vartheta[:\ \big(\xi,\mathbf{x}(\xi)\big)\notin\mathbf{N}\Big)\Big)\Longleftrightarrow\Big(\exists\,\varepsilon\in]0,\infty[\,\exists\, V\in\mathfrak{V}\,\exists\,\gamma\in\mathbb{G}^*_{t_*}\,\exists\, k\in\overline{1,s}$$

$$\forall\,\mathbf{x}\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\gamma;k]\ \ \forall\,\vartheta\in[t_*,\vartheta_o]\ \ \Big(\big(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)\big)\in S_o(\mathbf{M},\varepsilon)\Big)\Longrightarrow\Big(\exists\,\xi\in[t_*,\vartheta[:\ \big(\xi,\mathbf{x}(\xi)\big)\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\Big)\Big).$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации теорем 9.1 и 9.2. Следствие 9.1 показывает, что при заданных $s\in\mathbb{N}$ и $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}$ задача «обычного» $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-уклонения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача строгого уклонения (то есть уклонения по отношению к некоторым окрестностям $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$).

§ 10. Некоторые топологические свойства и вопросы потенциальной реализуемости стратегий коррекции

Рассмотрим некоторые следствия построений [12, теорема 10.2], связанные с вопросом о потенциальной реализуемости процедур уклонения, рассматриваемых в § 8. В связи с определениями § 7 отметим важную роль (7.7), где, в частности, оговаривается правило выбора моментов коррекции управлений игрока II (см. также (7.5) и (7.8)). Речь идет о селекции упомянутых моментов из множеств — значений неупреждающих мультифункционалов. Реально такая селекция предусматривает достаточную оперативность выбора моментов коррекции, а сам же конструктивный вариант выбора при этом не оговаривается. В построениях § 8 указан (см. (8.9)) более понятный тип процедуры: коррекцию предлагается осуществлять (см. определение 8.2) по мере наступления события, связанного с выталкиванием траектории из множества, определяемого нужной итерацией на основе оператора стабильности. Само же выталкивание обеспечивается (см. (8.3)) позиционной стратегией $\mathbf{V}_\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, но момент его наступления зависит от реализации помехи и в общем случае не может быть указан заранее (в момент предыдущей коррекции). Возможность конкретного применения стратегии коррекции (8.9) можно на гипотетическом уровне связать с ненулевой временной протяженностью события, связанного с выталкиванием. Надо отметить здесь, что реализация (строгого) уклонения может, вообще говоря, осуществляться и «раньше», чем будут выполнены все существенные в упомянутом смысле коррекции. Тогда «правильная» реализация оставшихся после фактического осуществления уклонения коррекций уже не представляет интереса, так как цель игрока II уже достигнута. Такой взгляд на вещи излагается ниже. Прежде всего напомним (см. (2.1)), что при $N\in\mathfrak{F}$ в виде

$$\mathbf{t}|_N=\{N\cap G:\,G\in\mathbf{t}\}$$

имеем топологию на множестве N, а в виде $\mathcal{F}|_N$ — семейство всех п/м N, замкнутых в ТП $(N,\mathbf{t}|_N)$; последнее является подпространством ТП $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$. Если $N\in\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}|_N\subset\mathcal{F}$. С учетом [12, лемма 10.1] имеем, что

$$\mathbb{A}[M](F)\in\mathcal{F}|_N\ \ \forall\, M\in\mathcal{F}\ \ \forall\, N\in\mathfrak{F}\ \ \forall\, F\in\mathcal{F}|_N \tag{10.1}$$

((10.1) устанавливается подобно [23, предложение 7.1]). На основе (10.1) рассуждением по индукции устанавливается, что

$$\mathcal{W}_k(M,N)\in\mathcal{F}|_N\ \ \forall\, M\in\mathcal{F}\ \ \forall\, N\in\mathfrak{F}\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}_o. \tag{10.2}$$

В свою очередь, из (10.2) по свойствам замкнутых множеств имеем, что

$$\mathcal{W}(M,N)\in\mathcal{F}|_N\ \ \forall\, M\in\mathcal{F}\ \ \forall\, N\in\mathfrak{F}.$$

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Если* $N\in\mathfrak{F},F\in\mathcal{F}|_N$ *и* $(t_*,x_*)\in(T\times\mathbb{R}^n)\setminus F$, *то*

$$\big((t_*,x_*)\notin N\big)\vee\Big(\exists\,\delta\in]0,\infty[:\ \big\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n\,|\,\rho\big((t,x),(t_*,x_*)\big)<\delta\big\}\cap F=\varnothing\Big).$$

Доказательство очевидно (см. (2.1) и определение $\mathcal{F}$). Также очевидно

С л е д с т в и е 10.1. *Если* $N \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathcal{F}|_N$, $t_* \in T$, $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, $t^* \in [t_*, \vartheta_o]$ *и* $\big(t^*, \mathbf{x}(t^*)\big) \in N \setminus F$, *то*

$$\exists\, \kappa \in]0, \infty[: \ \big(t, \mathbf{x}(t)\big) \notin F \quad \forall\, t \in]t^* - \kappa, t^* + \kappa[\cap [t_*, \vartheta_o].$$

П р е д л о ж е н и е 10.2. *Если* $t \in [t_o, \vartheta_o[, \Gamma \in \mathcal{F}, N \in \mathfrak{F}, \Lambda \in \mathbf{t}|_N$ *и* $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; \Lambda]$, *то*

$$\exists\, a \in [t, \vartheta_o] \ \exists\, b \in]a, \vartheta_o] :]a, b[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}. \tag{10.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем t, Γ, N, Λ и $\mathbf{x}$ в соответствии с условиями предложения. Из (8.4) следует по выбору $\mathbf{x}$, что для некоторого $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \in \Lambda\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall\, \xi \in [t, \vartheta^o]\Big). \tag{10.4}$$

Отметим, что в силу первого положения в (10.4)

$$\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \in N$$

(действительно, $\Lambda \subset N$). Кроме того,

$$\Lambda \subset (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda). \tag{10.5}$$

Заметим, что из (10.4) и (10.5) вытекает включение

$$\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda). \tag{10.6}$$

Поэтому (см. (8.4), (10.4), (10.6)) имеем включение $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)]$. Как следствие (см. (8.5)),

$$\theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) = \Big\{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \,|\, \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)\Big) \& \\ \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall\, \xi \in [t, \vartheta]\Big)\Big\}. \tag{10.7}$$

Из (10.4) и (10.6) следует, что $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$ таково, что

$$\Big(\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall\, \xi \in [t, \vartheta^o]\Big). \tag{10.8}$$

Поэтому (см. (10.7), (10.8)) имеем включение

$$\vartheta^o \in \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}).$$

Заметим, что согласно (10.4) $\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \in N \setminus (N \setminus \Lambda)$, где $N \setminus \Lambda \in \mathcal{F}|_N$. Поэтому, согласно следствию 10.1, для некоторого $\kappa \in]0, \infty[$

$$\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin N \setminus \Lambda \quad \forall\, \xi \in]\vartheta^o - \kappa, \vartheta^o + \kappa[\cap [t, \vartheta_o]. \tag{10.9}$$

Кроме того, в силу (10.8) $\big(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)\big) \notin \Gamma$, а, поскольку $\Gamma \in \mathcal{F}$, для некоторого $\overline{\kappa} \in]0, \infty[$

$$\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall\, \xi \in]\vartheta^o - \overline{\kappa}, \vartheta^o + \overline{\kappa}[\cap [t, \vartheta_o] \tag{10.10}$$

(учли свойство непрерывности $\mathbf{x}$). При $\widehat{\kappa} \triangleq \inf(\{\kappa, \overline{\kappa}\}) \in]0, \infty[$ имеем в силу (10.9), (10.10), что $\forall\, \xi \in]\vartheta^o - \widehat{\kappa}, \vartheta^o + \widehat{\kappa}[\cap [t, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma\Big). \tag{10.11}$$

Пусть $\alpha \overset{\triangle}{=} \sup(\{t; \vartheta^o - \widehat{\kappa}\})$ и $\beta \overset{\triangle}{=} \inf(\{\vartheta^o + \widehat{\kappa}; \vartheta_o\})$. Тогда $\alpha \in [t, \vartheta_o]$ и $\beta \in]\alpha, \vartheta_o]$; из (10.8) и (10.11) следует, что

$$\Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda) \quad \forall\, \vartheta \in]\alpha, \beta[\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin \Gamma \quad \forall\, \xi \in [t, \beta[\Big).$$

С учетом (10.7) и неравенства $\beta \leqslant \vartheta_o$ получаем, что

$$]\alpha, \beta[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_0\}.$$

Итак, получили (10.3) (учли, что при $\vartheta \in]\alpha, \beta[$ непременно $[t, \vartheta] \subset [t, \beta[$).

С л е д с т в и е 10.2. *Если* $\varepsilon \in]0, \infty[$, $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\langle t \rangle$, $v \in \mathbf{V}_\varepsilon(t, x)$ *и* $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}_\Pi(t, x, v)$, *то*

$$\begin{gathered}\Big(\exists\, \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon \Big(\big(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)\big) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\Big) \& \Big(\big(\xi, \mathbf{x}(\xi)\big) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \quad \forall\, \xi \in [t, \vartheta]\Big)\Big) \vee \\ \vee \Big(\exists\, a \in [t, \vartheta_o]\ \exists\, b \in]a, \vartheta_o] \colon\ ]a, b[\subset \theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}; t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}\Big).\end{gathered} \tag{10.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε, t, s, x, v и $\mathbf{x}$ удовлетворяют условиям следствия. Воспользуемся предложением 10.2 при следующей конкретизации его параметров:

$$N = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon),\ \Gamma = S_o(\mathbf{M}, \varepsilon),\ \Lambda = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}; \tag{10.13}$$

кроме того, согласно предложению 8.2

$$\mathbf{x} \in C_t[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}]$$

(мы учли предложение 6.1). Тогда в терминах (10.13)

$$\big(\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus N]\big) \vee (\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; \Lambda]) \tag{10.14}$$

(учли (8.4)). Первая возможность в (10.14) означает, в силу (8.4) и (10.13), реализацию первого положения в (10.12). Пусть $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; \Lambda]$. Как следствие, получаем (10.3), откуда с учетом (10.13) и того, что

$$(T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)} = (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda),$$

получаем второе положение в (10.12). Итак, (10.12) верно во всех возможных случаях. □

С л е д с т в и е 10.3. *Если* $\varepsilon \in]0, \infty[$, $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}\langle t \rangle$, $v \in \mathbf{V}_\varepsilon(t, x)$ *и* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)$, *то*

$$\begin{gathered}\big(\exists \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)\ \forall\, \xi \in [t, \vartheta])\big) \vee \\ \vee\, (\exists a \in [t, \vartheta_o[\ \exists b \in]a, \vartheta_o] \colon]a, b[\subset \widetilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x)(\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}\big).\end{gathered} \tag{10.15}$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации следствия 10.2 и определения 8.2. В (10.15) речь идет фактически о принципиальной возможности осуществления нужного выталкивания, если только до этого не осуществилось требуемое уклонение.

Напомним теперь определения §§ 7, 8, фиксируя $\varepsilon \in]0, \infty[$. Рассмотрим на содержательном уровне способ реализации совокупного воздействия позиционной стратегии $\mathbf{V}_\varepsilon$ и стратегии коррекции $\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]$ на одном отдельно взятом этапе построения траектории процесса; здесь t_* отвечает «началу» формируемой траектории. Будем полагать, что упомянутое воздействие отвечает уже сформировавшемуся моменту $t^* \in [t_*, \vartheta_o[$ (случай $t^* = \vartheta_o$ не представляет интереса, так как отвечает завершению процесса) на траектории $\overline{\mathbf{x}}$, развивающейся из позиции (t_*, x_*), где $x_* \in \mathbb{R}^n$. Тогда реализуется управление $v^* \in \mathbf{V}_\varepsilon(t^*, \overline{\mathbf{x}}(t^*))$, которое вместе с помеховым воздействием определяет естественное продолжение $\mathbf{x} \colon [t^*, \vartheta_o] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ получившейся к данному моменту траектории. Стратегия коррекции реагирует на это продолжение множеством

$\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t^*}(\overline{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$. Для нас интересен случай $\overline{\mathbf{x}}(t^*) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_r\langle t^*\rangle$, где $r \in \overline{1,s}$ (s определяет ограничение на число переключений). В этих условиях действие v^* на систему сводится к выталкиванию всех траекторий пучка $\mathcal{X}_\Pi(t^*, \overline{\mathbf{x}}(t^*), v^*)$ из множества $W^{(\varepsilon)}_{r-1}$ до встречи с $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$. Моменты времени из $\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t^*}(\overline{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ соответствуют в силу свойства, подобного (7.1), упомянутому выталкиванию реализующейся траектории из пучка (см. определение 8.2). Согласно следствию 10.3, если не происходит выхода из $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$ до попадания на множество $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$, то множество $\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t^*}(\overline{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ содержит интервал ненулевой длины.

Разумеется, все это касается v-траекторий, где $v = v^*$, но свойство неупреждаемости мультифункционала $\widetilde{\theta}^{(\varepsilon)}_{t^*}(\overline{\mathbf{x}}(t^*))$ позволяет применить упомянутое обстоятельство к анализу траектории, порожденной соответствующей стратегией-тройкой (данная траектория является склейкой v-траекторий). Это обстоятельство позволяет принципиально зафиксировать осуществление выталкивания (на промежутке ненулевой длительности) и осуществить новую коррекцию управления.

Заметим, что в [13] указаны классы задач, в которых очередной момент коррекции может (без потери качества) назначаться на основании информации о позиции, отвечающей предыдущему моменту коррекции. Для таких задач построение траекторий, порожденных стратегией выталкивания, существенно упрощается.

§ 11. Добавление, 1

Отметим некоторые простые следствия общих положений, касающиеся вопросов сходимости множеств-итераций к МПП. Будем полагать в настоящем параграфе, что

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}) \ \& \ (\mathbf{N} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})$$

(итак, полагаем сейчас, что каждое из множеств (6.1) непусто и замкнуто в «обычной» топологии $\mathbf{t}$). Обозначения W_s, $s \in \mathbb{N}_0$, и W понимаем в соответствии с § 6 (см. (6.2)). Напомним, что при этом (см. § 5) непременно

$$(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \downarrow W \tag{11.1}$$

(см. (5.5)). Через $\mathcal{K}$ обозначаем семейство всех компактных [24, с. 196] в ТП $(T\times\mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ множеств $K \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, для каждого из которых $K \cap W \neq \varnothing$ (при $M \cap N \neq \varnothing$ непременно $\mathcal{K} \neq \varnothing$). Таким образом, при $K \in \mathcal{K}$ имеем свойство

$$K \cap W \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n),$$

а потому определено множество $S_0(K \cap W, \varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$.

П р е д л о ж е н и е 11.1. *Если* $K \in \mathcal{K}$, *то* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$W_j \cap K \subset S_0(W \cap K, \varepsilon) \ \ \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выбрано и зафиксировано $K \in \mathcal{K}$. Допустим, что доказываемое утверждение неверно, т. е. для некоторого $\zeta \in]0, \infty[$

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists j \in \overrightarrow{m, \infty}\colon\ (W_j \cap K) \setminus S_0(W \cap K, \zeta) \neq \varnothing. \tag{11.2}$$

В этом случае имеем с очевидностью (см. (11.2)), что

$$J_m \stackrel{\triangle}{=} \{j \in \overrightarrow{m, \infty} | (W_j \cap K) \setminus S_0(W \cap K, \zeta) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}) \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

При этом, конечно, имеем, как следствие, свойство

$$\mathbf{j}_m \stackrel{\triangle}{=} \inf(J_m) \in J_m \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда $(W_{\mathbf{j}_m} \cap K) \setminus S_0(W \cap K, \zeta) \neq \varnothing \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$. В этом случае имеем с использованием (счетной) аксиомы выбора, что

$$\prod_{m\in\mathbb{N}} ((W_{\mathbf{j}_m} \cap K) \setminus S_0(W \cap K, \zeta)) \neq \varnothing.$$

С учетом этого выберем произвольно последовательность

$$((t_m, x_m))_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}} ((W_{\mathbf{j}_m} \cap K) \setminus S_0(W \cap K, \zeta)).$$

Тогда, в частности, имеем, что $m \longmapsto (t_m, x_m)\colon \mathbb{N} \longrightarrow K$. С учетом компактности K можно полагать данную последовательность сходящейся: для некоторой позиции $(t^*, x^*) \in K$ имеет место

$$\rho((t_m, x_m), (t^*, x^*))_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0. \tag{11.3}$$

В связи с (11.2) отметим следующие обстоятельства. При $m \in \mathbb{N}$ непременно $J_{m+1} \subset J_m$. Поэтому $J_k \subset J_m$ при $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \overrightarrow{m, \infty}$. Выберем произвольно $r \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество W_r. Тогда $J_k \subset J_r\ \forall\, k \in \overrightarrow{r, \infty}$. Это означает, что $\mathbf{j}_r \leqslant \mathbf{j}_k\ \forall\, k \in \overrightarrow{r, \infty}$. Тогда

$$W_{\mathbf{j}_k} \subset W_{\mathbf{j}_r} \subset W_r\ \forall\, k \in \overrightarrow{r, \infty}.$$

По выбору последовательности имеем, что $(t_k, x_k) \in W_r$ при $k \in \overrightarrow{r, \infty}$. Поскольку $W_r \in \mathcal{F}$, имеем из (11.3) очевидное включение

$$(t^*, x^*) \in W_r. \tag{11.4}$$

Однако выбор r был произвольным. Следовательно, установлено (см. (11.4)), что $(t^*, x^*) \in W_m$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$. С учетом (11.1) получаем тогда, что

$$(t^*, x^*) \in W \cap K. \tag{11.5}$$

Вместе с тем $(t_m, x_m) \notin S_0(W \cap K, \zeta)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\zeta < \rho((t_m, x_m); W \cap K)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. С учетом равномерной непрерывности функции $\rho(\cdot, W \cap K)$ и (11.3) получаем неравенство

$$\zeta \leqslant \rho((t^*, x^*), W \cap K),$$

что противоречит включению (11.5). Противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Отметим одно простое, но полезное следствие, полагая до конца настоящего параграфа, что $M \cap N \neq \varnothing$. Тогда $W \neq \varnothing$, так как в рассматриваемом случае $M \cap N \subset W$. При этом, как легко видеть, при $s \in \mathbb{N}_0$ эквивалентны следующие условия: 1) $W_s \in \mathcal{K}$; 2) множество W_s ограничено в $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$. Мы учли здесь простое следствие (10.2): в силу замкнутости $\mathbf{N}$ имеет место $\mathcal{F}|_{\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$.

П р е д л о ж е н и е 11.2. *Пусть* $\exists s \in \mathbb{N}_0\colon W_s \in \mathcal{K}$. *Тогда* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N}\colon$

$$W_j \subset S_0(W, \varepsilon)\ \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W_s \in \mathcal{K}$, где $s \in \mathbb{N}_0$. Полагаем, что в условиях предыдущего предложения $K \stackrel{\triangle}{=} W_s$. Тогда $K \cap W \neq \varnothing$, так как $K \cap W = W$. Поскольку в нашем случае $K \in \mathcal{K}$, имеем при $\varepsilon \in]0, \infty[$ из предложения 11.1, что для некоторого $r \in \mathbb{N}$

$$W_j \cap K \subset S_0(W, \varepsilon)\ \ \forall\, j \in \overrightarrow{r, \infty}.$$

Полагаем $m \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{s; r\})$, получая, что $\overrightarrow{m, \infty} \subset \overrightarrow{s, \infty}$ и, как следствие, свойство

$$W_j \subset K\ \ \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{m, \infty} \subset \overrightarrow{r, \infty}$, а тогда

$$W_j = W_j \cap K \subset S_0(W, \varepsilon)\ \ \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Предложение доказано. □

Отметим, что в предложениях 11.1 и 11.2 реализуется сходимость множеств-итераций к МПП в метрике Хаусдорфа, что следует из определений § 5 (и утверждений упомянутых предложений). В первом случае речь идет о сходимости последовательности фрагментов множеств-итераций, а во втором — о сходимости (при дополнительных условиях) последовательности самих множеств-итераций.

§ 12. Добавление, 2

В настоящем параграфе рассмотрим более общий в сравнении с предыдущим параграфом случай: полагаем, что множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ удовлетворяют условиям (6.1), и фиксируем $t_* \in \mathrm{Supp}(W)$, где W соответствует (6.2). Тогда (см. (4.4)) $W\langle t_*\rangle \neq \varnothing$. Через $\mathfrak{K}$ обозначаем семейство всех множеств $K \in \mathbf{F}$, компактных в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ и обладающих свойством

$$K \cap W\langle t_*\rangle \neq \varnothing.$$

Следуя обозначениям (6.2), отметим, что справедливо (5.5) и, как следствие,

$$(W_k\langle t_*\rangle)_{k\in\mathbb{N}} \downarrow W\langle t_*\rangle.$$

Отметим, что определены множества $B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}\ \ \forall K \in \mathfrak{K}\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$.

П р е д л о ж е н и е 12.1. *Если $K \in \mathfrak{K}$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то*

$$\exists m \in \mathbb{N}\colon K \cap W_k\langle t_*\rangle \subset B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon)\ \ \forall k \in \overrightarrow{m,\infty}. \tag{12.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $K \in \mathfrak{K}$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$. Покажем, что выполнено (12.1). Допустим противное:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \overrightarrow{m,\infty}\colon\ (K \cap W_k\langle t_*\rangle) \setminus B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \neq \varnothing.$$

Иными словами, $\mathbf{S}_m \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \overrightarrow{m,\infty} \mid (K \cap W_k\langle t_*\rangle) \setminus B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \neq \varnothing\} \neq \varnothing\ \ \forall m \in \mathbb{N}$. Тогда, как легко видеть,

$$\mathbf{s}_m \stackrel{\triangle}{=} \inf(\mathbf{S}_m) \in \mathbf{S}_m\ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

При этом, конечно, $\mathbf{s}_j \leqslant \mathbf{s}_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N}$. Отметим, что

$$(K \cap W_{\mathbf{s}_m}\langle t_*\rangle) \setminus B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \neq \varnothing\ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

С учетом (счетной) аксиомы выбора получаем, конечно, что

$$\prod_{m\in\mathbb{N}} ((K \cap W_{\mathbf{s}_m}\langle t_*\rangle) \setminus B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon)) \neq \varnothing. \tag{12.2}$$

Выберем и зафиксируем последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ из множества-произведения в левой части (12.2). Тогда, в частности, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow K$. В силу компактности K можно, не ограничивая общности, полагать, что последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится: для некоторого $x^* \in K$

$$(\|x_k - x^*\|)_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0 \tag{12.3}$$

(мы учитываем здесь, что $W_{\mathbf{s}_{j+1}}\langle t_*\rangle \subset W_{\mathbf{s}_j}\langle t_*\rangle$ при $j \in \mathbb{N}$). Отметим, что по выбору $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ имеем, в частности, что $x_j \in W_{\mathbf{s}_j}\langle t_*\rangle\ \ \forall j \in \mathbb{N}$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда $r \leqslant \mathbf{s}_r$ и, кроме того, $\mathbf{s}_r \leqslant \mathbf{s}_j\ \forall j \in \overrightarrow{r,\infty}$. В итоге $r \leqslant \mathbf{s}_j\ \forall j \in \overrightarrow{r,\infty}$. Следовательно, $x_j \in W_r\langle t_*\rangle\ \ \forall j \in \overrightarrow{r,\infty}$. Но $W_r\langle t_*\rangle \in \mathbf{F}$. С учетом (12.3) получаем, что $x^* \in W_r\langle t_*\rangle$. Поскольку r выбиралось произвольно, установлено свойство

$$x^* \in W_m\langle t_*\rangle\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что x^* есть элемент пересечения всех множеств $W_m\langle t_*\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, однако, что справедлива цепочка равенств

$$W\langle t_*\rangle = (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_m)\langle t_*\rangle = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_m\langle t_*\rangle.$$

В итоге $x^* \in K \cap W\langle t_*\rangle$. Напомним, однако, что (по выбору $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$) имеем

$$x_j \notin B_n^o(K \cap W\langle t_*\rangle, \varepsilon)\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что
$$\varepsilon < (\|\cdot\| - \inf)[x_j; K \cap W\langle t_*\rangle] \ \forall j \in \mathbb{N}.$$
Тогда $\varepsilon \leqslant (\|\cdot\| - \inf)[x^*; K \cap W\langle t_*\rangle]$. Получили очевидное противоречие с ранее установленным свойством x^* (в самом деле, $0 < \varepsilon$ и, как отмечалось, $x^* \in K \cap W\langle t_*\rangle$). Свойство (12.1) установлено. □

Отметим следующее очевидное свойство: при $s \in \mathbb{N}_0$ эквивалентны (поскольку $W_s\langle t_*\rangle \in \mathbf{F}$ и $W\langle t_*\rangle \subset W_s\langle t_*\rangle$) условия 1′) $W_s\langle t_*\rangle \in \mathfrak{K}$ и 2′) $W_s\langle t_*\rangle$ ограничено в $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Здесь учитывается и то, что по выбору t_* непременно $W\langle t_*\rangle \neq \varnothing$.

П р е д л о ж е н и е 12.2. *Пусть* $\exists s \in \mathbb{N}_0\colon\ W_s\langle t_*\rangle \in \mathfrak{K}$. *Тогда*
$$\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N}\colon\ W_j\langle t_*\rangle \subset B_n^o(W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $s \in \mathbb{N}_0$, для которого $W_s\langle t_*\rangle \in \mathfrak{K}$. Полагаем $K \triangleq W_s\langle t_*\rangle$, получая равенство
$$K \cap W\langle t_*\rangle = W\langle t_*\rangle.$$
Кроме того, $W_j\langle t_*\rangle \subset K \ \ \forall j \in \overrightarrow{s, \infty}$. Пусть $\varepsilon \in]0, \infty[$. Тогда с учетом предыдущего предложения получаем, что при некотором $m \in \overrightarrow{s, \infty}$ имеет место свойство
$$W_j\langle t_*\rangle \subset B_n^o(W\langle t_*\rangle, \varepsilon) \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}.$$
Предложение доказано. □

Итак, и в рассматриваемом случае приближения фиксированного сечения МПП реализуется (при дополнительном условии ограниченности множества на каком-либо этапе итерационной процедуры) сходимость в метрике Хаусдорфа.

§ 13. Заключение

В работе указан способ решения задачи уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления, связанный с одним из вариантов МПИ, а именно с итерациями стабильности (имеется в виду основополагающее свойство, введенное Н. Н. Красовским). Отметим в этой связи следующий весьма общий полезный факт: конструкции на основе МПИ естественным образом приводят к рассмотрению МПП как неподвижной точки оператора, а точнее ОПП. При этом МПП оказывается наибольшей в упорядоченности по включению неподвижной точкой ОПП (у нас — оператора стабильности). При этом МПП является пределом итерационной процедуры, порождаемой ОПП (в этой связи отметим также положения двух последних параграфов).

В настоящем исследовании мы не ограничиваемся, однако, построением предела итерационной процедуры и рассматриваем свойства самих множеств-итераций, то есть предполагаем выполненными не все итерации. Оказывается, что при этом получается всякий раз множество успешной разрешимости вышеупомянутой задачи уклонения с соответствующим ограничением на число переключений. Данная задача может представлять в ряде случаев не только теоретический, но и определенный практический интерес.

Важным обстоятельством представляется естественная необходимость в управлении моментами коррекции реализующегося управления. В общем случае это осуществляется на основе неупреждающих процедур слежения за траекторией, хотя известны [13] классы задач, в которых реализацию этих моментов можно осуществлять позиционно: очередной момент коррекции можно назначать по позиции, сформировавшейся в предыдущий момент коррекции. Изучение таких классов задач представляется весьма важным и требует дополнительных исследований. В то же время варианты задач, рассмотренных в [13] и доведенных там до конкретных решений, могут служить своеобразным ориентиром (заметим в этой связи, что методика [13] может быть использована, как представляется, для решения некоторых задач о наведении на открытое множество в фиксированный момент времени; соответствующая переформулировка задачи не представляет затруднений).

Список литературы

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
6. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
7. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–361.
8. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 102 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1933-79.
9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
11. Ченцов А.Г. О задаче управления с ограниченным числом переключений / Уральский политехнический институт им. С.М. Кирова. Свердловск, 1987. 44 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В 87.
12. Ченцов А.Г. О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, 2 / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. 55 с. Деп. в ВИНИТИ, № 5406-80.
13. Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций / Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 9–16.
14. Ченцов А.Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
15. Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
16. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
18. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 353 с.
19. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
20. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and Relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p.
21. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. 389 с.
22. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
23. Ченцов А.Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321
24. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

Поступила в редакцию 30.10.2016

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 49, pp. 17–54 (in Russian).

Keywords: method of programmed iterations, nonanticipating multifunctional, stability operator, correction strategy.

MSC2010: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-02

This paper is concerned with one variant of the programmed iterations method used for solving the differential game of guidance-evasion. The proposed procedure is connected with iterations on the basis of the property of stability of sets introduced by N.N. Krasovskii. A relationship is established between the resulting iteration procedure and the solution to the evasion problem under a constraint on the switching number of the formed control: the stability iterations define the set of successful solvability of the above-mentioned problem. It is proved that the guaranteed realization of evasion is possible if and only if (guaranteed) strong evasion (namely, the evasion with respect to neighborhoods of sets defining the guidance-evasion game) is realizable. A representation of strategies guaranteeing the evasion with constraints on the switching number is presented. The concrete operation of every such strategy consists in the formation of constant control extruding the trajectory from the set corresponding to the next iteration on the basis of the stability operator. The duration of operation of the above-mentioned control is defined in terms of the result of the multifunctional employment defined on the trajectory space; the values of this multifunctional are nonempty subsets of the remaining time interval. Attention is given to problems involved in the convergence, in the sense of Hausdorff metric, of fragments of sets which are realized by the iteration procedure. On this basis, conditions for convergence (in the Hausdorff metric) for the sets-iterations themselves are obtained.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1987, 517 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of dynamic systems. Problem of the minimum of guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Sov. Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Chistiakov S.V. On solving pursuit game problems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, issue 5, pp. 845–852. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90167-8
7. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 350–354. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90021-1
8. Chentsov A.G. *The programmed iterations method for a differential pursuit-evasion game*, Sverdlovsk: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Research Center of the Academy of Sciences of the USSR, 1979, 103 p. Deposited in VINITI 04.06.1979, no. 1933-79 (in Russian).
9. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, issue 6, pp. 948–965. DOI: 10.1016/0021-8928(70)90158-9
11. Chentsov A.G. *On the problem of control with a limited number of switching*, Sverdlovsk: Ural Polytechnic Institute, 1987, 45 p. Deposited in VINITI, no. 4942-B 87 (in Russian).
12. Chentsov A.G. *About differential games with a restriction on the number of corrections. 2*, Sverdlovsk: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Research Center of the Academy of Sciences of the USSR, 1980, 55 p. Deposited in VINITI, no. 5406-80 (in Russian).
13. Dyatlov V.P., Chentsov A.G. A class of linear differential games with a limited number of corrections, *Upravlenie i otsenivanie v dinamicheskikh sistemakh*, Sverdlovsk: Ural Research Center of the Academy of Sciences of the USSR, 1982, pp. 9–16 (in Russian).
14. Chentsov A.G. Iterations of stability and evasion problem with a restriction on the number of switching, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
15. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of convergence-evasion, *Sov. Math., Dokl.*, 1978, vol. 19, pp. 405–412.
16. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967, xii+417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
17. Dieudonne J. *Foundations of modern analysis*, New York–London: Academic Press, 1960, 361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964, 430 p.
18. Billingsley P. *Convergence of probability measures*, New York: John Willey and Sons, Inc., 1968, xii+253 p. Translated under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*, Moscow: Nauka, 1977, 353 p.
19. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: general theory*, New York–London: Interscience Publ., 1958, xiv+858 p. Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 895 p.
20. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Springer Netherlands, 2002, xiv+408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0

21. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I* (Elements of finitely additive measure theory. I), Yekaterinburg: Ural State Technical University, 2008, 389 p.
22. Neveu J. *Bases mathematiques du calcul des probabilites*, Paris: Masson et Cie, 1964, 203 p. Translated under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*, Moscow: Mir, 1969, 309 p.
23. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, issue 2, pp. 304–321 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321
24. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 751 p.

Received 30.10.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru