УДК 517.977

© ***М. Н. Виноградова***

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ДВУХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНОЙ ИГРЕ С ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей группы из двух убегающих при равных динамических возможностях всех участников и с фазовыми ограничениями на состояния убегающих, в предположении, что все убегающие используют одно и то же управление. Законы движения участников имеют вид $\dot{z}(t) + a(t)z = w(t)$. При $t = t_0$ заданы начальные условия. Геометрические ограничения на управления — строго выпуклый компакт с гладкой границей, терминальные множества — начала координат. Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы полупространства $D = \{y\colon y \in \mathbb{R}^k, \langle p_1, y\rangle \leqslant 0\}$, где p_1 — единичный вектор. Целью преследователей является поимка двух убегающих, цель группы убегающих противоположна. Говорят, что в задаче преследования происходит поимка, если найдутся два преследователя (из заданной группы преследователей) каждый из которых ловит убегающего, причем моменты поимки могут не совпадать. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки двух убегающих. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: дифференциальная игра, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии, контрстратегии.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-03

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–6]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы — преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [3–10].

К настоящему времени работы, посвященные условиям поимки двух и более убегающих, практически отсутствуют. В работе [9] рассмотрена задача простого преследования группы убегающих, при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Общая задача преследования группой преследователей двух убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [10]. В работах [11–14] рассмотрены различные классы игровых задач о преследовании группой преследователей двух убегающих, при условии, что все участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление.

В данной работе для нестационарной задачи группового преследования получены достаточные условия поимки группой преследователей двух убегающих, при условии, что убегающие используют одно и то же управление, не покидают полупространства D и $\lambda_0 \neq 0$, где $\lambda_0 = \inf\limits_{t \geqslant t_0} \left(1 \Big/ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\Big) d\tau\right)$. Случай $\lambda_0 = 0$ рассмотрен в [15].

Работа примыкает к исследованиям [16–21].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n{+}2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, 2)$

$$\dot{x}_i(t) + a(t)x_i = u_i(t), \quad u_i \in V, \quad \dot{y}_j(t) + a(t)y_j = v(t), \quad v \in V, \quad x_i,\, y_j,\, u_i,\, v \in \mathbb{R}^k. \tag{1.1}$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, ограниченная на любом компакте.

Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы полупространства

$$D = \{y\colon y \in \mathbb{R}^k, \langle p_1, y\rangle \leqslant 0\},$$

где p_1 — единичный вектор.

Пусть $T > 0$ и σ — некоторое конечное разбиение $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_q < t_{q+1} = T$ отрезка $[t_0, T]$.

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией* W убегающего E_j, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t\in[0,t_l]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|) \tag{1.2}$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v(t) \in V$, $y_j(t) \in D$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b_i^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам (1.2) и управлению $v(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $u_i(t) \in V$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру как Γ.

Определение 3. В игре Γ происходит *поимка*, если существует $T > 0$ и для любого разбиения σ отрезка $[0, T]$, для любой стратегии W убегающих E_1, E_2 существуют стратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, моменты времени τ_1, τ_2, номера $l, s \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $x_s(\tau_2) = y_2(\tau_2)$.

От системы (1.1) перейдем к системе

$$\dot{z}_{ij} + a(t)z_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$q(\tau) = \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right), \quad g(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\,d\tau;$$
$$\lambda_0 = \inf_{t\geqslant t_0} \frac{1}{g(t)}, \quad \lambda(a, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda a \in V - v\},$$
$$I_0 = \{1, \ldots, n\}, \quad d = \max\{|v|, v \in V\}, \quad c = y_1^0 - y_2^0,$$
$$\mu^0 = \max\{\mu_1, \mu_2\}, \quad \mu_1 = -\langle p_1, y_1^0\rangle, \quad \mu_2 = -\langle p_1, y_2^0\rangle.$$

§ 2. Достаточные условия поимки

Определение 4 (см. [5, с. 12]). Векторы a_1, a_2, …, a_s образуют *положительный базис* пространства $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$.

Лемма 1. *Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образует положительный базис, то для любых $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, …, $\gamma_m > 0$ набор $\gamma_1 a_1, \gamma_2 a_2, \ldots, \gamma_m a_m$ образует положительный базис.*

Доказательство леммы очевидно.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda_0 \neq 0$ *и существуют множества* $J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}$ *такие, что наборы*

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, -c,\, p_1\},\, \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\; c,\, p_1\}$$

образуют положительный базис и выполнено условие

$$2n - \frac{\delta^2 - \lambda_0 \mu^0 \delta}{\lambda_0(\delta + d)} < 0, \quad \text{\textit{где}} \;\; \delta = \min_{v \in V} \max\,\{\max_{l \in J_1} \lambda(z_{l1}^0, v),\, \max_{l \in J_2} \lambda(z_{l2}^0, v),\, \langle p_1, v\rangle\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, p_1,\, -c\}, \quad \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, p_1,\, c\}$$

образуют положительный базис, то существуют положительные числа γ_{i1}, $i \in J_1$, γ_{i2}, $i \in J_2$, α_1, α_2 такие, что

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \alpha_1 p_1 - c = 0, \quad \sum_{i \in J_2} \gamma_{i1} z_{i2}^0 + \alpha_2 p_1 + c = 0.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i1} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^{r} (\alpha_1 + \alpha_2) p_1 = 0.$

Тогда набор

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\; z_{i2}^0,\, i \in J_2,\; p_1\}$$

образует положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$.

Пусть A — произвольная стратегия убегающих. Следовательно, $y_1(t)$, $y_2(t) \in D$ для всех $t \geqslant t_0$, и поэтому $\langle p_1, y_1(t)\rangle \leqslant 0$, $\langle p_1, y_2(t)\rangle \leqslant 0$. Отсюда имеем

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau)\langle p_1, v(\tau)\rangle\, d\tau = \langle p_1, y_1(t)\rangle - \langle p_1, y_1^0\rangle \leqslant -\langle p_1, y_1^0\rangle = \mu_1.$$

Аналогично

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau)\langle p_1, v(\tau)\rangle\, d\tau = \langle p_1, y_2(t)\rangle - \langle p_1, y_2^0\rangle \leqslant -\langle p_1, y_2^0\rangle = \mu_2.$$

Так как набор $\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\; z_{i2}^0,\, i \in J_2,\; p_1\}$ образует положительный базис и V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то число (см. [5, с. 15])

$$\delta = \min_{v \in V} \max\,\{\max_{l \in J_1} \lambda(z_{l1}^0, v),\, \max_{l \in J_2} \lambda(z_{l2}^0, v),\, \langle p_1, v\rangle\}$$

положительно.

Пусть $T_1(t)$, $T_2(t)$ — два подмножества в $[t_0, t]$ такие, что

$$T_1(t) = \{\tau \,|\, \tau \in [t_0, t], \langle p_1, v(\tau)\rangle < \delta\}, \quad T_2(t) = \{\tau \,|\, \tau \in [t_0, t], \langle p_1, v(\tau)\rangle \geqslant \delta\}.$$

Тогда

$$\mu_1 \geqslant \int_{t_0}^{t} q(\tau)\langle p_1, v(\tau)\rangle\, d\tau = \int_{T_1(t)} q(\tau)\langle p_1, v(\tau)\rangle\, d\tau + \int_{T_2(t)} q(\tau)\langle p_1, v(\tau)\rangle\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \delta \int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau - d \int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau.$$

С другой стороны,

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau + \int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right)\, d\tau = g(t).$$

Таким образом,

$$\delta \int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau - d \int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau \leqslant \mu_1 \text{ и } \int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau + \int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau = g(t).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{\mu_1 + dg(t)}{\delta + d},$$

тогда

$$\int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu_1}{\delta + d}.$$

Аналогично

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{\mu_2 + dg(t)}{\delta + d}, \quad \int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu_2}{\delta + d}.$$

Поэтому

$$\int_{T_1(t)} q(\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu^0}{\delta + d},$$

где $\mu^0 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t)) z_{i1}^0, \quad i \in J_1, \quad u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t)) z_{i2}^0, \quad i \in J_2.$$

Подставим их в систему (1.3).

Тогда получаем

$$\dot{z}_{i1} + a(t) z_{i1} = -\lambda(z_{i1}^0, v(t)) z_{i1}^0, \quad i \in J_1, \quad \dot{z}_{i2} + a(t) z_{i2} = -\lambda(z_{i2}^0, v(t)) z_{i2}^0, \quad i \in J_2.$$

Имеем

$$z_{i1}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) \left(z_{i1}^0 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau \cdot z_{i1}^0\right) =$$

$$= \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) z_{i1}^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau\right), \quad i \in J_1,$$

$$z_{i2}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) z_{i2}^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) \lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\, d\tau\right), \quad i \in J_2.$$

Рассмотрим функции вида

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau, \quad i \in J_1, \quad h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\, d\tau, \quad i \in J_2,$$

$h_{ij}(t)$ — непрерывные функции, и $h_{i1}(t_0) = 1$, $h_{i2}(t_0) = 1$.

$$\sum_{i \in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i \in J_2} h_{i2}(t) = |J_1| + |J_2| - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \sum_{i \in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \sum_{i \in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_1| + |J_2| - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \max\{\max_{i \in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i \in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\, d\tau.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\, d\tau =$$
$$= \int_{T_1(t)} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\, d\tau +$$
$$+ \int_{T_2(t)} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \int_{T_1(t)} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\, d\tau \geqslant \delta\frac{\delta g(t)-\mu^0}{\delta+d} = \frac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d},$$

то

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) \leqslant |J_1| + |J_2| - \frac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d}.$$

Из условия $\lambda_0 \neq 0$ следует, что $g(t) \to \dfrac{1}{\lambda_0}$ при $t\to\infty$. Учитывая, что $2n - \dfrac{\delta^2-\lambda_0\mu^0\delta}{\lambda_0(\delta+d)} < 0$, получаем, что существует момент T^0 такой, что $|J_1| + |J_2| - \dfrac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d} \leqslant 0$ для всех $t \geqslant T^0$, и поэтому хотя бы одна из функций h_{ij} обратится в 0 в некоторый момент T^0; следовательно, произойдет поимка хотя бы одного убегающего. Теорема доказана. $\square$

Пусть $\hat{T}$ — первый корень функции

$$|J_1| + |J_2| - \frac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d}.$$

На интервале $[T^0, \hat{T}]$ определим управление преследователей как $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим момент $\hat{T}$ как начальный и следующею игру:

$$\dot{z}_{ij} + a(t)z_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(\hat{T}) = \tilde{z}_{ij}.$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. Для начальных позиций $\tilde{z}_{ij}$ существуют множества $J_1^0,\ J_2^0 \subset \{1,\ldots,n\}$, для которых выполнены следующие условия:

- $\{\tilde{z}_{i1}^0,\ i\in J_1^0,\ -c_1,\ p_1\}$, $\{\tilde{z}_{i2}^0,\ i\in J_2^0,\ c_1,\ p_1\}$ образуют положительный базис;
- выполнено неравенство $2n - \dfrac{\tilde{\delta}^2-\lambda_0\tilde{\mu}^0\tilde{\delta}}{\lambda_0(\tilde{\delta}+d)} < 0$, где

$$\tilde{\delta} = \min_{v\in V}\max\{\max_{l\in J_1^0}\lambda(\tilde{z}_{l1}, v),\ \max_{l\in J_2^0}\lambda(\tilde{z}_{l2}, v),\ \langle p_1, v\rangle\},$$

$$c_1 = \tilde{y}_1(\hat{T}) - \tilde{y}_2(\hat{T}), \quad \tilde{\mu}^0 = \max\{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\}, \quad \tilde{\mu}_1 = -\langle p_1, \tilde{y}_1\rangle, \quad \tilde{\mu}_2 = -\langle p_1, \tilde{y}_2\rangle.$$

Т е о р е м а 2. *При выполнении теоремы* 1 *для начальных позиций* z^0 *и предположения* 1 *для позиций* $\tilde{z}$ *существуют допустимые стратегии преследователей, что в игре* Γ *происходит поимка двух убегающих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении теоремы 1 гарантирована поимка одного убегающего к моменту T^0 преследователями из множества J_1 или J_2.

В силу предположения 1 и теоремы 1 с соответствующей заменой символов δ на $\tilde{\delta}$, z^0 на $\tilde{z}$, μ_0 на $\tilde{\mu}$ произойдет поимка второго убегающего не позднее момента $\hat{T}$. Теорема доказана. $\square$

П р и м е р 1. Пусть $k = 2$, $n = 5$, $r = 1$, $a(t) = -0{,}0001\pi t$, $t_0 = 0$, V — шар радиусом 1 с центром в начале координат. Начальные позиции игроков:

$$x_1^0 = (0, 10),\ x_2^0 = (-2, 20),\ x_3^0 = (-5, 15),\ x_4^0 = (-3, -10),\ x_5^0 = (-1, -15),$$

$$y_1^0 = (-2, 5),\ y_2^0 = (-1, 5),\ p_1 = (1, 0),\ c = (-1, 0).$$

Тогда $z_{12}^0 = (1, 5)$, $z_{22}^0 = (-1, 15)$, $z_{32}^0 = (-4, 10)$, $z_{41}^0 = (-1, -15)$, $z_{51}^0 = (1, -20)$, $J_1 = \{4, 5\}$, $J_2 = \{1, 2, 3\}$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$; тогда $\mu^0 = 2$.

$$\lambda_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\int_0^t \exp(-0,0001\pi\tau^2/2)\,d\tau} = 0,0145, \quad d = \max\{|v|, v \in V\} = 1.$$

Наборы векторов

$$\{z_{12}^0, z_{22}^0, z_{32}^0, -c, p_1\},\ \{z_{41}^0, z_{51}^0, c, p_1\}$$

образуют положительный базис.

Имеем

$$\delta = \min_{v\in V} \max\{\max_{l\in J_1} \lambda(z_{l1}^0, v),\ \max_{l\in J_2} \lambda(z_{l2}^0, v),\ \langle p_1, v\rangle\} = 0,9921 > 0,$$

$2n - \dfrac{\delta^2 - \lambda_0\mu^0\delta}{\lambda_0(\delta + d)} = -21,079 < 0$. Тогда по теореме 1 происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Пусть $\hat{T}$ — первый корень функции $h(t) = |J_1| + |J_2| - \dfrac{\delta^2 g(t) - \mu^0\delta}{\delta + d}$, $\hat{T} = 15,3467$.

Рассмотрим момент $\hat{T}$ как начальный для следующей игры:

$$\dot{z}_{ij}(t) - 0,0001\pi z_{ij}(t) = u_i - v, \quad z_{ij}(\hat{T}) = \tilde{z}_{ij}.$$

Пусть убегающие используют управление $v = (0, 1)$, $\|v\| = 1$, $u_i - v = \lambda(v, z_{ij}^0) z_{ij}^0$, $\|u_i\| = 1$. Тогда

$$\lambda(v, z_{ij}^0) = \frac{\langle v, z_{ij}^0\rangle + \sqrt{\langle v, z_{ij}^0\rangle^2 - (v^2 - 1) z_{ij}^0}}{(z_{ij}^0)^2}.$$

$\lambda(v, z_{12}^0) = 0,385$, $\lambda(v, z_{22}^0) = 0,133$, $\lambda(v, z_{32}^0) = 0,172$, $\lambda(v, z_{41}^0) = 0$, $\lambda(v, z_{51}^0) = 0$.

Найдем $\tilde{z}_{ij}$. Получаем

$$\tilde{z}_{41} = (-1,0377; -15,5653),\ \tilde{z}_{51} = (1,0377; 20,7538),$$

$$\tilde{z}_{12} = (-5,0187; -25,0935),\ \tilde{z}_{22} = (1,0545; -15,8178),\ \tilde{z}_{32} = (6,6721; -16,6802).$$

Наборы

$$\{\tilde{z}_{i1}, i \in J_1^0, -c, p_1\},\ \{\tilde{z}_{i2}, i \in J_2^0, c, p_1\},\ J_1^0 = \{4, 5\},\ J_2^0 = \{1, 2, 3\}$$

образуют положительный базис.

Имеем $\tilde{\delta} = 0,9921$, $\tilde{\mu}^0 = 2,0741$, $n = 5$, $\lambda_0 = 0,0145$, $d = 1$, и $2n - \dfrac{\tilde{\delta}^2 - \lambda_0\tilde{\mu}^0\tilde{\delta}}{\lambda_0(\tilde{\delta} + d)} = -23,042 < 0$. Следовательно, по теореме 2 происходит поимка второго убегающего.

Список литературы

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
6. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. № 2. С. 238–245.
7. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. 1994. № 2. С. 12–21.

8. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
9. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 725–726.
10. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054.
11. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8. DOI: 10.20537/vm110401
12. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 21–31.
13. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
14. Виноградова М.Н., Петров Н.Н. Мягкая поимка двух скоординированных инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 6. С. 108–113.
15. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в одной нестационарной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 12–20. DOI: 10.20537/vm150102
16. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7. DOI: 10.20537/vm110101
17. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37.
18. Петров Н.Н. Нестационарный пример Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2000. № 4. С. 18–24.
19. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. DOI: 10.20537/vm160104
20. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 47–60. DOI: 10.20537/vm080104
21. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Известия вузов. Математика. 1994. № 4. С. 24–29.

Поступила в редакцию 18.09.2017

Виноградова Марина Николаевна, старший преподаватель, кафедра информационных и инженерных технологий, Удмуртский государственный университет, филиал в г. Воткинске, 427438, Россия, г. Воткинск, ул. Расковой, 1 а.
E-mail: mnvinogradova@mail.ru

M. N. Vinogradova
Group pursuit of two evaders in a linear game with a simple matrix

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 21–28 (in Russian).

Keywords: differential game, phase restrictions, piece-program strategy, counterstrategy.

MSC2010: 49N70, 49N75

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-03

We consider a linear nonstationary problem of pursuit of a group of two evaders by a group of pursuers with equal dynamic capabilities of all participants. The laws of motion of the participants have the form $\dot{z}(t) + a(t)z = u(t)$. For $t = t_0$ initial conditions are given. Phase state restrictions are imposed on the evaders state under the assumption that they use the same control. Geometric constraints on the controls are strictly convex compact set with a smooth boundary, terminal sets are the origin of coordinates. It is assumed that in the process of the game the evaders do not leave the limits of the halfspace $D = \{y\colon y \in \mathbb{R}^k, \langle p_1, y\rangle \leqslant 0\}$, where p_1 is a unit vector. The aim of the pursuers is to capture both evaders, the aim of the group of evaders is the opposite. It is also assumed that all evaders use tightly coordinated management, which is determined at each point in time, taking into account the positions of other players in the game. The capture occurs if there are times τ_1, τ_2 such that the coordinates of the pursuers and evaders coincide, and the capture times may not coincide. For a nonstationary simple pursuit problem in terms of initial positions and game parameters, sufficient conditions for catching two evaders are obtained. An example is given that illustrates the results obtained.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
2. Chernous'ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *J. Appl. Math. Mech.*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90105-2
3. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Springer Netherlands, 1997, XX+404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
5. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
6. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00027-8
7. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A linear evasion problem for interacting groups of objects, *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, issue 4, pp. 583–591. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90135-X
8. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk Uzbek. SSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
9. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of pursuit of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de6186
10. Grigorenko N.L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Sov. Math., Dokl.*, 1985, vol. 31, pp. 550–553.
11. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 3–8 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110401
12. Vinogradova M.N. On the capture of two escapees in the non-stationary problem of simple pursuit, *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2012, vol. 4, issue 1, pp. 21–31 (in Russian).
13. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).
14. Vinogradova M.N., Petrov N.N. Soft capture of two coordinated evaders, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2013, vol. 52, issue 6, pp. 949–954. DOI: 10.1134/S1064230713060129
15. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a non-stationary pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 12–20 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150102
16. Bannikov A.S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 3–7 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110101
17. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. DOI: 10.1134/S1064230712060081
18. Petrov N.N. Non-stationary Pontryagin example with phase restrictions, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2000, vol. 32, issue 10, pp. 11–17. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v32.i10.20
19. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160104
20. Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, issue 1, pp. 47–60 (in Russian). DOI: 10.20537/vm080104
21. Petrov N.N. On certain problems on a group pursuit with phase constraints, *Russian Mathematics*, 1994, vol. 38, no. 4, pp. 21–26.

Received 18.09.2017

Vinogradova Marina Nikolaevna, Senior Lecturer, Udmurt State University, Votkinsk Branch, ul. Raskovoi, 1 a, Votkinsk, 427438, Russia.
E-mail: mnvinogradova@mail.ru