УДК 519.834

© ***В. И. Жуковский, М. Ларбани, Л. В. Смирнова***

НОВЫЙ ПОДХОД К КООПЕРАЦИИ В КОНФЛИКТЕ С ЧЕТЫРЬМЯ УЧАСТНИКАМИ И ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В настоящей статье вводится концепция коалиционной рациональности. На синтезе понятий индивидуальной, а также коллективной рациональности (из теории кооперативных игр без побочных платежей) и предложенного в настоящей статье определения коалиционной рациональности формализуется коалиционная равновесная ситуация (КРС) в конфликте четырех лиц при неопределенности. Устанавливаются достаточные условия существования КРС, сводящиеся к построению седловой точки гермейеровской свертки гарантий функций выигрыша. Наконец, согласно подходу Эмиля Бореля, Джона фон Неймана и Джона Нэша, доказывается существование КРС в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр ограничениях (компактность множеств неопределенностей и стратегий игроков и непрерывность функций выигрыша). В заключении статьи предлагаются возможные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: кооперативная игра без побочных платежей, неопределенность, гарантия, смешанные стратегии, гермейеровская свертка, седловая точка, равновесие по Нэшу и по Бержу.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-04

Введение

Математическая модель кооперации в конфликте для данной статьи представлена кооперативной игрой четырех лиц в нормальной форме, без побочных платежей и при учете неопределенных факторов (интервальных неопределенностей). Считаем, что о неопределенностях участникам конфликта известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют (по тем или иным причинам). Учет неопределенностей при моделировании реальных конфликтов позволяет получать более адекватные результаты, что подтверждается, например, большим числом публикаций (более 1 млн работ в Google Shcolar по запросу *mathematical modelling under uncertainty*). Сами неопределенности возникают за счет неполноты (неточности) знаний о реализациях выбранных участниками конфликта своих стратегий: *In these matters the only certainty is there is nothing certain* (Pliny the Elder) («В этой жизни определённо только то, что нет ничего определенного», Плиний Старший[1]). Например, экономическая система, как правило, подвергается неожиданным трудно прогнозируемым возмущениям как извне (изменение количества и номенклатуры поставок, скачки спроса на товары, выпускаемые данным производством), так и изнутри (появление новых технологий, поломка и замена оборудования, несовпадение реальных сроков пуска нового оборудования с планируемыми сроками и так далее); появление новых технологий может служить причиной возмущений в экологических системах; в механических — температурные, а также погодные условия. Возникает вопрос: как при выборе стратегий одновременно учесть как кооперативный характер конфликта, так и наличие неопределенностей?

Особенность кооперативного характера конфликта в том, что в нем учитываются интересы любой возможной коалиции — объединения игроков (участников конфликта), приобретающих возможность согласованного выбора своих стратегий с целью достижения возможно лучших результатов. При этом предполагается следующее:

во-первых, если игроки коалиции договорились в результате переговоров о совместных действиях, то этот договор в течение игры должен выполняться, то есть соглашения обязательны;

во-вторых, игроки лишены возможности передавать остальным «коллегам по конфликту» часть своего результата (выигрыша), то есть ограничиваемся играми без побочных платежей — так называемые *игры с нетрансферабельными выигрышами*;

в-третьих, выполнено свойство персональности; а именно, выигрыш пустой коалиции равен нулю; согласно этому принципу ненулевых выигрышей могут достичь только действующие («живые») игроки.

[1]Плиний Старший (ок. 23–79) — римский писатель, ученый.

§ 1. Игра гарантий

Рассматривается математическая модель конфликта с четырьмя участниками в виде нормальной формы кооперативной игры четырех лиц при неопределенности:

$$\Gamma = \langle \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

В Γ множество участников (игроков) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$, игрок i ассоциируется с порядковым номером $i \in \mathbb{N}$; в Γ каждый из четырех участников выбирает и использует свою *стратегию* $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X = \prod\limits_{i=1}^{4} X_i \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$; независимо от их действий в Γ реализуется (*интервальная*) *неопределенность* $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$; на множестве пар $(x, y) \in X \times Y$ определена *функция выигрыша* каждого i-го игрока $f_i(x, y)$, значение которой называется *выигрышем* этого игрока i. На содержательном уровне цель каждого игрока в Γ — выбор такой своей стратегии x_i^* $(i \in \mathbb{N})$, при которой выигрыш каждого становится *возможно большим*, при этом они должны учитывать возможность создания любой коалиции и реализации любой, в том числе и *стратегической*, *неопределенности* вида $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$.

Известная французская пословица гласит: *Entre bouche et cuiller vient souvent grand encombrier* («Пока несешь ложку в рот, нередко возникает помеха»), но учет неопределенности приводит к многозначности функции выигрыша каждого игрока $f_i(x, Y) = \bigcup\limits_{y\in Y} f_i(x, y)$. Такая многозначность, несомненно, затрудняет исследование кооперативных игр вида Γ, и поэтому предлагаем оценивать качество функционирования каждого i-го игрока в Γ не значением его функции выигрыша $f_i(x, y)$, а ее (нижней) гарантией $f_i[x]$. Можно предложить следующий способ построения таких гарантий.

А именно, в качестве гарантии $f_i(x, y)$ $\forall y \in Y$ выбираем

$$f_i[x] = \min_{y\in Y} f_i(x, y).$$

Действительно, отсюда следует $f_i[x] \leqslant f_i(x, y)$ $\forall y \in Y$, и поэтому нижнюю границу качества функционирования i-го игрока при реализации в Γ ситуации $x \in X$ можно оценить числом $f_i[x]$ (то есть при любых неопределенностях $y \in Y$ функция $f_i(x, y)$ не может стать меньше $f_i[x]$). Заметим, что существование непрерывной на X скалярной функции $f_i[x]$ будет следовать из компактности (замкнутости и ограниченности) множеств X_i $(i \in \mathbb{N})$, Y и непрерывности $f_i(x, y)$ на $X \times Y$ (этот широко известный факт установлен в теории исследования операций).

§ 2. Коалиционная равновесность

В игре Γ может сложиться пятнадцать *коалиционных структур* (разбиений всего множества игроков $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества (коалиции)): $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $K_{\{i\}} = \{\{i\}, \{-i\} | -i = \mathbb{N} \setminus \{i\}\}$, $K_{\{i\},\{j\}} = \{\{i\}, \{j\}, \{-(i, j)\} | -(i, j) = \mathbb{N} \setminus \{i, j\}\}$, $K_{\{i,j\}} = \{\{i, j\}, \{-(i, j)\} | -(i, j) = \mathbb{N} \setminus \{i, j\}\}$ $(i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$. Напомним два понятия из теории кооперативных игр без побочных платежей [1]: для ситуации $x^* \in X$ в игре гарантий $\Gamma^g = \langle \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[x] = \min\limits_{y\in Y} f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ выполняются следующие условия:

(a) *условие индивидуальной рациональности* (УИР) (при обозначениях $x = (x_i, x_{-i})$, $X_{-i} = \prod\limits_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} X_j$), если

$$f_i[x^*] \geqslant f_i^0 = \max_{x_i\in X_i} \min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i[x_i, x_{-i}] = \min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i[x_i^0, x_{-i}] \ \ (i \in \mathbb{N}),$$

в силу чего, если игрок i применяет максиминную стратегию x_i^0, его выигрыш $f_i[x_i^0, x_{-i}] \geqslant f_i^0$ $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ $(i \in \mathbb{N})$;

(b) *условие коллективной рациональности* (УКР): x^* максимальна по Парето в четырехкритериальной задаче $\Gamma^g = \langle X, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, то есть при $\forall x \in X$ несовместна система неравенств

$f_i[x] \geqslant f_i[x^*]$ $(i \in \mathbb{N})$, из которых по крайней мере одно неравенство строгое; заметим, что если для любых $x \in X$ будет $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] \leqslant \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i[x^*]$, то x^* максимальна по Парето в Γ^g;

(c) на основе концепций равновесия по Нэшу и по Бержу [2–4] введем *условие коалиционной рациональности* (при обозначениях $x = (x_i, x_{-i})$, $x = (x_i, x_j, x_{-(i,j)})$, $X_{-i} = \prod\limits_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} X_j$, $X_{-(i,j)} = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus\{i,j\}} X_k$):

$$f_k[x^*] \geqslant f_k[x_i^*, x_{-i}] \quad \forall x_{-i} \in X_{-i};$$
$$f_k[x^*] \geqslant f_k[x_i^*, x_j^*, x_{-(i,j)}] \quad \forall x_{-(i,j)} \in X_{-(i,j)};$$
$$f_k[x^*] \geqslant f_k[x_i, x_{-i}^*] \quad \forall x_i \in X_i,$$

$i,\ j,\ k \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

О п р е д е л е н и е 1. Ситуацию $x^* \in X$ назовем *коалиционно-равновесной* (КР) для игры Γ, если она одновременно удовлетворяет УИР, УКР и условию коалиционной рациональности для «игры гарантий» Γ^g.

З а м е ч а н и е 1. УИР означает, что игроку имеет смысл объединяться с другим в коалицию, если при этом он получит выигрыш не меньший, чем он сам себе может обеспечить, применяя свою максиминную стратегию. УКР приводит игрока к самому большому (в векторном смысле!) выигрышу. Наконец условие коалиционной рациональности делает его выигрыш устойчивым к отклонению от x^* отдельных игроков или любых возможных коалиций.

§ 3. Достаточное условие

В соответствии с определением 1 КР-ситуация x^* должна удовлетворять экстремальным ограничениям, «диктуемым» УИР, УКР и условием коалиционной рациональности. Однако все эти условия являются следствием семнадцати из них:

$$\begin{gathered}
f_i[x_1^*, x_2, x_3, x_4] \leqslant f_i[x^*] \quad \forall x_k \in X_k \quad (k = 2,3,4),\\
f_i[x_1, x_2^*, x_3, x_4] \leqslant f_i[x^*] \quad \forall x_l \in X_l \quad (l = 1,3,4),\\
f_i[x_1, x_2, x_3^*, x_4] \leqslant f_i[x^*] \quad \forall x_r \in X_r \quad (r = 1,2,4),\\
f_i[x_1, x_2, x_3, x_4^*] \leqslant f_i[x^*] \quad \forall x_q \in X_q \quad (q = 1,2,3),\\
\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x^*] \quad \forall x \in X,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$.

При формулировке достаточных условий существования КР-ситуации воспользуемся подходом, предложенным в [5]. Для этого введем n-вектор $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in X$ и гермейеровскую свертку [6]:

$$\begin{gathered}
\varphi_1(x,z) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] - f_i[z]\},\\
\varphi_2(x,z) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_i[x_1, z_2, x_3, x_4] - f_i[z]\},\\
\varphi_3(x,z) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_i[x_1, x_2, z_3, x_4] - f_i[z]\},\\
\varphi_4(x,z) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_i[x_1, x_2, x_3, z_4] - f_i[z]\},\\
\varphi_5(x,z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[z],\\
\varphi(x,z) = \max_{j=1,\ldots,5} \varphi_j(x,z),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in X = \prod\limits_{i=1}^{4} X_i$.

Седловая точка $(x^0, z^*) \in X \times Y$ скалярной функции $\varphi(x, z)$ из (2) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leqslant \varphi(x^0, z^*) \leqslant \varphi(x^0, z) \quad \forall\, x, z \in X. \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Если удалось найти седловую точку* $(x^0, z^*) \in X \times Y$ *функции* $\varphi(x, y)$, *то минимаксная стратегия* z^* *является КР игры* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при $z = x^0$ из (2) следует $\varphi(x^0, x^0) = 0$. Тогда по транзитивности из (3) получаем $[\varphi(x^0, z^*) \leqslant 0] \Rightarrow [\varphi(x, z^*) \leqslant 0 \quad \forall x \in X]$, что и означает, в силу (2), справедливость (1). $\square$

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 1 построение КР сводится к нахождению седловой точки (x^0, z^*) гермейеровской свертки $\varphi(x, z)$ из (2). А именно, получили следующий конструктивный способ построения КР-решения игры Γ:

во-первых, построить по формуле (2) скалярную функцию $\varphi(x, z)$;

во-вторых, найти седловую точку (x^0, z^*) функции $\varphi(x, z)$, удовлетворяющую цепочке неравенств из (3);

в-третьих, найти значения четырех функций $f_i[x^*]$ $(i \in \mathbb{N})$.

Тогда пара $(z^*, f[z^*] = (f_1[z^*], f_2[z^*], f_3[z^*], f_4[z^*])) \in X \times \mathbb{R}^4$ образует коалиционное равновесие игры Γ: игрокам следует использовать свои стратегии из ситуации z^*, обеспечивая тем самым себе гарантии $f_i[z^*]$.

§ 4. Существование КР в смешанных стратегиях

Как упоминалось в аннотации, впервые существование седловой точки в смешанных стратегиях установлено в [7] Эмилем Борелем в 1921 г.; не зная об этом результате, его повторил Джон фон Нейман в 1928 г. [8]. Наконец Джоном Нэшем доказано существование в смешанных стратегиях ситуации равновесия по Нэшу [2, 3].

Здесь и далее обозначаем через $\operatorname{comp} \mathbb{R}^{n_i}$ множество всех компактов (замкнутых и ограниченных подмножеств евклидова n_i-мерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$), а непрерывность на $X \times Y$ скалярной функции $f_i(x, y)$ обозначаем как $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$.

Рассматриваем снова кооперативную игру без побочных платежей Γ. Не оговаривая особо, предполагаем для элементов упорядоченного множества Γ выполнение перечисленных ниже требований:

У с л о в и е 1.

$$X_i \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i \in \mathbb{N}), \quad Y \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^m, \quad f_i(\cdot) \in C(X \times Y). \tag{4}$$

Здесь будет приведено понятие смешанного расширения игры Γ, включающее смешанные стратегии, ситуации, математическое ожидание функций выигрыша.

Будем предполагать, что для игры Γ выполнены ограничения (4), тогда $f_i(x, y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$, где $X = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$. На каждом компакте $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ — множество подмножеств X_i таких, что $X_i \in \mathfrak{B}(X_i)$, причем $\mathfrak{B}(X_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathfrak{B}(X_i)$; кроме того, $\mathfrak{B}(X_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта X_i. Согласно математической теории игр *смешанную стратегию* i-го игрока $\nu_i(\cdot)$ будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* X_i. Вероятностная мера есть неотрицательная скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X_i)$ подмножеств компакта $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

(1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(X_i)$ (свойство *счетной аддитивности* функции $\nu_i(\cdot)$);

(2) $\nu_i(X_i) = 1$ (*свойство нормированности*), и поэтому $\nu_i\left(Q^{(i)}\right) \leqslant 1$ для всех $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$). Построим ситуацию в смешанных стратегиях в виде меры-произведения

$$\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3)\nu_4(dx_4),$$

множество которых обозначим через $\{\nu\}$, а также математическое ожидание

$$f_i[\nu] = \int_X f_i[x]\nu(dx).$$

Получим смешанное расширение игры гарантий Γ^g, обозначим которое через

$$\widetilde{\Gamma}^g = \langle \mathbb{N} = \{1,2,3,4\}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\nu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{5}$$

Аналогично определению 1 введем

О п р е д е л е н и е 2. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем *коалиционно равновесной* (КР) *в смешанном расширении* (5) (или коалиционно-равновесной (КР) ситуацией в смешанных стратегиях для игры $\widetilde{\Gamma}^g$), если

во-первых, ситуация $\nu^*(\cdot)$ коалиционно-рациональна для игры (5), то есть:

$$\begin{gathered}
f_i[\nu_1^*, \nu_2, \nu_3, \nu_4] \leqslant f_i[\nu^*] \quad \forall \nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\} \quad (k = 2,3,4),\\
f_i[\nu_1, \nu_2^*, \nu_3, \nu_4] \leqslant f_i[\nu^*] \quad \forall \nu_l(\cdot) \in \{\nu_l\} \quad (l = 1,3,4),\\
f_i[\nu_1, \nu_2, \nu_3^*, \nu_4] \leqslant f_i[\nu^*] \quad \forall \nu_r(\cdot) \in \{\nu_r\} \quad (r = 1,2,4),\\
f_i[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4^*] \leqslant f_i[\nu^*] \quad \forall \nu_q(\cdot) \in \{\nu_q\} \quad (q = 1,2,3)
\end{gathered}$$

(множество коалиционно-рациональных ситуаций игры (5) обозначим как $\{\nu^*\}$);

во-вторых, $\nu^*(\cdot)$ максимальна по Парето в четырехкритеральной задаче

$$\langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

то есть при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu^*\}$ несовместна система неравенств

$$f_i[\nu] \geqslant f_i[\nu^*] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых по крайней мере одно строгое.

Аналогично [5, с. 236–238] доказывается справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 2. *Если $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$, $X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, $Y \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^m$, то в игре Γ существует КР в смешанных стратегиях.*

Заключение

В первую очередь здесь отметим новые в теории кооперативных игр результаты, полученные в настоящей статье.

Во-первых, формализовано понятие коалиционного равновесия (КР), учитывающее интересы любой коалиции в игре четырех лиц.

Во-вторых, установлен конструктивный способ нахождения КР, сводящийся к отысканию минимаксной стратегии для специальной гермейеровской свертки, эффективно строящейся по гарантиям функций выигрыша игроков.

В-третьих, доказано существование КР в смешанных стратегиях при «привычных» для математического программирования условиях (непрерывность функций выигрыша и компактность множества стратегий игроков и неопределенностей).

На наш взгляд, немаловажным являются и новые качественные результаты, следующие из настоящей статьи:

1) результаты распространяются на кооперативные игры без побочных платежей с любым конечным числом участников (больше четырех);

2) КР $x^* \in X$ устойчива к отклонению от нее любых возможных коалиций; игроки отклонившейся коалиции либо «ухудшат» (уменьшат) свои гарантированные выигрыши, либо оставят их прежними;

3) КР применим, даже если в течение игры меняются коалицонные структуры или если все коалиции остаются в наличии;

4) КР можно использовать при создании устойчивых союзов (альянсов) игроков. И это далеко не все достоинства КР!

Но есть еще одно достоинство, которое считаем нужным отметить.

До сих пор в теории кооперативных игр особо акцентировались условия индивидуальной и коллективной рациональности. Но индивидуальным интересам игроков отвечает концепция равновесности по Нэшу с ее «эгоистическим» характером («каждому свое»); коллективной более соответствует концепция равновесности по Бержу с ее «альтруизмом» («помогать всем, забывая порой о своих интересах»). Однако такая «забывчивость» не свойственна человеческой сущности игроков. Этот негатив обеих концепций «снимает» коалиционная рациональность.

В самом деле, в условиях коалиционной рациональности первый игрок, не забывая о себе и являясь участником коалиции $\{1, 2, 3\}$ структуры $K_{\{4\}}$, помогает второму и третьему (свойство концепции равновесности по Бержу), а также, являясь участником коалиции $\{1, 3, 4\}$ структуры $K_{\{2\}}$, поддерживает третьего и четвертого, но, напоминаем, «не забывая о себе». Аналогично остальные игроки. Таким образом, введенная в статье коалиционная рациональность заполняет пробел между равновесиями по Нэшу и по Бержу, прибавляя к равновесию по Нэшу «заботу о других», а к равновесию по Бержу — «заботу о себе».

Список литературы

1. Luce R.D., Raiffa H. Games and decisions. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1957. 544 p.
2. Nash J. Non-cooperative games // Annales of Mathematics. 1951. Vol. 54. No. 2. P. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1950. Vol. 36. No. 1. P. 48–49. DOI: 10.1073/pnas.36.1.48
4. Berge C. Théorie générale des jeux a n personnes. Paris: Gauthier-Villar, 1957. 114 p.
5. Zhukovskiy V., Topchishvili A., Sachkov S. Application of probability measures to the existence problem of Berge–Vaisman guaranteed equilibrium // Model Assisted Statistics and Applications. 2014. Vol. 9. No. 3. P. 223–239. DOI: 10.3233/MAS-140295
6. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 328 с.
7. Borel E. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1921. Vol. 173. P. 1304–1308.
8. Neumann J.v. Zur theorie der gesellschaftspiele // Mathematische Annalen. 1928. Vol. 100. Issue 1. P. 295–320. DOI: 10.1007/BF01448847

Поступила в редакцию 16.07.2017

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Ларбани Муса, к. ф.-м. н., профессор, Школа математики и статистики, Карлтонский университет, K1S 5B6, Канада, Онтарио, Оттава, 1125 Colonel By Drive.
E-mail: Moussa.Larbani@carleton.ca

Смирнова Лидия Викторовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики, Государственный гуманитарно-технологический университет, 142611, Россия, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22.
E-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

V. I. Zhukovskii, M. Larbani, L. V. Smirnova

A new approach to cooperation in a conflict with four members

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 29–35 (in Russian).

Keywords: cooperative game without side payments, uncertainty, guarantee, mixed strategy, Germeier convolution, saddle point, Nash and Berge equilibrium.

MSC2010: 91A12

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-04

This paper introduces the concept of coalition rationality. The coalition equilibrium situation (CES) in the conflict of four persons under uncertainty is formalized by unifying the notions of individual and collective rationality (from the theory of cooperative games without side payments) and the definition of coalition rationality given in this paper. Then sufficient conditions for the existence of CES, which reduce to construction of the saddle point of Germeier convolution of payoff function guarantee, are established. Next, according to approach of E. Borel, J. von Neumann, and J. Nash, the existence of CES in mixed strategies is proved under "usual" restrictions for mathematical games theory such as compactness of sets of uncertainties and strategies of players and continuity of payoff functions. In conclusion, the article suggests possible directions for further research.

REFERENCES

1. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1957, 544 p.
2. Nash J. Non-cooperative games, *Annales of Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1950, vol. 36, no. 1, pp. 48–49. DOI: 10.1073/pnas.36.1.48
4. Berge C. *Théorie générale des jeux a n personnes*, Paris: Gauthier-Villar, 1957, 114 p.
5. Zhukovskiy V., Topchishvili A., Sachkov S. Application of probability measures to the existence problem of Berge–Vaisman guaranteed equilibrium, *Model Assisted Statistics and Applications*, 2014, vol. 9, no. 3, pp. 223–239. DOI: 10.3233/MAS-140295
6. Germeier Yu.B. *Non-antagonistic games*, Boston: Springer Netherlands, 1986, XIV+376 p.
7. Borel E. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1921, vol. 173, pp. 1304–1308.
8. Neumann J.v. Zur theorie der gesellschaftspiele, *Mathematische Annalen*, 1928, vol. 100, issue 1, pp. 295–320. DOI: 10.1007/BF01448847

Received 16.07.2017

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Larbani Moussa, Candidate of Physics and Mathematics, Professor, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, 1125 Colonel By Drive, Ottawa, Ontario, K1S 5B6, Canada.
E-mail: Moussa.Larbani@carleton.ca

Smirnova Lidiya Viktorovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computer Science, Moscow State Regional Institute of Humanities, ul. Zelenaya, 22, Orekhovo-Zuevo, 142611, Russia.
E-mail: smirnovalidiya@rambler.ru