УДК 510.635, 517.988.52, 519.833, 517.977

© *Д. А. Серков*

К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ИСТИННОСТИ ПРЕДИКАТА[1]

В работе развит подход, именуемый «размыкание предиката», сводящий задачу поиска множества истинности предиката к задаче поиска множества неподвижных точек некоторого отображения (далее — размыкающее отображение). Предлагаемая техника дает дополнительные возможности анализа задач и построения решений путем систематического привлечения результатов теории неподвижных точек. Даны формальное определение операции размыкания предиката, способы построения и исчисления размыкающих отображений и их основные свойства. В случае когда область определения предиката частично упорядочена, указаны способы построения размыкающих функций, обладающих свойством сужаемости. Это позволило получить представления интересующих элементов решения в виде итерационных пределов. Вместе с тем эффективность полученного решения зависит от специфики рассматриваемой задачи и выбранного варианта реализации метода. В качестве иллюстраций рассмотрены процедуры построения и дальнейшего использования размыкающих отображений для предикатов «быть нэшевским равновесием» и «быть неупреждающим селектором».

Ключевые слова: множество истинности предиката, неподвижные точки, равновесие Нэша, неупреждающие отображения.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-06

§ 1. Введение

Под термином «размыкание предиката» понимается сведение задачи поиска и/или изучения свойств множества истинности заданного предиката к задаче поиска и/или изучения свойств неподвижных точек некоторого отображения. Понятно, что размыкание предиката, если оно осуществлено, дает (как минимум дополнительную) возможность анализа его области истинности и построения элементов этой области с теми или иными дополнительными свойствами. Имеется несколько нетривиальных примеров размыкания предиката: в теории игр — при исследовании седловых точек (см. [1]) и равновесий Нэша (см. [2, 3]); в динамических играх — при построении стабильных (слабоинвариантных) множеств (см. [4, 5]) и неупреждающих селекторов многозначных отображений (см., например, [6, 7]).

Во многих случаях, например при изучении дифференциальных уравнений и дифференциальных включений, «размыкающее» отображение (то есть отображение, имеющее своими неподвижными точками решения соответствующего уравнения) возникает естественным образом из поставленной задачи. И тогда для доказательства теорем существования и/или единственности остается «только» найти подходящую теорему о неподвижных точках.

В отмеченных выше примерах из теории игр вид размыкающего отображения не вытекает столь очевидно из постановки задачи и выдается как готовый продукт: способ построения такого отображения остается за рамками рассмотрения.

В настоящей статье излагается формальный подход к построению размыкающих отображений, намеченный в работах [8, 9]: приведены определение размыкания предиката, способы построения и исчисления размыкающих отображений, их основные свойства. В качестве иллюстрации показано, как с помощью предложенной техники удается построить размыкающие отображения для некоторых известных задач и при этом получить теоремы существования более общего вида. Описываемый подход далек от универсальности, но по крайней мере прило́жим во многих интересных случаях.

В § 2 приводятся обозначения и определения общего характера, а также отдельные утверждения из теории неподвижных точек, используемые в дальнейших приложениях. В § 3 рассмотрены свойства размыкающих отображений и операции над ними. В § 4 дается вывод размыкающего отображения для предиката «быть равновесием Нэша» в игре с произвольным числом участников и соответствующее представление множества равновесий. Наконец, в § 5 этот

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16–01–00649.

подход используется для описания наибольшего неупреждающего селектора заданной мультифункции.

§ 2. Определения и вспомогательные сведения

§ 2.1. Обозначения и определения общего характера

В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\stackrel{\text{def}}{=}$ — равенство по определению; $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ — эквивалентность по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из множества A в множество B (см. [10, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f\,|\,C)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)\ \forall x \in C$. Полагаем, также $f(C)$ есть образ множества $C \in \mathcal{P}(A)$ при отображении f: $f(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in C\}$. В случае когда $f \in \mathcal{P}(B)^A$, будем также называть f многозначным отображением (м/о) или мультифункцией (м/ф) из A в B. В случае когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F\,|\,C\big) \stackrel{\text{def}}{=} \{(f\,|\,C) : f \in F\}$. Если $f \in B^A$, то обозначим f^{-1} м/ф из $\mathcal{P}(A)^B$ вида $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid b = f(a)\}\ \forall b \in B$. В случае когда $f \in \mathcal{P}(B)^A$, то есть f — м/ф, полагаем $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid b \in f(a)\}\ \forall b \in B$. Для произвольной м/ф $f \in \mathcal{P}(B)^A$ обозначим через $\mathbb{G}(f)$ подмножество из $A \times B$, являющееся графиком функции f: $\mathbb{G}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$. Понятно, что при этом для любого $a \in A$, $f(a) = \{b \in B \mid (a,b) \in \mathbb{G}(f)\}$ и $\mathbb{G}(f^{-1}) = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathbb{G}(f)\}$. Для м/ф $f \in \mathcal{P}(B)^A$ обозначим через $\mathbf{dom}(f)$ подмножество из A, на котором значения f непусты: $\mathbf{dom}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \neq \varnothing\}$.

Для функции $f \in X^X$ обозначим через $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех ее неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = x\}$. В случае когда f — м/ф, множество $\mathbf{Fix}(f)$ определяется как $\mathbf{Fix}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in f(x)\}$. Если $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)^X)$, то положим $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{f\in\mathbf{F}}\mathbf{Fix}(f)$ и назовем $\mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ множеством *общих неподвижных точек* семейства $\mathbf{F}$.

Назовем частично упорядоченное множество (ЧУМ) *направленным*, если каждое конечное его подмножество имеет мажоранту. Всякое линейно упорядоченное подмножество ЧУМ назовем *цепью*. Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим через $\top_Y$ и $\perp_Y$ *наибольший* и *наименьший* элементы множества Y соответственно, если они существуют. Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *строго индуктивным*, если всякая его непустая цепь C имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *c-полным* (chain complete), если всякая его цепь C (в том числе и пустая) имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Отметим, что в c-полном ЧУМ существует наибольший элемент — нижняя грань пустой цепи.

Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — ЧУМ и $f \in X^X$. Назовем функцию f *сужающей на* $(X, \preccurlyeq)$, если $f(x) \preccurlyeq x$ $\forall x \in X$; назовем f *изотонной на* $(X, \preccurlyeq)$, если $(x \preccurlyeq x') \Rightarrow (f(x) \preccurlyeq f(x'))\ \forall x, x' \in X$.

Будем обозначать через $\mathbf{ORD}$ класс порядковых чисел (ординалов). Запись $\alpha \in \mathbf{ORD}$ будем рассматривать как сокращение высказывания «α есть порядковое число» («α есть ординал»). Отношение порядка (строгого порядка) на классе $\mathbf{ORD}$ будем обозначать как $\preccurlyeq$ ($\prec$). Для всякого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ обозначим через $\mathbf{W}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{\iota \in \mathbf{ORD} \mid \iota \prec \alpha\}$ ($\mathbf{W}_{+}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$) множество всех ординалов меньших (не больших), чем α. Для всяких множества X и $\alpha \in \mathbf{ORD}$ назовем *α-последовательностью в X* (*α_+-последовательностью в X*) и обозначим как $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($(x_\iota)_{\mathbf{W}_+(\alpha)}$) всякое отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$ ($\mathbf{W}_+(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$) из множества отображений $X^{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($X^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$). В случае когда это не вызывает двусмысленности, будем также называть α-последовательностью множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ членов этой последовательности. В частности, будем говорить, что некоторая α-последовательность $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ есть (образует) цепь, если соответствующее множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ является цепью (линейно упорядочено). При этом отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$, вообще говоря, не предполагается изотонным. Первое бесконечное предельное порядковое число (бесконечный предельный ординал) обозначим как ω. Для всякого множества X обозначим через $|X|$ класс эквивалентности множеств, равномощных множеству X (кардинал X). Обозначим через $|X|^+$ наименьший среди ординалов η, обладающих тем свойством, что $|X| < \eta$. Отношение порядка (строгого порядка) на классе кардиналов будем обозначать как $<=$ ($<$).

Предикат P на непустом множестве X будем отождествлять с одноименной функцией из $\{0,1\}^X$. Будем говорить, что для $x \in X$ *выполняется предикат* P, и записывать это через $P(x)$, если и только если $P(x) = 1$. Множество всех $x \in X$, для которых выполняется предикат P, назовем *множеством истинности предиката* P. В соответствии с понятием обратного отображения будем обозначать это множество как $P^{-1}(1)$. Множество всех предикатов на X обозначим как $\mathfrak{PR}(X)$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{F}$) предикат тождественно истинный (ложный) на X: $\mathfrak{T}^{-1}(1) = X$ ($\mathfrak{F}^{-1}(0) = X$). Таким образом, для любого $P \in \mathfrak{PR}(X)$ выполняется $P = \mathfrak{T} \& P = \mathfrak{F} \vee P$.

Для всякого предиката P, заданного на непустом множестве X, будем называть *размыканием предиката* P операцию поиска и/или построения отображения $\mathcal{F}_P \in \mathcal{P}(X)^X$ такого, что $\mathbf{Fix}(\mathcal{F}_P) = P^{-1}(1)$. При этом всякое отображение $\mathcal{F}_P$, обладающее указанным свойством, будем называть *размыкающим* (для предиката P). Обозначим через $\mathfrak{UM}(P)$ множество (из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)^X)$ всех размыкающих отображений предиката P: $\mathfrak{UM}(P) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \mathbf{Fix}(f) = P^{-1}(1)\}$. Исключение функций из размыкающих отображений условно: всякая функция f, удовлетворяющая $\mathbf{Fix}(f) = P^{-1}(1)$, представлена в $\mathfrak{UM}(P)$ мультифункцией F_f вида $F_f(x) \overset{\text{def}}{=} \{f(x)\}$. Поэтому далее мы будем писать $f \in \mathfrak{UM}(P)$, подразумевая $F_f \in \mathfrak{UM}(P)$.

§ 2.2. Вспомогательные результаты о неподвижных точках

В § 4 мы воспользуемся утверждениями о неподвижных точках, опирающимися на топологические свойства. Введем обозначения. Пусть Z — непустое множество и $F \in \mathcal{P}(Z)^Z$ — многозначное отображение. По заданному отображению F определим отображение $\hat{F} \in \mathcal{P}(Z)^{\mathcal{P}(Z)}$ следующим образом:

$$\hat{F}(Y) \overset{\text{def}}{=} \left(\bigcup_{y \in Y} F(y) \right) \bigcap Y = \bigcup_{y \in Y} F(y) \cap Y.$$

Заметим, что множество $\hat{F}(Y)$ является множеством «кандидатов» из множества Y во множество неподвижных точек: легко проверить от противного, что элементы из Y, не попавшие в $\hat{F}(Y)$, заведомо не принадлежат $\mathbf{Fix}(F)$.

Обозначим через $\mathbb{O}(Z)$ множество всех покрытий Z, то есть всех подмножеств $(O_\kappa)_K \subset \mathcal{P}(Z)$ таких, что $\cup_{\kappa \in K} O_\kappa = Z$. Пусть $\tau(Z)$ — некоторая топология в Z (множество всех открытых множеств). Обозначим через $\mathbb{O}_{\text{fo}}(Z)$ ($\mathbb{O}_{\text{fc}}(Z)$) множество всех конечных открытых (замкнутых) покрытий Z.

Т е о р е м а 2.1 (Theorem 2 из [11]). *Пусть Z — компактное хаусдорфово пространство, а отображение F имеет замкнутый график. Тогда*

$$\mathbf{Fix}(F) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\text{fo}}(Z)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{F}(O_\kappa) = \bigcap_{(O_\kappa)_I \in \mathbb{O}_{\text{fc}}(Z)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{F}(O_\kappa). \tag{2.1}$$

В частности, множество $\mathbf{Fix}(F)$ непусто, если и только если выполнено условие

$$\forall (O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\text{fc}}(Z)\ \exists \bar{\kappa} \in K, \qquad \hat{F}(O_{\bar{\kappa}}) \neq \varnothing. \tag{2.2}$$

З а м е ч а н и е 1. В соответствии с [11, Theorem 3], если Z метризуемо, условие (2.2) принимает вид

$$\forall \delta > 0\ \exists Z_\delta \in Z, \qquad \mathbf{d}(Z_\delta, F(Z_\delta)) \leqslant \delta. \tag{2.3}$$

Следующие утверждения о неподвижных точках используют структуры порядка и будут нам полезны в § 5. Пусть $X \neq \varnothing$ и $(X, \leqslant)$ — строго индуктивное ЧУМ, а $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$ — произвольно заданное непустое множество сужающих отображений. Пусть $\alpha \in \mathbf{ORD}$ и $\phi \overset{\text{def}}{=}$

$\overset{\text{def}}{=} (f_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ — произвольно выбранная α_+-последовательность во множестве $\mathbf{F}$. Определим α_+-последовательность $(\phi^\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in (X^X)^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ композиций первых β отображений из α_+-последовательности ϕ.

Проведем построение индуктивно.

I. При α равном 0 положим $\phi^0(x) \overset{\text{def}}{=} x$ для всех $x \in X$.

Пусть вообще $\beta \in \mathbf{ORD}$ таково, что $\beta \neq 0$ и для каждого $\eta \in \mathbf{W}(\beta)$ определена композиция $\phi^\eta \in X^X$ первых η отображений из ϕ.

II. Если β имеет предшественника (пусть это γ), положим $\phi^\beta \overset{\text{def}}{=} f_\beta \circ \phi^\gamma$.

III. Если β — предельное порядковое число и $\beta \neq 0$, положим

$$\phi^\beta(x) \overset{\text{def}}{=} f_\beta\left(\inf\{\phi^\eta(x)\colon \eta \in \mathbf{W}(\beta)\}\right) \qquad \forall x \in X.$$

В силу принципа трансфинитной индукции (см. [10, гл. VII, § 1, теорема 4; гл. VII, § 4, теорема 1]) для любых $\alpha \in \mathbf{ORD}$, α_+-последовательности $\phi \overset{\text{def}}{=} (f_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ и $\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)$ однозначно определено отображение $\phi^\beta \in X^X$. В частности, при $\beta = \alpha$ определено отображение ϕ^α — композиция всех отображений из α_+-последовательности ϕ в заданном порядке.

В качестве частного случая предложенной конструкции для любых ординала α и сужающего отображения $f \in X^X$ определена α-итерация $f^\alpha \in X^X$ отображения f: для $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{f\}$ и единственной α_+-последовательности $\psi \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ положим $f^\alpha \overset{\text{def}}{=} \psi_\alpha$.

Л е м м а 2.1. *Пусть $(X,\leqslant)$ — непустое строго индуктивное ЧУМ, $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$ — непустое множество сужающих отображений. Тогда для любых $\alpha \in \mathbf{ORD}$ и $\phi \overset{\text{def}}{=} (f_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ выполняются неравенства $\phi^\alpha(x) \leqslant \phi^\beta(x)$ $\forall x \in X$ $\forall \beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)$, в частности, ϕ^α — сужающее на $(X,\leqslant)$ отображение.*

Л е м м а 2.2. *Пусть $(X,\leqslant)$ — непустое строго индуктивное ЧУМ, $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$ — непустое множество сужающих изотонных отображений, $\alpha \in \mathbf{ORD}$ и $\phi \overset{\text{def}}{=} (f_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$. Тогда для всякого $\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)$ отображение ϕ^β также изотонное.*

Пусть $(X,\leqslant)$ — непустое строго индуктивное ЧУМ, $\alpha \in \mathbf{ORD}$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(X^X)$ — непустое множество сужающих в $(X,\leqslant)$ отображений. Через $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$ обозначим подмножество из $\mathcal{P}'(X^X)$ вида $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}] \overset{\text{def}}{=} \{\phi^\beta : \phi \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)},\ \beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)\}$ и для любого $x \in X$ положим $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}](x) \overset{\text{def}}{=} \{\psi(x) : \psi \in \mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]\}$.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть $(X,\leqslant)$ — непустое строго индуктивное ЧУМ, $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$ — непустое множество отображений, сужающих на $(X,\leqslant)$. Тогда*

(i) для любого $x \in X$ выполнено неравенство $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|\mathrm{X}|^+}[\mathbf{F}](x) \neq \varnothing$;

(ii) в частности, $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \neq \varnothing$.

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть $(X,\preccurlyeq)$ — непустое индуктивное ЧУМ, $f \in X^X$ — сужающее отображение на $(X,\preccurlyeq)$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$ выбрано из условия $|X|^+ \preccurlyeq \alpha$. Тогда $\mathbf{Fix}(f) = \{f^\alpha(x)\colon x \in X\}$.*

§ 3. Исчисление размыкающих отображений

§ 3.1. Структура порядка, сужение, логические операции

На множестве $\mathcal{P}(X)^X$ введем частичный порядок $\preccurlyeq$, полагая $(g \preccurlyeq f) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (g(x) \subset f(x)\ \forall x \in X)$, $\forall f, g \in \mathcal{P}(X)^X$. Иными словами, $(g \preccurlyeq f) \Leftrightarrow (\mathbb{G}(g) \subset \mathbb{G}(f))$ для всех $f, g \in \mathcal{P}(X)^X$. Заметим, что для любых $f, g \in \mathcal{P}(X)^X$ выполняется $f^{-1}, g^{-1} \in \mathcal{P}(X)^X$, и, в силу очевидных соотношений $(\mathbb{G}(g) \subset \mathbb{G}(f)) \Leftrightarrow (\mathbb{G}(g^{-1}) \subset \mathbb{G}(f^{-1}))$, имеем

$$(g \preccurlyeq f) \Leftrightarrow (g^{-1} \preccurlyeq f^{-1}). \tag{3.1}$$

Легко проверить, что ЧУМ $(\mathcal{P}(X)^X, \preccurlyeq)$ — полная решетка. Для любого $P \in \mathfrak{PR}(X)$ обозначим через $\top_P$ и $\bot_P$ м/ф из $\mathcal{P}(X)^X$ вида

$$\top_P(x) = \begin{cases} X, & P(x), \\ X \setminus \{x\}, & \neg P(x), \end{cases} \qquad \bot_P(x) = \begin{cases} \{x\}, & P(x), \\ \varnothing, & \neg P(x), \end{cases} \qquad \forall x \in X.$$

Для предикатов $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{F}$, в частности, имеем $\top_{\mathfrak{T}}(x) = X$, $\bot_{\mathfrak{T}}(x) = \{x\}$, $\top_{\mathfrak{F}}(x) = X \setminus \{x\}$, $\bot_{\mathfrak{F}}(x) = \varnothing$ $\forall x \in X$. При этом в силу равенств $\mathbb{G}(\top_P) = X \times X \setminus \{(x,x) \in X \mid \neg P(x)\}$, $\mathbb{G}(\bot_P) = \{(x,x) \in \in X \mid P(x)\}$ имеем соотношения

$$\top_P = (\top_P)^{-1}, \qquad \bot_P = (\bot_P)^{-1}. \tag{3.2}$$

Л е м м а 3.1. *Для любого $P \in \mathfrak{PR}(P)$ справедливы соотношения*

$$\top_P, \bot_P \in \mathfrak{UM}(P), \tag{3.3}$$

$$\top_P = \top_{\mathfrak{UM}(P)}, \qquad \bot_P = \bot_{\mathfrak{UM}(P)}. \tag{3.4}$$

То есть, ЧУМ $(\mathfrak{UM}(P), \preccurlyeq)$ образует «отрезок» в $(\mathcal{P}(X)^X, \preccurlyeq)$, а значит — полную подрешетку:

$$\mathfrak{UM}(P) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \bot_P \preccurlyeq f \preccurlyeq \top_P\}. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включения (3.3) следуют из определений. Соотношения (3.4) проверяются от противного. Покажем, что для любого $f \in \mathcal{P}(X)^X$ верны импликации

$$(f \preccurlyeq \top_P) \Rightarrow (\mathbf{Fix}(f) \subset P^{-1}(1)), \qquad (\bot_P \preccurlyeq f) \Rightarrow (P^{-1}(1) \subset \mathbf{Fix}(f)).$$

Пусть f таково, что $f \preccurlyeq \top_P$. Тогда для произвольного $x \in X$ с учетом (3.3) имеем импликации

$$(x \in f(x)) \Rightarrow (x \in \top_P(x)) \Rightarrow P(x).$$

Таким образом,

$$\mathbf{Fix}(f) \subset P^{-1}(1). \tag{3.6}$$

Напротив, если $\bot_P \preccurlyeq f$, то для любого $x \in X$ в силу (3.3) выполняется

$$P(x) \Rightarrow (x \in \bot_P(x)) \Rightarrow (x \in f(x)).$$

Следовательно,

$$P^{-1}(1) \subset \mathbf{Fix}(f). \tag{3.7}$$

Совокупность вложений (3.6), (3.7) дает включение $f \in \mathfrak{UM}(P)$. Так как f было выбрано произвольно, имеем вложение $\mathfrak{UM}(P) \supset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \bot_P \preccurlyeq f \preccurlyeq \top_P\}$. Обратное вложение выполняется в силу определений наибольшего и наименьшего элементов и равенств (3.4). Этим завершается доказательство.

Из (3.1), (3.2) и (3.5) сразу следует эквиваленция $(f \in \mathfrak{UM}(P)) \Leftrightarrow (f^{-1} \in \mathfrak{UM}(P))$. Отметим еще одну форму размыкающего отображения, следующую из (3.5): $F_P(x) = P^{-1}(1)$ $x \in X$.

Приведем конструкцию размыкающего отображения для сужения предиката на подмножество области определения. Для любых $\phi \in \mathcal{P}(X)^X$ и $Y \in \mathcal{P}'(X)$ обозначим через $[\phi \,|\, Y]$ отображение из $\mathcal{P}(Y)^Y$ вида

$$[\phi \,|\, Y](y) \overset{\text{def}}{=} Y \cap \phi(y) \qquad \forall y \in Y.$$

Напомним, что при этом для всякого $P \in \mathfrak{PR}(X)$ отображение $(P \,|\, Y) \in \mathfrak{PR}(Y) \overset{\text{def}}{=} \{0,1\}^Y$ определено равенствами $(P \,|\, Y)(y) \overset{\text{def}}{=} P(y)$ $y \in Y$.

Л е м м а 3.2. *Для любых $P \in \mathfrak{PR}(X)$, $Y \in \mathcal{P}'(X)$ выполняется равенство*

$$\mathfrak{UM}((P \,|\, Y)) = \{[\phi \,|\, Y] : \phi \in \mathfrak{UM}(P)\}. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $P \in \mathfrak{PR}(X)$ и $Y \in \mathcal{P}'(X)$. Тогда для любых $y \in Y$ и $\phi \in \mathfrak{UM}(P)$

$$(y \in \mathbf{Fix}([\phi\,|\,Y])) \Leftrightarrow (y \in [\phi\,|\,Y](y)) \Leftrightarrow (y \in \phi(y)) \Leftrightarrow (y \in \mathbf{Fix}(\phi)) \Leftrightarrow P(y) \Leftrightarrow (P\,|\,Y)(y).$$

Вторая и пятая эквиваленции следуют из предположения $y \in Y$ и определения сужения функции. Так как y выбиралось произвольно, имеем включение $[\phi\,|\,Y] \in \mathfrak{UM}((P\,|\,Y))$. В силу произвольного выбора ϕ выполнено вложение

$$\{[\phi\,|\,Y] : \phi \in \mathfrak{UM}(P)\} \subset \mathfrak{UM}((P\,|\,Y)). \tag{3.9}$$

Для обоснования обратного вложения фиксируем произвольное отображение $\phi_Y \in \mathfrak{UM}((P\,|\,Y))$ и обозначим через ϕ_X отображение из $\mathcal{P}(X)^X$ вида

$$\phi_X(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi_Y(z), & z \in Y, \\ P^{-1}(1), & z \notin Y. \end{cases}$$

Проверяется, что $\phi_Y = [\phi_X\,|\,Y]$. Представив множество истинности $P^{-1}(1)$ предиката P в виде суммы $(P^{-1}(1) \cap Y) \cup (P^{-1}(1) \setminus Y)$, получим, что $\mathbf{Fix}(\phi_X) = P^{-1}(1)$. То есть $\phi_X \in \mathfrak{UM}(P)$. Таким образом, выполнено вложение, обратное (3.9). Доказательство закончено.

Далее приводится построение размыкающих отображений для выражений логики высказываний на основе размыкающих отображений входящих в них предикатов.

Л е м м а 3.3. *Пусть $P, Q \in \mathfrak{PR}(X)$. Тогда выполняются равенства*

$$\mathfrak{UM}(\neg P) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P) : f(x) = X \setminus g(x)\ \forall x \in X\}, \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{UM}(P\&Q) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}, \tag{3.11}$$

$$\mathfrak{UM}(P \vee Q) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cup q(x)\ \forall x \in X\}. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, равенство (3.11). Фиксируем $P, Q \in \mathfrak{PR}(X)$ и $\phi \in \mathfrak{UM}(P\&Q)$. Тогда для любого $x \in X$

$$(x \in \phi(x)) \Leftrightarrow (x \in P^{-1}(1) \cap Q^{-1}(1)). \tag{3.13}$$

Положим

$$\phi_P(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi(z) \cup \{z\}, & z \in P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1), \\ \phi(z), & z \notin P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1), \end{cases} \quad \phi_Q(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi(z) \cup \{z\}, & z \in Q^{-1}(1) \setminus P^{-1}(1), \\ \phi(z), & z \notin Q^{-1}(1) \setminus P^{-1}(1). \end{cases}$$

Так как $X \setminus (P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1)) = (P^{-1}(1) \cap Q^{-1}(1)) \cup (X \setminus P^{-1}(1))$ в силу выбора ϕ (см. (3.13)) имеем $(x \in \phi_P(x)) \Leftrightarrow P(x)$. Следовательно, $\phi_P \in \mathfrak{UM}(P)$. Аналогично получаем включение $\phi_Q \in \mathfrak{UM}(Q)$. Легко проверяется, что $\phi(x) = \phi_P(x) \cap \phi_Q(x)\ \forall x \in X$. Так как ϕ было выбрано произвольно, имеем вложение

$$\mathfrak{UM}(P\&Q) \subset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть $g \in \mathfrak{UM}(P)$ и $q \in \mathfrak{UM}(Q)$ и $f \in \mathcal{P}(X)^X$ таково, что $f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$(x \in \mathbf{Fix}(f)) \Leftrightarrow (x \in f(x)) \Leftrightarrow (x \in g(x) \cap q(x)) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{Fix}(g) \cap \mathbf{Fix}(q)) \Leftrightarrow (P(x)\&Q(x)).$$

То есть $f \in \mathfrak{UM}(P\&Q)$. Так как g и q выбирались произвольно, имеем искомое вложение:

$$\mathfrak{UM}(P\&Q) \supset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}.$$

Таким образом, выполнено (3.11). Соотношения (3.10) и (3.12) доказываются аналогично. Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 2. На основе указанных соотношений понятным образом строятся размыкающие отображения для других выражений логики высказываний.

С л е д с т в и е 3.1. *Для любых* $P \in \mathfrak{PR}(X)$, $f \in \mathfrak{UM}(P)$, $T \in \mathfrak{UM}(\mathfrak{T})$ *и* $F \in \mathfrak{UM}(\mathfrak{F})$ *отображения* $f_T, f_F \in \mathcal{P}(X)^X$ *вида*

$$f_T(x) \overset{def}{=} T(x) \cap f(x), \qquad f_F(x) \overset{def}{=} F(x) \cup f(x) \qquad \forall x \in X \tag{3.14}$$

суть размыкающие отображения для P:

$$f_T, f_F \in \mathfrak{UM}(P). \tag{3.15}$$

Доказательство опирается на лемму 3.3 и равенства $P = P \& \mathfrak{T} = P \vee \mathfrak{F}$, выполненные для всех $P \in \mathfrak{PR}(X)$.

В случае, когда X — ЧУМ, можно переходить от размыкающей м/ф к размыкающей функции, обладающей при этом свойством сужаемости. Такой переход позволяет использовать теоремы о представлении множества неподвижных точек, наибольших и наименьших неподвижных точках. Для произвольного ЧУМ $(Z, <)$ определим отображение $\mathbf{LE}_Z \in \mathcal{P}(Z)^Z$ как

$$\mathbf{LE}_Z(z) \overset{\text{def}}{=} \{y \in Z \mid y < z\}, \qquad z \in Z. \tag{3.16}$$

Л е м м а 3.4. *Пусть* $(X, \preccurlyeq)$ — *непустое ЧУМ,* $P \in \mathfrak{PR}(X)$, $f \in \mathfrak{UM}(P)$. *Пусть для м/ф* $G \in \mathcal{P}(X)^X$ *вида* $G(x) \overset{def}{=} \mathbf{LE}_X(x) \cap f(x)$ $x \in X$ *выполняется равенство* $\mathbf{dom}(G) = X$ *и функция* $g \in X^Y$ *определяется как*

$$g(x) \overset{def}{=} \begin{cases} \top_{G(x)}, & \exists \top_{G(x)} \\ y \in G(x), & \neg\exists \top_{G(x)}, \end{cases} \qquad \forall x \in X. \tag{3.17}$$

Тогда g — *сужающее отображение на* $(X, \preccurlyeq)$ *и* $g \in \mathfrak{UM}(P)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (легко проверяемого) включения $\mathbf{LE}_X \in \mathfrak{UM}(\mathfrak{T})$, соотношений (3.14) и (3.15) следует, что $G \in \mathfrak{UM}(P)$. Кроме того, по построению (см. (3.16)) выполнены неравенства

$$y \leqslant x \qquad \forall y \in G(x), \qquad \forall x \in X. \tag{3.18}$$

С учетом определений (3.17) имеем

$$g(x) \in G(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) получаем неравенства $g(x) \leqslant x$ $\forall x \in X$. То есть g — сужающее отображение на $(X, \preccurlyeq)$.

Из включения (3.19) следует, что $\mathbf{Fix}(g) \subset \mathbf{Fix}(G)$. Покажем обратное вложение. Пусть $\bar{x} \in G(\bar{x})$. Тогда из (3.18) следуют неравенства $y \leqslant \bar{x}$ $\forall y \in G(\bar{x})$. Это означает, что $\bar{x} = \top_{G(\bar{x})}$. Следовательно (см. (3.17)), $g(\bar{x}) = \bar{x}$. То есть $\bar{x} \in \mathbf{Fix}(g)$. В силу произвольного выбора $\bar{x}$ имеем вложение $\mathbf{Fix}(G) \subset \mathbf{Fix}(g)$. Итак, $\mathbf{Fix}(g) = \mathbf{Fix}(G)$. С учетом $G \in \mathfrak{UM}(P)$ получим равенство $\mathbf{Fix}(g) = P^{-1}(1)$. Доказательство закончено. □

§ 3.2. Размыкание предиката на прямом произведении

Пусть имеются непустые множества $\mathcal{I}$, $(X_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ и

$$X \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} X_\iota. \tag{3.20}$$

Обозначим через x_ι ι–ую компоненту элемента $x \in X$: $x_\iota \overset{\text{def}}{=} (x \,|\, \{\iota\}) \in X_\iota$. Обозначим через $(y, x_{-\iota})$ элемент из X, который получается подстановкой элемента $y \in X_\iota$ вместо ι-й компоненты элемента $x \in X$:

$$(y, x_{-\iota})_\jmath \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y, & \jmath = \iota, \\ x_\jmath, & \jmath \in \mathcal{I} \setminus \{\iota\}, \end{cases} \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in X_\iota \quad \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{3.21}$$

З а м е ч а н и е 3. В случае когда индексное множество $\mathcal{I}$ состоит из одного элемента, определение (3.21) дает тождество

$$(y, x_{-\iota}) = y \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in X_\iota \quad \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{3.22}$$

Пусть $P \in \mathfrak{PR}(X)$. Зададим отображения $\mathcal{B}_\iota \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$, $\mathcal{C}_\iota \in \mathcal{P}(X)^X$ вида

$$\mathcal{B}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P((y, x_{-\iota}))\} \qquad \forall x \in X \ \forall \iota \in \mathcal{I}, \tag{3.23}$$

$$\mathcal{C}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)\} \qquad \forall x \in X \quad \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{3.24}$$

З а м е ч а н и е 4. Сразу отметим следующий из определений вид этих отображений в случае, когда $\mathcal{I}$ — синглетон (см. (3.22)): $\mathcal{B}_\iota(x) = \mathcal{C}_\iota(x) = \{y \in X \mid P(y)\}$ $\forall x \in X$ $\forall \iota \in \mathcal{I}$.

Л е м м а 3.5. *Для любого $\iota \in \mathcal{I}$ выполняется включение $\mathcal{C}_\iota \in \mathfrak{UM}(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\iota \in \mathcal{I}$. Пусть $x \in X$ такой, что $x \in \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. Тогда по определению имеем $x \in \mathcal{C}_\iota(x)$. Воспользуемся представлением (см. (3.21)) $x = (x_\iota, x_{-\iota})$. Из (3.24) получим $x_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)$. Значит (см. (3.23)), $P((x_\iota, x_{-\iota}))$. Еще раз пользуясь равенством $x = (x_\iota, x_{-\iota})$, получим $P(x)$. И следовательно, x лежит в $P^{-1}(1)$. Так как x был выбран произвольно, получаем вложение

$$\mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota) \subset \{x \in X \mid P(x)\}. \tag{3.25}$$

Проверим обратное вложение. Пусть $x \in X$ такой, что $P(x)$. Тогда $P((x_\iota, x_{-\iota}))$. Значит, $x_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)$. Откуда следует $x \in \mathcal{C}_\iota(x)$, то есть $x \in \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. Так как x был выбран произвольно, получаем вложение $\{x \in X \mid P(x)\} \subset \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. С учетом (3.25) получим $\mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota) = \{x \in X \mid P(x)\}$. Так как индекс ι был выбран произвольно, получаем первое включение. Доказательство закончено. □

§ 3.3. Размыкание конъюнкции предикатов на прямом произведении

Часто условия (предикаты) на множестве отображений формулируются как поточечные условия: для каждого аргумента требуется выполнение того или иного условия на значение отображения в данной точке. Такие высказывания естественно рассматривать как конъюнкции предикатов (проиндексированных множеством определения) на произведении областей значений этих отображений при соответствующих аргументах. Далее приводится построение размыкающего отображения для произвольной конъюнкции предикатов над произвольным произведением множеств.

Пусть для непустого множества индексов $\mathcal{J}$ задано семейство $P_\jmath \in \mathfrak{PR}(X)$, $\jmath \in \mathcal{J}$, предикатов на прямом произведении X (см. (3.20)). Пусть предикат $P \in \mathfrak{PR}(X)$ имеет вид

$$P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (P_\jmath(x) \ \forall \jmath \in \mathcal{J}), \qquad x \in X. \tag{3.26}$$

У с л о в и е 3.1. Мощность множества (предикатов) $\mathcal{J}$ не превосходит мощности множества $\mathcal{I}$ (сомножителей в X).

Пусть выполняется условие 3.1 и $q \in \mathcal{I}^{\mathcal{J}}$ — некоторая инъекция из $\mathcal{J}$ в $\mathcal{I}$. Зададим отображения $\mathcal{B}_{\iota\jmath} \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$ вида

$$\mathcal{B}_{\iota\jmath}(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P_\jmath((y, x_{-\iota}))\} \qquad \forall x \in X \quad \forall \iota \in \mathcal{I} \quad \forall \jmath \in \mathcal{J} \tag{3.27}$$

и отображения $\mathcal{B}_\jmath \in \mathcal{P}(X_\jmath)^X$ вида

$$\mathcal{B}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathcal{B}_{\iota q^{-1}(\iota)}(x)((y, x_{-\iota}))\}, & \iota \in q(\mathcal{J}), \\ X_\iota, & \iota \notin q(\mathcal{J}), \end{cases} \qquad \forall x \in X \quad \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{3.28}$$

Зададим м/ф $\mathcal{F}_P \in \mathcal{P}(X)^X$ следующим образом:

$$\mathcal{F}_P(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3.29}$$

Л е м м а 3.6. *Справедливо равенство* $\mathcal{F}_P \in \mathfrak{UM}(P)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основе отображений $\mathcal{B}_{\iota\jmath}$, $\mathcal{B}_\iota$ построим отображения $\mathcal{C}_{\iota\jmath}$, $\mathcal{C}_\iota \in \in \mathcal{P}(X)^X$, полагая

$$\mathcal{C}_{\iota\jmath}(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_{\iota\jmath}(x)\}, \quad \mathcal{C}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)\} \qquad \forall x \in X \quad \forall \iota \in \mathcal{I} \quad \forall \jmath \in \mathcal{J}. \tag{3.30}$$

Из леммы 3.5 следует, что для любых $\iota \in \mathcal{I}$, $\jmath \in \mathcal{J}$ верно включение $\mathcal{C}_{\iota\jmath} \in \mathfrak{UM}(P_\jmath)$. Тогда с учетом равенств $\mathcal{C}_\iota(x) = X$, $\iota \notin q(\mathcal{J})$ (см. (3.28), (3.30)), имеем

$$\bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) = \bigcap_{\iota\in q(\mathcal{J})} \mathcal{C}_{\iota q^{-1}(\iota)}(x) = \bigcap_{\jmath\in\mathcal{J}} \mathcal{C}_{q(\jmath)\jmath}(x) \qquad \forall x \in X.$$

Из (3.11) следует, что для отображения $G(x) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\jmath\in\mathcal{J}} \mathcal{C}_{q(\jmath)\jmath}(x)$ $\forall x \in X$ выполняется включение $G \in \mathfrak{UM}(P)$. Для завершения доказательства теперь достаточно проверить равенство

$$\bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) = \prod_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3.31}$$

С учетом определения $\mathcal{C}_\iota$ для любых $\jmath \in \mathcal{I}$ и $z \in X$ имеем равенство $\big(\bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(z) \,|\, \{\jmath\}\big) = \mathcal{B}_\jmath(z)$. Следовательно, для любого $y \in X$ верно

$$(y \in \bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x)) \Leftrightarrow (y_\jmath \in \big(\bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) \,|\, \{\jmath\}\big) \ \forall \jmath \in \mathcal{I}) \Leftrightarrow (y_\jmath \in \mathcal{B}_\jmath(x) \ \forall \jmath \in \mathcal{I}) \Leftrightarrow (y \in \prod_{\iota\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x)).$$

Доказательство закончено. □

П р и м е р 3.1. Выполним размыкание предиката P_s — «быть седловой точкой». Пусть $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — непустые множества и на произведении $X \overset{\text{def}}{=} \mathbf{U}\times\mathbf{V}$ задана функция исходов $\varphi\colon \mathbf{U}\times\mathbf{V} \mapsto \mathbb{R}$. Игрок, выбирающий $u \in \mathbf{U}$, минимизирует, а игрок, выбирающий $v \in \mathbf{V}$, максимизирует исход. Элемент $x_* = (u_*, v_*) \in X$ называется седловой точкой, если выполнено условие (предикат P_s)

$$P_s(x_*) \Leftrightarrow (\varphi(u_*, v) \leqslant \varphi(u_*, v_*) \leqslant \varphi(u, v_*) \quad \forall (u, v) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V}). \tag{3.32}$$

Из (3.32) следует, что P_s есть конъюнкция двух предикатов:

$$P_{\mathbf{U}}(x_*) \Leftrightarrow (\varphi(u_*, v_*) \leqslant \varphi(u, v_*) \ \forall u \in \mathbf{U}), \quad P_{\mathbf{V}}(x_*) \Leftrightarrow (\varphi(u_*, v) \leqslant \varphi(u_*, v_*) \ \forall v \in \mathbf{V}).$$

Так как сомножителей в произведении два и предиката два, то выполняется условие 3.1 и имеется две возможности установить соответствие q: $(P_{\mathbf{U}}, P_{\mathbf{V}}) \mapsto (\mathbf{U}, \mathbf{V})$ и $(P_{\mathbf{U}}, P_{\mathbf{V}}) \mapsto (\mathbf{V}, \mathbf{U})$. Определения предикатов $P_{\mathbf{U}}$, $P_{\mathbf{V}}$ указывают на первый вариант, как более простой. Используя выбранный вариант инъекции q, построим в соответствии с (3.27) (3.28) м/ф $\mathcal{B}_{\mathbf{U}} \in \mathcal{P}(\mathbf{U})^X$, $\mathcal{B}_{\mathbf{V}} \in \mathcal{P}(\mathbf{V})^X$:

$$\mathcal{B}_{\mathbf{U}}(x_*) \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbf{U}} \varphi(u, v_*), \qquad \mathcal{B}_{\mathbf{V}}(x_*) \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbf{V}} \varphi(u_*, v).$$

Здесь значением операции argmin (argmax) является пустое множество, если минимизирующие (максимизирующие) элементы отсутствуют. Из отображений $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$, $\mathcal{B}_{\mathbf{V}}$ согласно (3.29) строим отображение $\mathcal{F}_{P_s} \in \mathcal{P}(X)^X$:

$$\mathcal{F}_{P_s}(u, v) \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{argmin}_{u'\in\mathbf{U}} \varphi(u', v) \times \operatorname*{argmax}_{v'\in\mathbf{V}} \varphi(u, v'), \qquad (u, v) \in X.$$

Итак, в силу леммы 3.6 имеем равенство $\mathcal{F}_{P_s} \in \mathfrak{UM}(P_s)$.

§ 4. Равновесия Нэша для произвольного множества игроков

§ 4.1. Формулировка задачи и определение размыкающей м/ф

Обратимся к задаче поиска равновесий Нэша. Пусть (X, J) — игра с $\mathcal{I}$ игроками в нормальной форме, а именно:

$$X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{\iota \in I} X_\iota, \qquad J \stackrel{\mathrm{def}}{=} (J_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}},$$

где X — множество состояний игры, X_ι — множество стратегий ι-го игрока, а J_ι — функция выигрыша ι-го игрока: $J_\iota : X \mapsto \mathbb{R}$, $\iota \in \mathcal{I}$. Обозначим через $P_N \in \mathfrak{PR}(X)$ предикат «быть равновесием Нэша» в игре (X, J):

$$P_N(x) \Leftrightarrow (J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(x)\ \forall z \in X_\iota\ \forall \iota \in \mathcal{I}) \qquad \forall x \in X.$$

Понятно, что предикат P_N представлен конъюнкцией предикатов $P_\jmath \in \mathfrak{PR}(X)$, $\jmath \in \mathcal{I}$, вида

$$P_\jmath(x) \Leftrightarrow (J_\jmath(z, x_{-\jmath}) \leqslant J_\jmath(x)\ \forall z \in X_\jmath) \qquad \forall x \in X.$$

В силу формулировки задачи количество предикатов совпадает с количеством сомножителей в произведении X, то есть выполнено условие 3.1. Положим $q(\iota) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$, $\iota \in \mathcal{I}$, и, используя выбранный вариант инъекции q, построим в соответствии с (3.27) (3.28) м/ф $\mathcal{B}_\iota \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\iota(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P_\iota((y, x_{-\iota}))\} = \\ = \{y \in X_\iota \mid J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(y, x_{-\iota}),\ \forall z \in X_\iota\} = \\ = \{y \in X_\iota \mid \sup_{z \in X_\iota} J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(y, x_{-\iota})\} = \operatorname*{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota}).\end{aligned}$$

Тогда в силу (3.29) для отображения $\mathcal{F}_{P_N} \in \mathcal{P}(X)^X$ имеем

$$\mathcal{F}_{P_N}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) = \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \operatorname*{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota}) \qquad \forall x \in X. \tag{4.1}$$

Отображение $\mathcal{F}_{P_N}$ по построению удовлетворяет условиям леммы 3.6 и, следовательно, является размыкающим для предиката P_N: $\mathcal{F}_{P_N} \in \mathfrak{UM}(P_N)$. Воспользуемся этим фактом для описания множества равновесий Нэша в случае, когда множества X_ι суть компакты.

§ 4.2. Использование размыкающей м/ф для предиката Нэша

Пусть множество стратегий X_ι ι-го игрока — топологическое пространство. Тогда полагаем, что произведение X состояний игры наделено топологией тихоновского произведения [12]. Воспользуемся равенством (4.1) и теоремой 2.1 для описания множества равновесий Нэша.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть X_ι, $\iota \in \mathcal{I}$, — компактные хаусдорфовы пространства, для любого $\iota \in \mathcal{I}$ функция J_ι полунепрерывна сверху на X, функция $J_\iota(z, \cdot)$ полунепрерывна снизу на $X_{-\iota}$ при любом $z \in X_\iota$. При этих условиях для множества $P_N^{-1}(1)$ равновесий Нэша выполняются равенства*

$$P_N^{-1}(1) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fo}}(X)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{\mathcal{F}}_{P_N}(O_\kappa) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{\mathcal{F}}_{P_N}(O_\kappa).$$

В частности, равновесие Нэша достигается тогда и только тогда, когда в произвольном покрытии $(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X)$ найдется множество $O_{\bar\kappa} \in (O_\kappa)_K$, содержащее два последовательных приближения Курно:

$$\forall (O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X)\ \exists \bar\kappa \in K\ \exists x, x' \in O_{\bar\kappa}, \qquad x' \in \mathcal{F}_{P_N}(x). \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 5. В случае когда топология пространства X метризуема, условие (4.2) принимает вид (2.3): $\forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in X\ \mathbf{d}(x_\delta, \mathcal{F}_{P_N}(x_\delta)) \leqslant \delta$. Здесь $\mathbf{d}(x_\delta, \mathcal{F}_{P_N}(x_\delta))$ обозначает расстояние в X от точки x_δ до множества $\mathcal{F}_{P_N}(x_\delta)$.

Отметим также, что в теоремах [11, Theorem 4, 5] неверно сформулированы условия на функции φ и J_i: при таких условиях приведенные доказательства некорректны. Правильные условия сформулированы выше, в теореме 4.1; для функции φ эти условия эквивалентны требованию непрерывности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.6 имеем равенство $P_N^{-1}(1) = \mathbf{Fix}(\mathcal{F}_{P_N})$.

Для обоснования утверждений теоремы 4.1 остается проверить применимость равенств (2.1) к отображению $\mathcal{F}_{P_N}$, то есть выполнение условий теоремы 2.1. Компактность и хаусдорфовость пространства X следует из компактности и хаусдорфовости порождающих его пространств X_ι и из свойств топологии тихоновского произведения [12, теоремы 2.3.11, 3.2.4].

Проверим замкнутость графика отображения $\mathcal{F}_{P_N}$. Отметим, что для любых $x \in X$ и $\iota \in \mathcal{I}$ в силу полунепрерывности сверху J_ι и компактности X_ι множество $\operatorname{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota})$ определено и непусто. Значит, для любого $x \in X$ определено и непусто множество $\mathcal{F}_{P_N}(x)$. График $\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N})$ отображения $\mathcal{F}_{P_N}$ представляется пересечением графиков $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ отображений $\mathcal{C}_\iota$ (см. (3.24), (3.31)):

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N}) = \bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota).$$

Следовательно, в силу аксиом семейства замкнутых множеств замкнутость множеств $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ влечет замкнутость $\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N})$. С другой стороны, для любого $\iota \in \mathcal{I}$ график $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota) = \{(z,w) \in X^2 \mid w \in \mathcal{C}_\iota(z)\} = \{(z,w) \in X^2 \mid w_\iota \in \mathcal{B}_\iota(z)\} = \\
&= \{(z,w) \in X^2 \mid w_\iota \in \operatorname*{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota((y, z_{-\iota}))\} = \{(z,w) \in X^2 \mid J_\iota((w_\iota, z_{-\iota})) \geqslant \max_{y \in X_\iota} J_\iota((y, z_{-\iota}))\} = \\
&\qquad = \{((z_\iota, x_{-\iota}), (x_\iota, z_{-\iota})) : (z \in X) \& (J_\iota((x_\iota, x_{-\iota})) \geqslant \max_{y \in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota})))\}.
\end{aligned}$$

Исходя из полунепрерывности снизу на $X_{-\iota}$ функции $J_\iota(y, \cdot)$ при каждом $y \in X_\iota$ проверяется (см. [13, предложение 1.5]), что функция $x \mapsto \max_{y \in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota}))$ полунепрерывна снизу на X. Тогда с учетом полунепрерывности сверху на X функции J_ι получаем, что множество $H \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid J_\iota((x_\iota, x_{-\iota})) \geqslant \max_{y \in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota}))\}$ замкнуто в X. Следовательно, $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ гомеоморфно (см. [12, предложение 2.3.8]) прямому произведению замкнутых множеств H и X. Значит, множество $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ замкнуто. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

§ 5. Задача о неупреждающем селекторе м/ф

В работах [6, 7, 14, 15] множества неупреждающих селекторов заданной м/ф представлены в виде неподвижных точек специального отображения (обозначенного как Γ). То есть в этих работах выполнено размыкание предиката «быть неупреждающим сектором».

Вместе с тем процесс нахождения размыкающего отображения остался за рамками рассмотрения. В этом пункте, на основе конструкций из указанных работ и следуя схеме (3.26)–(3.29), мы реализуем «рутинное» построение этого размыкающего отображения и с его помощью дадим описание множества неупреждающих селекторов заданной м/ф при ослабленных условиях.

§ 5.1. Неупреждаемость, селектор

1. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество I и непустое множество X. Полагаем $D \overset{\text{def}}{=} I \times X$. Выберем множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$, элементы которого будут рассматриваться в качестве реализаций управления. Фиксируем непустые множества Y и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$. Элементы $\omega \in \Omega$ будем использовать в качестве реализаций неопределенных факторов. Введем множество $\mathbf{M} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\mathbf{C})^\Omega$ всех м/ф на Ω со значениями в $\mathbf{C}$: $\alpha(\omega) \subset \mathbf{C}$ при $\omega \in \Omega$, $\alpha \in \mathbf{M}$.

2. Введем на $\mathbf{M}$ частичный порядок $\sqsubseteq$, полагая $(\phi \sqsubseteq \psi) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\phi(\omega) \subset \psi(\omega)\ \forall \omega \in \Omega)\ \forall \phi, \psi \in \mathbf{M}$.

Проверим, что ЧУМ $(\mathbf{M}, \sqsubseteq)$ образует полную решетку. В самом деле, пусть $\Phi \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, то есть $\phi(\omega) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ для всех $\phi \in \Phi$ и $\omega \in \Omega$. Обозначим $\Phi^*(\omega) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\phi \in \Phi} \phi(\omega)$, $\Phi_*(\omega) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\phi \in \Phi} \phi(\omega)$,

$\omega \in \Omega$. Тогда при любом $\omega \in \Omega$ выполнены включения $\Phi^*(\omega) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$, $\Phi_*(\omega) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$. Значит, отображения $\omega \mapsto \Phi^*(\omega)$ и $\omega \mapsto \Phi_*(\omega)$ принадлежат $\mathbf{M}$. С другой стороны, легко проверить, что $\Phi_* \sqsubseteq \phi \sqsubseteq \Phi^*\ \forall \phi \in \Phi$. То есть $\Phi_* = \bot_\Phi$, $\Phi^* = \top_\Phi$. Так как Φ выбиралось произвольно, утверждение доказано.

Для любых $\phi, \psi \in \mathbf{M}$ назовем ϕ *селектором* ψ, если $\phi \sqsubseteq \psi$.

3. Выберем и зафиксируем произвольное непустое семейство $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(I)$. Назовем м/ф $\phi \in \mathbf{M}$ $\mathcal{X}$-неупреждающей, если выполняется условие

$$(\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big((\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A)\big) \qquad \forall A \in \mathcal{X} \quad \forall \omega,\ \omega' \in \Omega. \tag{5.1}$$

З а м е ч а н и е 6. Импликации (5.1) в силу эквиваленций

$$(\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Leftrightarrow (\omega \in \Omega(\omega' \,|\, A)) \Leftrightarrow ((\omega \,|\, A) = (\omega' \,|\, A)) \qquad \forall A \in \mathcal{X} \quad \forall \omega,\ \omega' \in \Omega.$$

и соображений симметрии равносильны импликациям

$$((\omega \,|\, A) = (\omega' \,|\, A)) \Rightarrow \big((\phi(\omega) \,|\, A\big) = \big(\phi(\omega') \,|\, A)\big) \qquad \forall A \in \mathcal{X} \quad \forall \omega,\ \omega' \in \Omega,$$

обычно принимаемым в качестве определения неупреждаемости ϕ.

4. Многие задачи сводятся к построению наибольшего $\mathcal{X}$-неупреждающего селектора некоторой заданной м/ф $\psi \in \mathbf{M}$, то есть к построению $\mathcal{X}$-неупреждающей м/ф $\phi \in \mathbf{M}$, для которой выполняется неравенство $\phi \sqsubseteq \psi$, и при всякой $\mathcal{X}$-неупреждающей $\beta \in \mathbf{M}$ такой, что $\beta \sqsubseteq \psi$, выполняется неравенство $\beta \sqsubseteq \phi$.

Зафиксируем для дальнейшего изложения некоторое многозначное отображение $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$, для которого и будем решать указанную задачу поиска наибольшего $\mathcal{X}$-неупреждающего селектора. С этой целью введем следующие обозначения: для произвольных $A \in \mathcal{X}$, $\Psi \subset \Omega$, $\omega \in \Omega$, $H \subset \mathbf{C}$, $h \in \mathbf{C}$ и $\phi \in \mathbf{M}$ положим

$$\Psi(\omega \,|\, A) \overset{\text{def}}{=} \{\nu \in \Psi \mid (\nu \,|\, A) = (\omega \,|\, A)\}, \qquad H(h \,|\, A) \overset{\text{def}}{=} \{f \in H \mid (f \,|\, A) = (h \,|\, A)\}, \tag{5.2}$$

$$\Psi(-\omega \,|\, A) \overset{\text{def}}{=} \Psi(\omega \,|\, A) \setminus \{\omega\}, \tag{5.3}$$

$$[\phi](\omega \,|\, A) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in \Omega(\omega \,|\, A)} \big(\phi(\nu) \,|\, A\big), \tag{5.4}$$

$$[\phi](-\omega \,|\, A) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in \Omega(-\omega \,|\, A)} \big(\phi(\nu) \,|\, A\big). \tag{5.5}$$

А также в соответствии с (5.1) определим предикат $P_{na} \in \mathfrak{PR}(\mathbf{M})$ «быть $\mathcal{X}$-неупреждающим отображением»:

$$P_{na}(\phi) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big((\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big((\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A)\big)\ \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \omega, \omega' \in \Omega\Big), \quad \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.6}$$

§ 5.2. Размыкание предиката неупреждаемости

Представим $\mathbf{M}$ как прямое произведение Ω экземпляров множества $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Из определения (5.6) следует представление предиката P_{na} в форме конъюнкции предикатов P_ω вида

$$P_\omega(\phi) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big((\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big((\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A)\big)\ \forall A \in \mathcal{X}\Big), \quad \omega \in \Omega, \quad \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.7}$$

Как видно, индексное множество в конъюнкции предикатов, представляющей P_{na}, совпадает с индексным множеством в представлении $\mathbf{M}$; следовательно, выполнено условие 3.1. Положим $\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{J} \overset{\text{def}}{=} \Omega$ и определим $q(\omega) \overset{\text{def}}{=} \omega\ \forall \omega \in \Omega$. Тогда имеем

$$X_\iota \overset{\text{def}}{=} X_\omega \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\mathbf{C}), \qquad \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{M} \overset{\text{def}}{=} X \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} X_\iota \overset{\text{def}}{=} \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}(\mathbf{C}),$$

$$\mathcal{B}_\iota \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}_\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{C}))^{\mathbf{M}}, \qquad \mathcal{F}_{P_{na}}(\phi) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{B}_\omega(\phi) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{C})) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\mathbf{M})^{\mathbf{M}}.$$

Мы привели этот список «действующих лиц и исполнителей» для удобства отслеживания схемы (3.20)–(3.29). В дальнейших выкладках мы не будем переходить к обозначениям пункта 3 для сохранения более наглядной связи с содержательной стороной задачи.

Модернизируем определение (5.7), используя обозначения (5.4).

Л е м м а 5.1. *Справедливо утверждение*

$$P_\omega(\phi) \Leftrightarrow \big([\phi](\omega \,|\, A) = \big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \quad \forall A \in \mathcal{X}\big), \quad \omega \in \Omega, \quad \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $A \in \mathcal{X}$, $\omega \in \Omega$ и $\phi \in \mathbf{M}$. Легко видеть (достаточно в правой части (5.4) рассмотреть $\nu = \omega$), что всегда выполняются вложения

$$[\phi](\omega \,|\, A) \subset \big(\phi(\omega) \,|\, A\big). \tag{5.9}$$

Пусть для $h \in \mathbf{C}$ выполнено $(h \,|\, A) \in \big(\phi(\omega) \,|\, A\big)$ и пусть $P_\omega(\phi)$ (см. (5.7)), то есть применительно к выбранным A, ω и ϕ выполняются соотношения $(\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big(\big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A\big)\big)$. Тогда выполнены импликации $(\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big((h \,|\, A) \in \big(\phi(\omega') \,|\, A\big)\big)$, то есть

$$(h \,|\, A) \in \bigcap_{\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)} \big(\phi(\omega') \,|\, A\big) \overset{\text{def}}{=} [\phi](\omega \,|\, A).$$

В силу произвольного выбора h получаем включение $\big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset [\phi](\omega \,|\, A)$. С учетом (5.9) имеем равенство $[\phi](\omega \,|\, A) = \big(\phi(\omega) \,|\, A\big)$. Значит, справедлива импликация

$$\big((\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big(\big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A\big)\big)\big) \Rightarrow \big([\phi](\omega \,|\, A) = \big(\phi(\omega) \,|\, A\big)\big). \tag{5.10}$$

Пусть теперь выполняется следствие в (5.10). Тогда при $\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)$ в силу равенства $[\phi](\omega \,|\, A) = \big(\phi(\omega) \,|\, A\big)$ имеем (см. (5.4)) $\big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A\big)$. В силу произвольного выбора ω' выполняются импликации $(\omega' \in \Omega(\omega \,|\, A)) \Rightarrow \big(\big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \subset \big(\phi(\omega') \,|\, A\big)\big)$, то есть посылка из соотношений (5.10). Таким образом, в (5.10) посылка и следствие эквивалентны. Так как A, ω и ϕ выбирались произвольно, установлена эквиваленция (5.8). Доказательство завершено. □

Итак, интересующий нас предикат P_{na} имеет вид (см. (5.8))

$$P_{na}(\phi) \Leftrightarrow (P_\omega(\phi)\ \forall \omega \in \Omega) \Leftrightarrow \big([\phi](\omega \,|\, A) = \big(\phi(\omega) \,|\, A\big) \quad \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \omega \in \Omega\big) \qquad \forall \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.11}$$

Воспользуемся (3.28) для построения отображений $\mathcal{B}_\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{C}))^{\mathbf{M}}$ (в качестве q, как отмечалось, используем тождественное отображение):

$$\mathcal{B}_\omega(\phi) \overset{\text{def}}{=} \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid P_\omega((L, \phi_{-\omega}))\} \qquad \forall \omega \in \Omega \quad \forall \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.12}$$

Напомним (см. (3.21)), что для любых $L \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$, $\phi \in \mathbf{M}$ и $\omega \in \Omega$ м/ф $(L, \phi_{-\omega}) \in \mathbf{M}$ определена соотношениями

$$(L, \phi_{-\omega})(\nu) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} L, & \nu = \omega, \\ \phi(\nu), & \nu \in \Omega \setminus \{\omega\}. \end{cases} \tag{5.13}$$

Преобразуем (5.12), используя представление (5.8):

$$\mathcal{B}_\omega(\phi) = \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid [(L, \phi_{-\omega})](\omega \,|\, A) = \big((L, \phi_{-\omega})(\omega) \,|\, A\big) \quad \forall A \in \mathcal{X}\}.$$

С учетом (5.4) и (5.13) имеем (продолжаем равенства)

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid \bigcap_{\nu \in \Omega(\omega \,|\, A)} \big((L, \phi_{-\omega})(\nu) \,|\, A\big) = \big(L \,|\, A\big) \quad \forall A \in \mathcal{X}\}.$$

Заметим, что в пересечении (при $\nu = \omega$) встречается множество $\bigl(L \,|\, A\bigr)$, поэтому последнее выражение можно преобразовать следующим образом (см. (5.3), (5.5)):

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid \bigl(L \,|\, A\bigr) \subset \bigcap_{\substack{\nu \in \Omega(\omega \,|\, A) \\ \nu \neq \omega}} \bigl((L, \phi_{-\omega})(\nu) \,|\, A\bigr) \quad \forall A \in \mathcal{X}\} =$$

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid \bigl(L \,|\, A\bigr) \subset \bigcap_{\nu \in \Omega(-\omega \,|\, A)} \bigl(\phi(\nu) \,|\, A\bigr) \quad \forall A \in \mathcal{X}\} =$$

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid \bigl(L \,|\, A\bigr) \subset [\phi](-\omega \,|\, A) \quad \forall A \in \mathcal{X}\}.$$

Используем второе из определений (5.2) для представления элементов L (продолжаем равенства):

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid L \subset \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A) \quad \forall A \in \mathcal{X}\}.$$

Наконец, реализуем конъюнкцию по $A \in \mathcal{X}$ и воспользуемся определением булеана $\mathcal{P}$ (продолжаем равенства):

$$= \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \mid L \subset \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\} = \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\right).$$

Итак, имеем

$$\mathcal{B}_\omega(\phi) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\right) \qquad \forall \omega \in \Omega \quad \forall \phi \in \mathbf{M}.$$

Следуя (3.29), запишем размыкающее отображение $\mathcal{F}_{P_{na}} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})^{\mathbf{M}}$ для предиката неупреждаемости (5.11):

$$\mathcal{F}_{P_{na}}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{B}_\omega(\phi) = \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\right) \qquad \forall \phi \in \mathbf{M}. \tag{5.14}$$

Согласно лемме 3.6 имеем $\mathcal{F}_{P_{na}} \in \mathfrak{UM}(P_{na})$.

§ 5.3. Выделение наибольшего неупреждающего селектора

Возвращаясь к исходной задаче, найдем среди неподвижных точек отображения (5.14) наибольшую, содержащуюся в ЧУМ $(\mathbf{M}_\mathcal{M}, \sqsubseteq)$, где $\mathbf{M}_\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathbf{M} \mid \phi \sqsubseteq \mathcal{M}\}$. Так же как и для ЧУМ $(\mathbf{M}, \sqsubseteq)$, проверяется, что ЧУМ $(\mathbf{M}_\mathcal{M}, \sqsubseteq)$ образует полную решетку.

Определим (см. (3.8)) размыкающее отображение $\mathcal{F}_{(P_{na} \,|\, \mathbf{M}_\mathcal{M})}$ для сужения $(P_{na} \,|\, \mathbf{M}_\mathcal{M})$ предиката P_{na} на непустое подмножество $\mathbf{M}_\mathcal{M} \subset \mathbf{M}$. Имеем для всех $\phi \in \mathbf{M}_\mathcal{M}$

$$\mathcal{F}_{(P_{na} \,|\, \mathbf{M}_\mathcal{M})}(\phi) = [\mathcal{F}_{P_{na}} \,|\, \mathbf{M}_\mathcal{M}](\phi) = \mathbf{M}_\mathcal{M} \cap \mathcal{F}_{P_{na}}(\phi) = \mathbf{M}_\mathcal{M} \bigcap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\right) =$$

$$= \left(\prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}(\mathcal{M}(\omega))\right) \bigcap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathbf{C}(h \,|\, A)\right) = \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h \,|\, A) \in [\phi](-\omega \,|\, A)}} \mathcal{M}(\omega)(h \,|\, A)\right).$$

Воспользуемся леммой 3.4 для построения однозначного селектора м/ф $\mathcal{F}_{(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})}$. Заметим, эта лемма применима, так как ЧУМ $(\mathbf{M}_{\mathcal{M}}, \sqsubseteq)$ образует полную решетку (и тем более индуктивное ЧУМ). Напомним, что в рассматриваемом случае отображение $\mathbf{LE}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}$ (см. (3.16)) имеет вид $\mathbf{LE}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}(\alpha) = \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}(\alpha(\omega))$, $\alpha \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$. Построим в соответствии с условиями леммы 3.4 отображение $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}$: для всех $\phi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$

$$\gamma(\phi) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})}(\phi) \cap \mathbf{LE}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}(\phi) = \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \mathcal{M}(\omega)(h\,|\,A) \right) \bigcap \mathcal{P}(\phi(\omega)) =$$

$$= \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega) \cap \mathcal{M}(\omega)(h\,|\,A) \right) = \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega)(h\,|\,A) \right).$$

В выкладках используются равенство $\mathcal{P}(X)\cap\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X\cap Y)$, справедливое для произвольных множеств X и Y, а также свойства декартова произведения [10, гл. IV, § 5]. Заметим, что в силу включения $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$, где X — любое множество, при всяком $\phi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ выполнено неравенство $\gamma(\phi) \neq \varnothing$.

Рассмотрим отображение $\gamma \in (\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}$ вида $\gamma(\psi) \overset{\text{def}}{=} \sup_{(\mathbf{M}_{\mathcal{M}},\sqsubseteq)} \gamma(\psi)$ $\forall \psi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$. Преобразуем его, используя равенства $Y = \sup_{(\mathcal{P}(X),\subset)} \mathcal{P}(Y)$, справедливые для произвольных множеств X и Y таких, что $Y \subset X$:

$$\gamma(\phi) = \sup_{(\mathbf{M}_{\mathcal{M}},\sqsubseteq)} \gamma(\phi) = \sup_{(\mathbf{M}_{\mathcal{M}},\sqsubseteq)} \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega)(h\,|\,A) \right) =$$

$$= \prod_{\omega\in\Omega} \sup_{(\mathcal{P}(\mathbf{C}),\subset)} \mathcal{P}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega)(h\,|\,A) \right) = \prod_{\omega\in\Omega} \bigcap_{A\in\mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h\in\mathbf{C} \\ (h\,|\,A)\in[\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega)(h\,|\,A). \qquad (5.15)$$

Из представления (5.15) следует, что для любого $\phi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ выполнено включение $\gamma(\phi) \in \gamma(\phi)$, то есть $\gamma(\phi) = \top_{\gamma(\phi)}$ $\forall \phi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$. В силу леммы 3.4 получаем, что γ — сужающая функция и $\gamma \in \mathfrak{UM}((P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}}))$.

Наконец, воспользуемся подходящими утверждениями теории неподвижных точек для описания искомого наибольшего элемента. Так как γ — сужающее отображение, действующее в полной решетке $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$, то в силу следствия 2.1 имеем представление множества всех неупреждающих селекторов м/ф $\mathcal{M}$ как множества истинности предиката $(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})$.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Пусть* $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *таково, что* $|\mathbf{M}_{\mathcal{M}}|^{+} \preccurlyeq \alpha$. *Тогда выполняется равенство*

$$(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{-1}(1) = \{\gamma^{\alpha}(\psi) : \psi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}\}. \qquad (5.16)$$

Представление (5.15) указывает на изотонность функции γ в $(\mathbf{M}_{\mathcal{M}}, \sqsubseteq)$: для всех $\phi, \psi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ выполняются импликации $(\phi \sqsubseteq \psi) \Rightarrow (\gamma(\phi) \sqsubseteq \gamma(\psi))$. Отсюда в силу леммы 2.2 следует, что при любом $\alpha \in \mathbf{ORD}$ функция γ^{α} также изотонна. Из этого следует (см. теорему Тарского [16, Theorem 1]), что множество $\mathbf{Fix}(\gamma) = (P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{-1}(1)$ образует полную подрешетку в $(\mathbf{M}_{\mathcal{M}}, \sqsubseteq)$. В частности, множество $\mathbf{Fix}(\gamma)$ содержит $\top_{(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{-1}(1)}$ — наибольшего неупреждающего селектора м/ф $\mathcal{M}$. Воспользуемся изотонностью γ^{α} и представлением (5.16) для описания наибольшего селектора м/ф $\mathcal{M}$:

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *и* $|\mathbf{M}_{\mathcal{M}}|^{+} \preccurlyeq \alpha$. *Тогда* $\top_{(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{-1}(1)} = \gamma^{\alpha}(\mathcal{M})$.

Утверждение следует из соотношений $\top_{(P_{na}\,|\,\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^{-1}(1)} = \top_{\mathbf{Fix}(\gamma)} = \gamma^{\alpha}(\top_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}}) = \gamma^{\alpha}(\mathcal{M})$, в которых второе равенство опирается на изотонность γ^{α} и представление (5.16).

§ 5.4. Г и γ

В координатной форме γ имеет вид

$$\gamma(\phi)(\omega) = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \bigcup_{\substack{h \in \mathbf{C} \\ (h\,|\,A) \in [\phi](-\omega\,|\,A)}} \phi(\omega)(h\,|\,A) \qquad \forall \phi \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}} \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{5.17}$$

Элиминируя в (5.17) обозначения (5.2), (5.4), получим равенства $\Gamma(\phi)(\omega) = \gamma(\phi)(\omega)$, $\phi \in \mathbf{M}$, $\omega \in \Omega$, для оператора Г, определенного в работах [6, 7, 14, 15]:

$$\Gamma(\phi)(\omega) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \phi(\omega) \mid \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \omega' \in \Omega(\omega\,|\,A)\ (f\,|\,A) \in (\phi(\omega')\,|\,A)\} \qquad \forall \phi \in \mathbf{M} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Предложение 5.2 обобщает представление [6, теорема 6.1], где используется $\alpha = \omega$ (наименьший бесконечный ординал). В предложенном описании бóльшая мощность итераций компенсирует отсутствие условий топологического характера на Ω, $\mathbf{C}$ и $\mathcal{M}$.

Список литературы

1. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. Vol. 8. No. 3. P. 457–459. DOI: 10.1215/S0012-7094-41-00838-4
2. Nash J. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. No. 2. P. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nikaidô H. On von Neuman's minimax theorem // Pacific Journal of Mathematics. 1954. Vol. 4. No. 1. P. 65–72. DOI: 10.2140/pjm.1954.4.65
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
6. Ченцов А.Г. Неупреждающие селекторы многозначных отображений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1998. № 2. С. 1–64.
7. Ченцов А.Г. Наследственные мультиселекторы многозначных отображений и их построение итерационными методами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1999. № 3. С. 1–54.
8. Серков Д.А. Об одном подходе к анализу множества истинности: размыкание предиката // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 525–534. DOI: 10.20537/vm160407
9. Serkov D.A. Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 283–291. DOI: 10.20537/vm170211
10. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
11. Serkov D.A. On fixed point theory and its applications to equilibrium models // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 1. С. 20–31. DOI: 10.14529/mmp160102
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
13. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.
14. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. I // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 4. С. 470–480.
15. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. II // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 679–688.
16. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacific Journal of Mathematics. 1955. Vol. 5. No. 2. P. 285–309. DOI: 10.2140/pjm.1955.5.285

Поступила в редакцию 10.10.2017

Серков Дмитрий Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

D. A. Serkov

On the construction of a predicate truth set

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 45–61 (in Russian).

Keywords: truth set of predicate, fixed points, Nash equilibrium, nonanticipating mappings.

MSC2010: 06E30, 47J25, 47H04, 47H10, 91B50

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-06

We provide an approach to constructing a predicate truth set, which we refer to as unlocking of predicate. The approach reduces the problem of searching for a predicate truth set to searching for a set of fixed points of some mappings (hereinafter "unlocking mappings"). Unlocking of predicate gives an extra opportunity to analyze the truth set and to build its elements with desired properties. In this paper, we outline how to build unlocking mappings for some general types of predicates: we give a formal definition of the predicate unlocking operation, rules for the construction and calculation of unlocking mappings and their basic properties. As an illustration, we routinely construct unlocking mappings for predicates "be a Nash equilibrium" and "be non-anticipating mapping"; then on this basis we provide expressions for corresponding truth sets.

REFERENCES

1. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.*, 1941, vol. 8, no. 3, pp. 457–459. DOI: 10.1215/S0012-7094-41-00838-4
2. Nash J. Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nikaidô H. On von Neumann's minimax theorem, *Pacific Journal of Mathematics*, 1954, vol. 4, no. 1, pp. 65–72. DOI: 10.2140/pjm.1954.4.65
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Sov. Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math. Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Chentsov A.G. Non-anticipating selections of multivalued mappings, *Differ. Uravn. i Protsessy Upr.*, 1998, no. 2, pp. 1–64 (in Russian).
7. Chentsov A.G. Hereditary multiselectors of multivalued mappings and their construction by iterative methods, *Differ. Uravn. i Protsessy Upr.*, 1999, no. 3, pp. 1–54 (in Russian).
8. Serkov D.A. An approach to analysis of the set of truth: unlocking of predicate, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 525–534 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160407
9. Serkov D.A. Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 283–291. DOI: 10.20537/vm170211
10. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
11. Serkov D.A. On fixed point theory and its applications to equilibrium models, *Bulletin of the South Ural State University, Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, issue 1, pp. 20–31. DOI: 10.14529/mmp160102
12. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 752 p.
13. Aubin J.-P. *L'analyse non lineaire et ses motivations economiques*, Paris, Masson, 1984, 214 p. Translated under the title *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya*, Moscow: Mir, 1988.
14. Chentsov A.G. Nonanticipating multimappings and their construction by the method of program iterations: I, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, issue 4, pp. 498–509. DOI: 10.1023/A:1019275422741
15. Chentsov A.G. Nonanticipating multimappings and their construction by the method of program iterations: II, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, issue 5, pp. 713–723. DOI: 10.1023/A:1019224800877
16. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific Journal of Mathematics*, 1955, vol. 5, no. 2, pp. 285–309. DOI: 10.2140/pjm.1955.5.285

Received 10.10.2017

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru