УДК 517.977

© *А. А. Шабуров*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И ГЛАДКИМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества линейной стационарной управляемой системой в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. Основным отличием данной статьи от предыдущей [5] является то, что терминальная часть функционала качества зависит не только от медленных переменных, но и от быстрых. В работе в частном случае выводится уравнение, которому удовлетворяет начальный вектор сопряженной системы. Затем это уравнение уточняется на задачу оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для линейной системы с быстрыми и медленными переменными. Показывается, что решение соответствующего уравнения при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению уравнения, соответствующего предельной задаче. Затем полученные результаты применяются к исследованию задачи, описывающей движение материальной точки в $\mathbb{R}^n$ на фиксированном промежутке времени. Строится асимптотика начального вектора сопряженного состояния, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-09

Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики начального вектора сопряженного состояния и оптимального значения функционала качества в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, глава 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной в [5] является присутствие быстрых переменных в терминальной части функционала качества. Общие соотношения применены к нахождению полной асимптотики решения задачи оптимального управления точкой малой массы в n-мерном пространстве, под действием силы, ограниченной по величине.

В [6,7] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [8–10].

§ 1. Построение полного асимптотического разложения вектора λ_ε для одной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными

В классе кусочно-непрерывных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой с интегральным выпуклым функционалом качества:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon \cdot \dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) = \frac{1}{2}\|z_\varepsilon(T)\|^2 + \displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \quad z_\varepsilon(T) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(T) & y_\varepsilon(T) \end{pmatrix}^T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где x_ε, y_ε, $u \in \mathbb{R}^n$, $z_\varepsilon \in \mathbb{R}^{2n}$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем пространстве.

Задача (1.1) моделирует движение материальной точки малой массы $\varepsilon > 0$ с коэффициентом сопротивления среды, равным 1, в пространстве $\mathbb{R}^n$ под действием ограниченной управляющей силы $u(t)$.

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества J первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Управляемая система (1.1) содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит от медленных и быстрых переменных. При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (1.1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_\varepsilon z + \mathcal{B}_\varepsilon u, \quad z(0) = z^0, \quad \|u(t)\| \leqslant 1, \quad t \in [0, T], \\ J(u) = \varphi(z(T)) + \displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt \to \min, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $z \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}}$, $u \in \mathbb{R}^n$,

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{n} = 2n, \quad \varphi(z_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|z_\varepsilon\|^2,$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} A_{21} & \varepsilon^{-1} A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1} B_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_{11} = \mathcal{O}$, $A_{12} = I$, $A_{21} = \mathcal{O}$, $A_{22} = -I$, $B_1 = \mathcal{O}$, $B_2 = I$, а $\mathcal{O}$ и I — нулевая и единичные матрицы размерности $n \times n$ соответственно.

Вычисляя $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ и $\nabla(\frac{1}{2}\|z_\varepsilon(T)\|^2)$, получим

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon}) I \\ \mathcal{O} & e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad \nabla\left(\frac{1}{2}\|z_\varepsilon(T)\|^2\right) = z_\varepsilon(T). \tag{1.3}$$

Таким образом, выполнены следующие условия:

- пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, то есть $\operatorname{rank}\big(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, {\mathcal{A}_\varepsilon}^{2n-1} \mathcal{B}_\varepsilon\big) = 2n$;
- все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части;
- пара (A_{22}, B_2) вполне управляема.

При сформулированном первом условии применяемый к задаче (1.2) принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение [3, п. 3.5, теорема 14]. Кроме того, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1.1. *Пара $z_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon(t)$ есть решение задачи принципа максимума тогда и только тогда, когда $u_\varepsilon(t)$ определяется следующей формулой:*

$$u_\varepsilon(t) = \frac{{\mathcal{B}_\varepsilon}^* e^{{\mathcal{A}_\varepsilon}^* t} \lambda_\varepsilon}{S\left(\|{\mathcal{B}_\varepsilon}^* e^{{\mathcal{A}_\varepsilon}^* t} \lambda_\varepsilon\|\right)}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases}$$

а вектор λ_ε есть единственное решение уравнения

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla\varphi\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0 + \int_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} \mathcal{B}_\varepsilon \frac{{\mathcal{B}_\varepsilon}^* e^{{\mathcal{A}_\varepsilon}^* t} \lambda_\varepsilon}{S\left(\|{\mathcal{B}_\varepsilon}^* e^{{\mathcal{A}_\varepsilon}^* t} \lambda_\varepsilon\|\right)} \, d\tau\right). \tag{1.4}$$

При этом $u_\varepsilon(t)$ есть единственное оптимальное управление в задаче (1.2) [5, утверждение 1].

Определение 1.1. Вектор λ_ε, удовлетворяющий уравнению (1.4), называется *вектором, определяющим оптимальное управление* в задаче (1.2).

Поскольку $\nabla\varphi(z_\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}$, вектор λ_ε, определяющий оптимальное управление в задаче (1.2), имеет вид $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix}$, $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^n, \rho_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2. Векторы l_ε, ρ_ε тоже будем называть *векторами, определяющими оптимальное управление в задаче* (1.2).

Согласно (1.3) уравнение (1.4) переходит в систему уравнений

$$\begin{cases} -l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right) y^0 + \displaystyle\int_0^T \frac{(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}})\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\right)}{S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\|\right)}\,dt, \\ -\rho_\varepsilon = e^{-\frac{T}{\varepsilon}} y^0 + \displaystyle\int_0^T \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\right)}{\varepsilon\cdot S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\|\right)}\,dt. \end{cases} \tag{1.5}$$

В силу 1.1 оптимальное управление $u_\varepsilon^o(\tau)$ в задаче (1.1) выражается через векторы $l_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ следующим образом:

$$u_\varepsilon^o(\tau) = \frac{l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)}{S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\|\right)}. \tag{1.6}$$

Основная задача, которая ставится для (1.1), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления, оптимального значения функционала качества и оптимального процесса. Формула (1.6) показывает, что если удастся получить полное асимптотическое разложение векторов $l_\varepsilon, \rho_\varepsilon$, определяющих оптимальное управление в задаче (1.1), то из них получатся и асимптотические разложения указанных величин.

Введем некоторые обозначения. Если вектор-функция $f_\varepsilon(t)$ такова, что $f_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $\alpha > 0$ равномерно по $t \in [0, T]$, то вместо $f_\varepsilon(t)$ будем писать $\mathbb{O}$. В частности, $e^{-\gamma T/\varepsilon} = \mathbb{O}$.

Теорема 1.1. *Пусть векторы $l_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ — единственные решения системы уравнений* (1.5) *в задаче* (1.1), *а l_0 — единственное решение уравнения*

$$-l_0 = x^0 + \frac{l_0}{S(\|l_0\|)} T. \tag{1.7}$$

Тогда $l_\varepsilon \to l_0$ и $\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon \to -l_0$ при $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. Известно, что множество достижимости управляемой системы (1.1) к моменту времени T равномерно ограничено при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (см., например, [7, теорема 3.1]).

Выпишем первое уравнение из (1.5):

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right) y^0 + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}})\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\right)}{S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\|\right)}\,dt.$$

Учитывая равномерную ограниченность подынтегрального выражения и то, что $O(e^{-t/\varepsilon}) = e^{-t/\varepsilon}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)$ при $\varepsilon \to 0$, доказательство того, что $l_\varepsilon \to l_0$, проводится почти дословно доказательству [5, теорема 1]. Таким образом, для полного доказательства теоремы достаточно доказать, что $\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon \to -l_0$.

Покажем, что вектор ρ_ε можно представить в виде $\rho_\varepsilon = \varepsilon \cdot r_\varepsilon$, где $r_\varepsilon \to r_0 \in \mathbb{R}^n$ при $\varepsilon \to +0$. Выпишем второе уравнение из (1.5):

$$-\rho_\varepsilon = e^{-\frac{T}{\varepsilon}} y^0 + \int_0^T \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\right)}{\varepsilon\cdot S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\|\right)}\,dt. \tag{1.8}$$

Положим $\tau := \frac{t}{\varepsilon}$. Уравнение (1.8) перепишется как

$$-\rho_\varepsilon = \mathbb{O} + \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}\left(l_\varepsilon + e^{-\tau}(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\right)}{S\left(\|l_\varepsilon + e^{-\tau}(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\|\right)}\, d\tau, \quad \varepsilon \to 0.$$

Сделав замену переменной $\xi := e^{-\tau}$, получим

$$-\rho_\varepsilon = \mathbb{O} + \int_0^1 \frac{l_\varepsilon + \xi(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)}{S\left(\|l_\varepsilon + \xi(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\|\right)}\, d\xi, \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, вектор ρ_ε ограничен. Докажем, что последовательность $\{\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\}$ ограничена. Предположим противное. Найдем $\varepsilon_n \to 0 : \|\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\| \to \infty$. Для простоты зависимость ε от n опустим.

Разобьем отрезок интегрирования на два с помощью введения дополнительного параметра $\alpha(\varepsilon)$:

$$-\rho_\varepsilon = \mathbb{O} + \int_0^{\alpha(\varepsilon)} \frac{l_\varepsilon + \xi(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)}{S\left(\|l_\varepsilon + \xi(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon)\|\right)}\, d\xi + \int_{\alpha(\varepsilon)}^1 \frac{\xi\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon + (1-\xi)l_\varepsilon}{S\left(\|\xi\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon + (1-\xi)l_\varepsilon\|\right)}\, d\xi, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.9}$$

где $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \to 0$ и некотором положительном γ.

Поскольку $\|\xi\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\| = \xi\|\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\| \to \infty$ и вектор l_ε ограниченный. Выбор точки разбиения интеграла зависит от числа $\gamma \in (0,1)$ следующим образом:

$$\alpha(\varepsilon) := \frac{1}{\|\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\|^\gamma} \leqslant \xi,$$

где в силу ограниченности подынтегрального выражения $\alpha(\varepsilon) = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как $\|\xi\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\| \geqslant \alpha(\varepsilon)\|\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon\| \to \infty$, то есть при достаточно малых ε выполнено неравенство $\|\xi\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - (1-\xi)l_\varepsilon\| > 2$. Разделив и умножив подынтегральную функцию под знаком второго интеграла в (1.9) на множитель $\|\rho_\varepsilon\|$ и избавившись от множителя ε^{-1} при ρ_ε, мы получим

$$-\rho_\varepsilon = \mathbb{O} + o(1) + \int_{\alpha(\varepsilon)}^1 \frac{\xi\frac{\rho_\varepsilon}{\|\rho_\varepsilon\|} + o(1)}{\left\|\xi\frac{\rho_\varepsilon}{\|\rho_\varepsilon\|} + o(1)\right\|}\, d\xi. \tag{1.10}$$

Пусть, без ограничения общности, $\bar\rho$ — частичный предел векторов $\frac{\rho_\varepsilon}{\|\rho_\varepsilon\|}$ при $\varepsilon \to +0$, то есть $\frac{\rho_{\varepsilon_k}}{\|\rho_{\varepsilon_k}\|} \to \overline{\rho}$ для некоторой $\{\varepsilon_k\}$ такой, что $\varepsilon_k \to +0$. Более того, $\|\bar\rho\| = 1$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (1.10), получим, что $-\rho_o = \bar\rho$. Следовательно, $\|\rho_0\| = 1$ и $-\rho_0 = \rho_0$.

Полученное противоречие приводит к тому, что $\rho_\varepsilon = O(\varepsilon)$, и можно переписать вектор $\rho_\varepsilon = \varepsilon \cdot r_\varepsilon$, где последовательность $\{r_\varepsilon\}$ ограничена.

Разобьем интеграл на два интеграла. Учитывая, что $r_\varepsilon \longrightarrow r_0$ при $\varepsilon \to 0$

$$0 = \int_0^1 \frac{l_0 + \xi(r_0 - l_0)}{S\left(\|l_0 + \xi(r_0 - l_0)\|\right)}\, d\xi = \int_0^1 \frac{l_0}{S\left(\|l_0 + \xi(r_0 - l_0)\|\right)}\, d\xi + \int_0^1 \frac{\xi(r_0 - l_0)}{S\left(\|l_0 + \xi(r_0 - l_0)\|\right)}\, d\xi =$$
$$= \mu_1 l_0 + \mu_2(r_0 - l_0) = \widetilde{\mu} l_0 + \mu_2 r_0,$$

где $\widetilde{\mu} = \mu_1 - \mu_2$.

Положительные числа μ_1, μ_2 представляют собой интегралы

$$\mu_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{S\left(\|l_0 + \xi(r_0 - l_0)\|\right)}, \quad \mu_2 = \int_0^1 \frac{\xi}{S\left(\|l_0 + \xi(r_0 - l_0)\|\right)}\, d\xi.$$

Будем предполагать, что $r_0 = \mu \cdot l_0$, где $\mu := -\widetilde{\mu}/\mu_2$.

Замена переменной $\nu := 1 + \xi(\mu - 1)$ позволяет переписать интегральное уравнение в виде

$$\frac{l_0}{\mu - 1}\int_1^\mu \frac{\nu}{S(\|l_0\| \cdot |\nu|)}\, d\nu.$$

Интеграл равен нулю при $\mu = 1$. Пусть $\mu \neq 1$, тогда подинтегральная функция является нечетной функцией по переменной ν. Следовательно, интеграл обращается в нуль только в случае $\mu = -1$. Мы доказали, что $\rho_\varepsilon = \varepsilon r_\varepsilon$, причем первое слагаемое $r_0 = -l_0$ есть ограниченный вектор. Теорема 1.1 доказана. □

Из (1.5) и (1.7) получим два возможных случая:

$$\begin{aligned} &1)\ \|x^0\| < T+2 \Longrightarrow l_0 = -\frac{2}{2+T}\,x^0 \qquad \text{и} \qquad \|l_0\| < 2,\\ &2)\ \|x^0\| > T+2 \Longrightarrow l_0 = -\frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|}\,x^0 \quad \text{и} \qquad \|l_0\| > 2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

1. Рассмотрим сначала случай $\|x^0\| < T+2$.

В силу (1.11) и теоремы 1.1 при всех достаточно малых ε будет справедливо неравенство $\|l_\varepsilon\| < 2$. Учитывая, что $(1 - e^{-t/\varepsilon}) \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, из (1.5) для l_ε, ρ_ε получим переписанную систему уравнений

$$\begin{cases} -l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right) y^0 + \displaystyle\int_0^T \frac{(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}})\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\right)}{2}\,dt,\\ -\rho_\varepsilon = e^{-\frac{T}{\varepsilon}} y^0 + \displaystyle\int_0^T \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(l_\varepsilon + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon - l_\varepsilon\right)\right)}{2\varepsilon}\,dt. \end{cases} \tag{1.12}$$

Решением системы уравнений (1.12) будут векторы

$$\rho_\varepsilon = \frac{2\varepsilon(x^0 + \varepsilon y^0)}{(T+2) + 2\varepsilon(3+2T) - 6\varepsilon^2} + \mathbb{O}, \quad l_\varepsilon = \frac{-2(x^0 + \varepsilon y^0)(1+4\varepsilon)}{(T+2) + 2\varepsilon(3+2T) - 6\varepsilon^2} + \mathbb{O}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Из этого представления следует, что l_ε разлагается в асимптотический ряд по степеням ε. Таким образом, мы можем получить явный вид первых двух коэффициентов векторов $l_\varepsilon, r_\varepsilon$.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $\|x^0\| < T+2$. *Тогда векторы* l_ε, r_ε, *определяющие оптимальное управление в задаче* (1.1), *при* $\varepsilon \to 0$ *раскладываются в степенные асимптотические ряды:*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \ \text{где, в частности, } l_0 = \frac{-2x^0}{T+2}, \quad l_1 = \frac{-8x^0}{T+2} - \frac{2y^0}{T+2} + \frac{4(3+2T)x^0}{(T+2)^2},$$

$$r_\varepsilon \overset{as}{=} r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \ \text{где, в частности, } r_0 = \frac{2x^0}{T+2}, \quad r_1 = \frac{2y^0}{T+2} - \frac{4\varepsilon^3(3+2T)x^0}{(T+2)^2}.$$

2. Теперь рассмотрим случай $\|x^0\| > T+2$.

Пусть $l_\varepsilon = l_0 + l$, $\rho_\varepsilon = -\varepsilon l_0 + \varepsilon r$, где l, r — бесконечно малые величины.

Перепишем систему уравнений (1.12), сделав замену переменной $\eta := e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$:

$$\begin{cases} -l_0 - l = x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O} + \varepsilon \displaystyle\int_{e^{-\frac{T}{\varepsilon}}}^1 \frac{(1-\eta)\big(l_0 + l + \eta(r - l - 2l_0)\big)}{\eta \cdot S\big(\|l_0 + l + \eta(r - l - 2l_0)\|\big)}\,d\eta, \quad \varepsilon \to 0,\\ -\varepsilon\,(-l_0 + r) = \mathbb{O} + \displaystyle\int_{e^{-\frac{T}{\varepsilon}}}^1 \frac{l_0 + l + \eta(r - l - 2l_0)}{S\big(\|l_0 + l + \eta(r - l - 2l_0)\|\big)}\,d\eta, \quad \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

Для простоты условие $\varepsilon \to 0$ опустим.

Сделаем замену переменной $\xi := 1 - 2\eta$. Тогда подынтегральный множитель в переписанной системе как функция $\psi_\varepsilon(\eta)$, содержащая векторы l_ε, ρ_ε, запишется в виде

$$\psi_\varepsilon(\xi) := \xi l_0 + \lambda + \xi\nu,$$

где $\lambda = \frac{l+r}{2}$, $\nu = \frac{l-r}{2}$. Для малых l, r можно получить выражения

$$l = \lambda + \nu, \quad r = \lambda - \nu.$$

С учетом новых представлений векторов l, r перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} -l_0 - \lambda - \nu = x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O} + \frac{\varepsilon}{2}\displaystyle\int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{(1+\xi)\left(\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\right)}{(1-\xi) S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi, \\ -\varepsilon\left(-l_0 + \lambda - \nu\right) = \mathbb{O} + \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi, \end{cases} \tag{1.13}$$

где $\beta(\varepsilon) := 1 - 2e^{-\frac{T}{\varepsilon}}$. Отметим, что $\beta(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Преобразовав подынтегральный множитель $\frac{1+\xi}{1-\xi} = 1 + \frac{2\xi}{1-\xi}$ и разбив интеграл из первого уравнения системы (1.13) на два интеграла, получим

$$\int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{(1+\xi)}{(1-\xi)} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi + 2\int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi}{(1-\xi)} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi.$$

Найдем точки переключения $\xi_1,\ \xi_2$ из условия $\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\| = 2$:

$$\xi_{1,2} = \frac{-\langle l_0; \lambda\rangle - \langle \nu; \lambda\rangle \pm \sqrt{\left(\langle l_0; \lambda\rangle + \langle \nu; \lambda\rangle\right)^2 - (\|\lambda\|^2 - 4)(\|l_0\|^2 + \|\nu\|^2 + 2\langle l_0; \nu\rangle)}}{\|l_0\|^2 + \|\nu\|^2 + 2\langle l_0; \nu\rangle}.$$

Здесь и далее $\langle\cdot;\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующем пространстве.

Используя биномиальное разложение и разложение квадратного корня при малом значении параметра, мы получим корни $\xi_1,\ \xi_2$:

$$\xi_{1,2} = \pm\frac{2}{\|l_0\|} - \frac{\langle l_0; \lambda\rangle}{\|l_0\|^2} \mp \frac{2\langle l_0; \nu\rangle}{\|l_0\|^3} + O\left(\|\lambda\|^2 + \|\nu\|^2\right).$$

Интеграл из второго уравнения системы (1.13) можно доопределить в точке $\xi = 1$:

$$\int_{-1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{S\left(\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|\right)}\, d\xi + \mathbb{O} = 2\varepsilon(l_0 - \lambda + \nu).$$

Введя в рассмотрение вектор-функцию $F(\lambda, \nu, \varepsilon) := \begin{pmatrix} F_1(\lambda, \nu, \varepsilon) \\ F_2(\lambda, \nu, \varepsilon) \end{pmatrix}$, перепишем систему уравнений (1.13) в виде $F(\lambda, \nu, \varepsilon) = 0$, где

$$F_1(\lambda, \nu, \varepsilon) := l_0 + \lambda + \nu + x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O} + \varepsilon^2(l_0 + \nu - \lambda) + \varepsilon\left(\int_{-1}^{\xi_2} \frac{\xi}{(1-\xi)} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|}\, d\xi\right) +$$

$$+ \varepsilon\left(\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi}{(1-\xi)} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{2}\, d\xi + \int_{\xi_1}^{\alpha(\varepsilon)} \frac{\xi}{(1-\xi)} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|}\, d\xi\right) = 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.14}$$

$$F_2(\lambda, \nu, \varepsilon) := \varepsilon(\lambda - l_0 - \nu) + \mathbb{O} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{\xi_2} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|}\, d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{2}\, d\xi + \int_{\xi_1}^{1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|}\, d\xi\right) = 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.15}$$

где $\xi_1,\ \xi_2$ — точки переключения управления $u(t)$.

Устраним особенность в точке $\xi = 1$, разбив интеграл из первого уравнения системы на два интеграла:

$$\int_{\xi_1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|}\, d\xi =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \left(\frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|} - \frac{l_0 + \lambda + \nu}{\|l_0 + \lambda + \nu\|} \right) d\xi + \int_{\xi_1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{l_0 + \lambda + \nu}{\|l_0 + \lambda + \nu\|} \, d\xi.$$

Посчитаем второй интеграл:

$$\frac{l_0 + \lambda + \nu}{\|l_0 + \lambda + \nu\|} \int_{\xi_1}^{\beta(\varepsilon)} \frac{\xi}{1-\xi} \, d\xi = \frac{l_0 + \lambda + \nu}{\|l_0 + \lambda + \nu\|} \cdot \left(-\left(1 - 2e^{-\frac{T}{\varepsilon}} - \xi_1\right) - \left(\ln 2 - \frac{T}{\varepsilon} - \ln(1-\xi_1)\right) \right).$$

Разложим слагаемые $1-\xi_1$ и $\ln(1-\xi_1)$ при малом значении параметра:

$$1 - \xi_1 = 1 - \frac{2}{\|l_0\|} + \frac{\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|^2} + \frac{2\langle l_0; \nu \rangle}{\|l_0\|^3} + O\left(\|\lambda\|^2 + \|\nu\|^2\right),$$
$$\ln(1-\xi_1) = \ln\left(1 - \frac{2}{\|l_0\|}\right) + \frac{\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|(\|l_0\| - 2)} + \frac{2\langle l_0; \nu \rangle}{\|l_0\|^2(\|l_0\| - 2)} + O\left(\|\lambda\|^2 + \|\nu\|^2\right).$$

Вычислив производную по Гато функции $\frac{\rho}{\|\rho\|}$, получим

$$D\left(\frac{\rho}{\|\rho\|}\right)\Bigg|_{\rho=\rho_0\neq 0}(\triangle\rho) = \frac{\triangle\rho\|\rho_0\|^2 - \langle \triangle\rho; \rho_0 \rangle \rho_0}{\|\rho_0\|^3}. \tag{1.16}$$

Формулу (1.16) будем использовать для нахождения частных производных $\frac{\partial F_1(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)$, $\frac{\partial F_1(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)$.

С учетом того, что единственное слагаемое в правой части уравнения (1.14) не имеет порядок $o(1)$, и согласно формуле (1.16) имеем

$$\frac{\partial F_1(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\lambda}\Bigg|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda) = \triangle\lambda + T \cdot \frac{\triangle\lambda\|l_0\|^2 - l_0\langle l_0; \triangle\lambda \rangle}{\|l_0\|^3},$$
$$\frac{\partial F_1(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\Bigg|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu) = \triangle\nu + T \cdot \frac{\triangle\nu\|l_0\|^2 - l_0\langle l_0; \triangle\nu \rangle}{\|l_0\|^3}.$$

Функция $F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)$ из второго уравнения (1.15) перепишется в виде

$$F_2(\lambda,\nu,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{\xi_2^o} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|} d\xi + \int_{\xi_2^o}^{\xi_2} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|} d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{2} d\xi \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\int_{\xi_1}^{\xi_1^o} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|} d\xi + \int_{\xi_1^o}^{1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{\|\xi l_0 + \lambda + \xi\nu\|} d\xi \right) + \varepsilon(\lambda - \nu - l_0),$$

где $\xi_{1,2}^o = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \xi_{1,2}$.

Посчитаем третий интеграл:

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi l_0 + \lambda + \xi\nu}{2} d\xi = \frac{2\lambda}{\|l_0\|} - \frac{2l_0\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|^3},$$

и вычислим частные производные от третьего интеграла:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{2\lambda}{\|l_0\|} - \frac{2l_0\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|^3} \right)\Bigg|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda) = \frac{\triangle\lambda}{\|l_0\|} - \frac{l_0\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|^3}, \ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{2\lambda}{\|l_0\|} - \frac{2l_0\langle l_0; \lambda \rangle}{\|l_0\|^3} \right)\Bigg|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu) = 0.$$

Вычислим производные от первого и пятого интегралов, воспользовавшись формулой (1.16):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-1}^{\xi_2^o}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\right)\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{\xi_1^o}^{1}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\right)\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=$$

$$=\frac{\triangle\lambda\|l_0\|^2-\langle l_0;\triangle\lambda\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\cdot\left(-\ln\frac{2}{\|l_0\|}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\int_{-1}^{\xi_2^o}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\right)\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)=\frac{\triangle\nu\|l_0\|^2-\langle l_0;\triangle\nu\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\cdot\left(\frac{2}{\|l_0\|}-1\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\int_{\xi_1^o}^{1}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\right)\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)=\frac{\triangle\nu\|l_0\|^2-\langle l_0;\triangle\nu\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\cdot\left(1-\frac{2}{\|l_0\|}\right).$$

Посчитаем производные от второго и четвертого интегралов, учитывая формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\alpha(\lambda)}^{\beta(\lambda)}f(t,\lambda)\,dt\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0}(\triangle\lambda)=$$

$$=\int_{\alpha(\lambda)}^{\beta(\lambda)}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\triangle\lambda)\,dt+f(\beta(\lambda),\lambda)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(\triangle\lambda)-f(\alpha(\lambda),\lambda)\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(\triangle\lambda). \tag{1.17}$$

Поскольку каждый интеграл содержит только один переменный предел и интеграл от частной производной подынтегральной функции равен нулю, согласно формуле (1.17) получим

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\xi_2^o}^{\xi_2}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=\frac{\partial\xi_2}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)\cdot\frac{\xi_2 l_0+\lambda+\xi_2\nu}{\|\xi_2 l_0+\lambda+\xi_2\nu\|}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=\frac{l_0\langle l_0;\triangle\lambda\rangle}{\|l_0\|^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\xi_1}^{\xi_1^o}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\|\xi l_0+\lambda+\xi\nu\|}\,d\xi\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=-\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)\cdot\frac{\xi_1 l_0+\lambda+\xi_1\nu}{\|\xi_1 l_0+\lambda+\xi_1\nu\|}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=\frac{l_0\langle l_0;\triangle\lambda\rangle}{\|l_0\|^3}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\xi_2^o}^{\xi_2}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}\,d\xi\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)=-\frac{2l_0\langle l_0;\triangle\nu\rangle}{\|l_0\|^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\xi_1}^{\xi_1^o}\frac{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}{\xi l_0+\lambda+\xi\nu}\,d\xi\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)=\frac{2l_0\langle l_0;\triangle\nu\rangle}{\|l_0\|^4}.$$

Выпишем, чему равны частные производные $\frac{\partial F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)$, $\frac{\partial F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)$:

$$\frac{\partial F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\lambda)=\frac{\triangle\lambda}{\|l_0\|}-\ln\frac{2}{\|l_0\|}\left(\frac{\triangle\lambda\|l_0\|^2-\langle l_0;\triangle\lambda\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\right),\quad\frac{\partial F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}(\triangle\nu)=0.$$

Мы получим, что $F_1(0,0,0)=0$, $F_2(0,0,0)=0$ и функции $F_1(\cdot,\cdot,\cdot)$, $F_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ бесконечно дифференцируемые по λ, ν, ε в некоторой окрестности точки $(0;0;0)$. Покажем, что оператор

$$\mathcal{F}(\triangle\lambda,\triangle\nu):=D\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}\Big|_{\lambda,\nu,\varepsilon=0}=$$

$$=\begin{pmatrix}\triangle\lambda+T\dfrac{\triangle\lambda\|l_0\|^2-l_0\langle l_0;\triangle\lambda\rangle}{\|l_0\|^3}+\triangle\nu+T\dfrac{\triangle\nu\|l_0\|^2-l_0\langle l_0;\triangle\nu\rangle}{\|l_0\|^3}\\[2ex]\dfrac{\triangle\lambda}{\|l_0\|}-\ln\dfrac{2}{\|l_0\|}\left(\dfrac{\triangle\lambda\|l_0\|^2-\langle l_0;\triangle\lambda\rangle l_0}{\|l_0\|^3}\right)\end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

непрерывно обратим.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{F}(0,0)(\triangle\lambda,\triangle\nu) =: (g_1,g_2)$. Скалярно умножив первые и вторые координаты вектора (1.18), найдем неизвестные пары скалярных произведений:

$$\langle l_0;\triangle\lambda\rangle = \|l_0\|\langle l_0;g_2\rangle, \quad \langle l_0;\triangle\nu\rangle = \langle l_0;g_1-\|l_0\|g_2\rangle.$$

Выпишем, чему равен обратный оператор $\mathcal{F}^{-1}(g_1,g_2)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(g_1,g_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(g_1 + T\frac{l_0\langle l_0;g_2\rangle}{\|l_0\|^2} + T\frac{l_0\langle l_0;g_1-\|l_0\|g_2\rangle}{\|l_0\|^3}\right)\frac{\|l_0\|}{\|l_0\|+T} - \left(g_2 - \ln\frac{2}{\|l_0\|}\frac{l_0\langle l_0;g_2\rangle}{\|l_0\|^2}\right)\frac{\|l_0\|}{1-\ln\frac{2}{\|l_0\|}} \\ \left(g_2 - \ln\frac{2}{\|l_0\|}\frac{l_0\langle l_0;g_2\rangle}{\|l_0\|^2}\right)\frac{\|l_0\|}{1-\ln\frac{2}{\|l_0\|}} \end{pmatrix}. \qquad (1.19)$$

Таким образом, применима теорема о неявно заданной функции, из которой следует, что векторы $l_\varepsilon, r_\varepsilon$ (как функции от ε) бесконечно дифференцируемы по ε при всех малых ε и поэтому $l_\varepsilon,\ r_\varepsilon$ разлагаются в степенной асимптотический ряд. Коэффициенты этих рядов находятся по стандартной процедуре: подставив ряд в уравнение $\mathcal{F}(\lambda,\nu,\varepsilon)=0$, разложив величины, зависящие от ε, в асимптотические ряды по степеням ε и приравняв слагаемые одинакового порядка малости по ε, получим уравнения вида $\mathcal{F}(\triangle\lambda_k,\triangle\nu_k) = (g_{1,k},g_{2,k})$ с известными правыми частями. После этого по формуле (1.19) найдем $l_k,\ r_k$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\|x^0\| > T+2$. *Тогда векторы* $l_\varepsilon,\ r_\varepsilon$, *определяющие оптимальное управление в задаче* (1.1), *при* $\varepsilon\to 0$ *раскладываются в степенные асимптотические ряды:*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad r_\varepsilon \overset{as}{=} r_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k r_k.$$

Замечания

Замечание 1. И в первом, и во втором из рассматриваемых случаев из (1.14), (1.15) и асимптотического разложения l_ε стандартно получаются асимптотические разложения и функционала качества, и оптимального управления, и оптимального состояния системы. При этом асимптотические разложения оптимального управления и состояния системы будут иметь экспоненциально убывающие пограничные слои в окрестности точки $t=0$. Более того, если $t\geqslant\varepsilon^\beta$ и $\beta\in(0,1)$, то оптимальное управление $u^o(t)$ есть константа плюс асимптотический ноль.

Замечание 2. Из формул $F_1(\lambda,\nu,\varepsilon)=0,\ F_2(\lambda,\nu,\varepsilon)=0$ следует, что λ_ε лежит в подпространстве П, порожденном векторами x^0 и y^0. Поэтому при всех $t\in[0,T]$ и $u^o_\varepsilon(t)$, и $x_\varepsilon(t)$, и $y_\varepsilon(t)$ лежат в этом же подпространстве П. Таким образом, задача (1.1) эквивалентна соответствующей двумерной задаче.

Благодарности

Автор выражает благодарность Данилину А. Р. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
5. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 303–310. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310
6. Kokotović P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Transactions on Automatic Control. 1975. Vol. 20. Issue 1. P. 111–113. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100852

7. Дончев А.Л. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
8. Калинин А.И., Семёнов К.В. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 432–443.
9. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Асимптотика оптимального значения значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 2. С. 151–154.
10. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Доклады Академии наук. 2013. Т. 451. № 6. С. 612–614.

Поступила в редакцию 04.08.2017

Шабуров Александр Александрович, аспирант, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: alexandershaburov@mail.ru

A. A. Shaburov

Asymptotic expansion of a solution for the singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index and smooth control constraints

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 110–120 (in Russian).

Keywords: optimal control, singularly perturbed problems, asymptotic expansion, small parameter.

MSC2010: 49N05, 93C70

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-09

The paper deals with the problem of optimal control with a convex integral quality index for a linear steady-state control system in the class of piecewise continuous controls with smooth control constraints. In a general case, to solve such a problem, the Pontryagin maximum principle is applied as the necessary and sufficient optimum condition. The main difference from the preceding article [5] is that the terminal part of the convex integral quality index depends not only on slow, but also on fast variables. In a particular case, we derive an equation that is satisfied by an initial vector of the conjugate system. Then this equation is extended to the optimal control problem with the convex integral quality index for a linear system with the fast and slow variables. It is shown that the solution of the corresponding equation as $\varepsilon \to 0$ tends to the solution of an equation corresponding to the limit problem. The results obtained are applied to study a problem which describes the motion of a material point in $\mathbb{R}^n$ for a fixed interval of time. The asymptotics of the initial vector of the conjugate system that defines the type of optimal control is built. It is shown that the asymptotics is a power series of expansion.

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, New York–London–Sydney: Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc., 1962, VIII+360 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* (Theory of motion control. Linear systems), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p.
4. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems, *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, issue 3, pp. 1579–1629. DOI: 10.1007/BF01262406
5. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space $\mathbb{R}^n$ with an integral convex performance index, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 303–310. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310
6. Kokotović P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. 20, issue 1, pp. 111–113. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100852
7. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Berlin–Heidelberg–New York–Tokio: Springer-Verlag, 1983, IV+161 p. DOI: 10.1007/BFb0043612
8. Kalinin A.I., Semenov K.V. The asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with the multidimensional control, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, issue 3, pp. 407–417.

9. Danilin A.R., Parysheva Yu.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem, *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, issue 1, pp. 478–481. DOI: 10.1134/S1064562409040073
10. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, issue 1, pp. 465–467. DOI: 10.1134/S1064562413040364

Received 04.08.2017

Shaburov Aleksandr Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: alexandershaburov@mail.ru