УДК 517.968

© *Т. К. Юлдашев*

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени и с вырожденным ядром. Используется подход В. А. Ильина для определения слабого обобщенного решения поставленной задачи с начальными и граничными условиями. Применяется метод ряда Фурье, основанный на разделение переменных. Получается счетная система алгебраических уравнений с использованием вырожденности ядра и интегрированием при начальных условиях. Для решения счетной системы алгебраических уравнений и вывода искомой функции из знака определителя модифицируется известный метод Крамера. Это позволяет получить счетную систему нелинейных интегральных уравнений при регулярных значениях спектрального параметра. Доказывается лемма об однозначной разрешимости в банаховом пространстве этой счетной системы нелинейных интегральных уравнений методом сжимающих отображений. Доказывается теорема о сходимости ряда Фурье, полученного как формальное решение поставленной смешанной задачи. При доказательстве леммы и теоремы многократно применяются неравенства Гельдера, Минковского и Бесселя.

Ключевые слова: смешанная задача, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, дифференциальный оператор высокой степени, обобщенное решение.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-10

§ 1. Постановка задачи

Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые по одной переменной являются начальными, а по другим переменным — граничными, часто называются смешанными. Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков [2,3]. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка рассматривались в работах многих авторов, в частности в [4–8].

В настоящей работе рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени и с вырожденным ядром. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались в [9–12].

В прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial x^{4m}}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^{n} U(t,x)-\mu\int_0^T K(t,s)\,U(s,x)\,ds=f(t,x,U(t,x)) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$U(t,x)_{\big|t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}U(t,x)_{\big|t=0}=\varphi_j(x),\ j=\overline{2,n},$$

и граничными условиями Бенара:

$$\begin{gathered}U(t,x)\big|_{x=0}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=0}=\ldots=\frac{\partial^{\,2\,(2nm-1)}}{\partial\,x^{\,2\,(2nm-1)}}U(t,x)\big|_{x=0}=\\=U(t,x)\big|_{x=l}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=l}=\ldots=\frac{\partial^{\,2\,(2nm-1)}}{\partial\,x^{\,2\,(2nm-1)}}U(t,x)\big|_{x=l}=0,\end{gathered}\tag{2}$$

где $f(t,x,U)\in C(D\times R)$, $\varphi_j(x)\in C^{\,4nm+1}(D_l)$, $\varphi_j(x)\big|_{x=0}=\varphi_j''(x)\big|_{x=0}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)\big|_{x=0}=$ $=\varphi_j(x)\big|_{x=l}=\varphi_j''(x)\big|_{x=l}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)\big|_{x=l}=0$, $j=\overline{1,n}$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)\,b_i(s)$, $a_i(t)$, $b_i(s)\in C(D_T)$, μ — действительный спектральный параметр, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0;T]$, $D_l\equiv[0;l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, n, m — фиксированные натуральные числа. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

В данной работе воспользуемся методом Фурье разделения переменных, основанным на поиске решения смешанной задачи (1)–(2) в виде

$$U(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\,\vartheta_i(x),\tag{3}$$

где функции $\vartheta_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_i x$ определены как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x)+\lambda^2\vartheta(x)=0$, $\vartheta(0)=\vartheta(l)=0$, $0<\lambda$, и образуют полную систему ортонормированных функций $\left\{\vartheta_i(x)\right\}_{i=1}^{\infty}$ в $L_2(D_l)$, а $\lambda_i=\dfrac{i\,\pi}{l}$ — соответствующие собственные значения.

Отметим, что метод Фурье разделения переменных для дифференциальных уравнений в частных производных применен во многих работах, в частности в [13–20].

В дальнейшем воспользуемся следующими известными банаховыми пространствами.

Рассматривается пространство $B_2(T)$ последовательностей $\left\{u_i(t)\right\}_{i=1}^{\infty}$ непрерывных на отрезке D_T функций с нормой

$$\left\|u(t)\right\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max_{t\in D_T}\left|u_i(t)\right|\right)^2}<\infty.$$

Рассмотрим координатное гильбертово пространство ℓ_2 числовых последовательностей $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ с нормой

$$\left\|\varphi\right\|_{\ell_2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i|^2}<\infty.$$

Рассмотрим также пространство $L_2(D_l)$ суммируемых с квадратом функций на отрезке D_l с нормой

$$\left\|\vartheta(x)\right\|_{L_2(D_l)}=\sqrt{\int_0^l|\vartheta(y)|^2\,dy}<\infty.$$

Следуя [13,21], определим обобщенное решение смешанной задачи (1)–(2). Обозначается через $\hat{W}_2^n(D)$ класс непрерывных функций $U(t,x)$ двух переменных в замкнутом прямоугольнике D и имеющих в нем частные производные

$$\frac{\partial\,U(t,x)}{\partial\,x},\ \frac{\partial^2\,U(t,x)}{\partial\,x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\,4nm-1}\,U(t,x)}{\partial\,x^{\,4nm-1}},\ \frac{\partial\,U(t,x)}{\partial\,t},\ \frac{\partial^2\,U(t,x)}{\partial\,t^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\,n-1}\,U(t,x)}{\partial\,t^{\,n-1}},$$

каждая из которых принадлежит не только $L_2(D)$, но и $L_2(D_l)$ при фиксированном $t\in D_T$, а также принадлежит $L_2(D_T)$ при фиксированном $x\in D_l$, где

$$L_2(D)=\left\{U(t,x)\colon\ \sqrt{\int_0^T\int_0^l\left|U(t,y)\right|^2dy\,dt}<\infty\right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Функция $U(t,x)\in \hat{W}_2^n(D)$ называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(2), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\Bigg\{U(t,y)\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi+\cdots+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm-2}}\Phi+\frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi+$$
$$+\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^n\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m+2}}\Phi+\cdots+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]-F\Phi\Bigg\}\,dy\,dt=$$
$$=\int_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi+\cdots+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$
$$-\int_0^l\varphi_2(y)\left[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+4m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{4m+2}}\Phi+\cdots+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{\partial^{4nm-5}}{\partial t\,\partial y^{4nm-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm-4}}{\partial y^{4nm-4}}\Phi+\left(\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$
$$+n\,\frac{\partial^{n+8m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{8m+2}}\Phi+\cdots+$$
$$\left.\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{\partial^{4nm+4m-5}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4nm+4m-4}}{\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+$$
$$+\cdots-\int_0^l\varphi_{n-2}(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\,\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{4m+2}}{\partial y^{4m+2}}\Phi+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^{4m+2}}{\partial t^2\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{8m+1}}{\partial t\,\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\partial^{8m+2}}{\partial y^{8m+2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+$$
$$+\int_0^l\varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\,\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right]_{t=0}dy-$$
$$-\int_0^l\varphi_n(y)\left[\Phi+\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy$$

для любой функции $\Phi(t,x)\in C^{n,\,4nm}(D)$, подчиненной следующим условиям:

$$\Phi(t,x)\big|_{x=0}=\Phi_{xx}(t,x)\big|_{x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi(t,x)\big|_{x=0}=$$
$$=\Phi(t,x)\big|_{x=l}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi(t,x)\big|_{x=l}=0,$$
$$\lim_{t\to T}\int_0^l\Phi(t,y)\,dy=\lim_{t\to T}\int_0^l\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)\,dy=\ \ldots\ =\lim_{t\to T}\int_0^l\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi(t,y)\,dy=0,$$

где

$$F\,\Phi=\left[\mu\int_0^T K(t,s)\,U(s,x)\,ds+f(t,x,U(t,x))\right]\,\Phi(t,x).$$

§ 2. Счетная система нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ)

В интегральном тождестве учтем разложение (3). Положим $\Phi(t,x)=h(t)\vartheta_i(x)\in C^{n,\,4nm}(D)$, где функции $\vartheta_i(x)$ образуют полную систему ортонормированных функций в $L_2(D_l)$. Тогда из определения обобщенного решения смешанной задачи (1)–(2) путем интегрирования по частям следует, что

$$\int_0^T h(t)\Bigg[u_i^{(n)}(t)+n\,\lambda_i^{4m}\,u_i^{(n-1)}(t)+\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4m+2}\,u_i^{(n-2)}(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{4m+4}\,u_i^{(n-3)}(t)+\,\cdots\,+\frac{n\,(n-1)\,(n-3)}{3!}\,\lambda_i^{4nm-6}\,u_i'''(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4nm-4}\,u_i''(t)+n\,\lambda_i^{4nm-2}\,u_i'(t)+\lambda_i^{4nm}\,u_i(t)+ \\ +\Big(\lambda_i^{4m}\,u_i^{(n)}(t)+n\,\lambda_i^{8m}\,u_i^{(n-1)}(t)+\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{8m+2}\,u_i^{(n-2)}(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{8m+4}\,u_i^{(n-3)}(t)+\,\cdots\,+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{4nm+4m-6}\,u_i'''(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4nm+4m-4}\,u_i''(t)+n\,\lambda_i^{4nm+4m-2}\,u_i'(t)\Big)- \\ -\mu\int_0^T K(t,s)\,u_i(s)\,ds-\int_0^l f\Big(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\,\vartheta_j(y)\Big)\,\vartheta_i(y)\,dy\Bigg]\,dt=0. \tag{4}$$

Так как $u_i(t)$ имеют обобщенные производные порядка n по t в смысле Соболева на отрезке D_T и $h(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (4) следует

$$u_i^{(n)}(t)+n\,\lambda_i^{4m}\,u_i^{(n-1)}(t)+\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4m+2}\,u_i^{(n-2)}(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{4m+4}\,u_i^{(n-3)}(t)+\,\cdots\,+\frac{n\,(n-1)\,(n-3)}{3!}\,\lambda_i^{4nm-6}\,u_i'''(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4nm-4}\,u_i''(t)+n\,\lambda_i^{4nm-2}\,u_i'(t)+\lambda_i^{4nm}\,u_i(t)+ \\ +\Big(\lambda_i^{4m}\,u_i^{(n)}(t)+n\,\lambda_i^{8m}\,u_i^{(n-1)}(t)+\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{8m+2}\,u_i^{(n-2)}(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{8m+4}\,u_i^{(n-3)}(t)+\,\cdots\,+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\lambda_i^{4nm+4m-6}\,u_i'''(t)+ \\ +\frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda_i^{4nm+4m-4}\,u_i''(t)+n\,\lambda_i^{4nm+4m-2}\,u_i'(t)\Big)= \\ =\mu\int_0^T K(t,s)\,u_i(s)\,ds+\int_0^l f\Big(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\,\vartheta_j(y)\Big)\,\vartheta_i(y)\,dy. \tag{5}$$

С учетом вырожденности ядра уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$\left[\Big(1+\lambda_i^{4m}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_i^{4m}\right]^n u_i(t)= \\ =\mu\int_0^T\sum_{j=1}^{k}a_j(t)\,b_j(s)\,u_i(s)\,ds+\int_0^l f\Big(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\,\vartheta_j(y)\Big)\,\vartheta_i(y)\,dy. \tag{6}$$

Решая счетную систему (6) методом вариации произвольных постоянных, с помощью обозначения

$$c_{ji}=\int_0^T b_j(s)\,u_i(s)\,ds \tag{7}$$

из (6) получаем

$$u_i(t)=\Big(C_{1i}+C_{2i}\,t+C_{3i}\,t^2+C_{4i}\,t^3+\,\cdots\,+C_{ni}\,t^{n-1}\Big)\,\exp\big\{-\theta_{1i}\,t\big\}+ \\ +\int_0^t\left[\mu\sum_{j=1}^{k}a_j(s)\,c_{ji}+\int_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s)\,\vartheta_j(y)\Big)\,\vartheta_i(y)\,dy\right]P_i(t,s)\,ds, \tag{8}$$

где

$$P_i(t,s) = \frac{(n-1)!\,(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^{\,n}}\,\exp\Big\{-\theta_{1i}\,(t-s)\Big\},$$

$$0 < \theta_{1i}^{\,n} = \frac{\lambda_i^{4nm}}{\theta_{0i}^{\,n}} < 1, \quad \theta_{0i}^{\,n} = \Big(1+\lambda_i^{4m}\Big)^n.$$

Для определения коэффициентов $C_{ji}\;(j=\overline{1,n})$ в (8) используются условия

$$u_i(0) = \varphi_{1i},\; u_i'(0) = \varphi_{2i},\; u_i''(0) = \varphi_{3i},\; \ldots,\; u_i^{(n-1)}(0) = \varphi_{ni}.$$

Тогда из (8) получаем следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$\begin{gathered} u_i(t) = w_i(t) + \mu\sum_{j=1}^{k} c_{ji}\int_0^t P_i(t,s)\,a_j(s)\,ds + \\ + \int_0^t\int_0^l f\Bigg(s,y,\sum_{j=1}^{\infty} u_j(s)\,\vartheta_j(y)\Bigg)\,P_i(t,s)\,\vartheta_i(y)\,dy\,ds, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_{ki}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\theta_{1i}^{\,j-k}\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\,\exp\Big\{-\theta_{1i}\,t\Big\}.$$

Подстановка выражения (9) в (7) дает счетную систему из k алгебраических уравнений (ССАУ):

$$c_{ji} + \mu\sum_{\eta=1}^{k} A_{j\eta i}\,c_{\eta i} = B_{ji}(u_i),\; j=\overline{1,k}, \tag{10}$$

где

$$A_{j\eta i} = -\int_0^T b_j(s)\int_0^s P_i(s,\xi)\,a_\eta(\xi)\,d\xi\,ds,$$

$$B_{ji}(u_i) = \int_0^T b_j(s)\Bigg[w_i(s) +$$

$$+\int_0^s\int_0^l f\Bigg(\xi,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(\xi)\,\vartheta_j(y)\Bigg)\,P_i(s,\xi)\,\vartheta_i(y)\,dy\,d\xi\Bigg]ds,\; j=\overline{1,k}. \tag{11}$$

ССАУ (10) однозначно разрешима при любых конечных B_{ji}, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_i(\mu) = \begin{vmatrix} 1+\mu A_{11i} & \mu A_{12i} & \ldots & \mu A_{1ki} \\ \mu A_{21i} & 1+\mu A_{22i} & \ldots & \mu A_{2ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{k1i} & \mu A_{k2i} & \ldots & 1+\mu A_{kki} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Определители $\Delta_i(\mu)$ в (12) есть многочлены относительно μ степени не выше k. Каждая из счетной системы уравнений $\Delta_i(\mu) = 0$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Через Λ обозначим множество корней счетной системы алгебраических уравнений $\Delta_i(\mu) = 0$. Ясно, что это множество имеет счетное число элементов. При других значениях параметра, то есть при $\mu \in (-\infty;\infty)\setminus\Lambda$, условие (12) выполняется. Эти значения параметра μ назовем регулярными. Следовательно, для таких регулярных значений μ система (10) имеет единственное решение при любой конечной правой части.

Тогда решения ССАУ (10) записываются в виде

$$c_{ji} = \frac{\Delta_{ji}(\mu,u_i)}{\Delta_i(\mu)},\; j=\overline{1,k}, \tag{13}$$

где $\Delta_{ji}(\mu, u_i) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+\mu A_{11i} & \dots & \mu A_{1(j-1)i} & B_{1i}(u_i) & \mu A_{1(j+1)i} & \dots & \mu A_{1ki} \\ \mu A_{21i} & \dots & \mu A_{2(j-1)i} & B_{2i}(u_i) & \mu A_{2(j+1)i} & \dots & \mu A_{2ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{k1i} & \dots & \mu A_{k(j-1)i} & B_{ki}(u_i) & \mu A_{k(j+1)i} & \dots & 1+\mu A_{kki} \end{vmatrix}, \ j=\overline{1,k}. \tag{14}$$

Среди элементов определителей $\Delta_{ji}(\mu, u_i)$ находятся B_{ji}. В свою очередь, в составе B_{ji} находятся неизвестные функции $u_i(t)$.

Функцию (11) запишем в следующем виде:

$$B_{ji}(u_i) = B_{ji}(w_i) + B_{ji}(f_i),$$

где

$$B_{ji}(w_i) = \int_0^T b_j(s)\, w_i(s)\, ds,$$

$$B_{ji}(f_i) = \int_0^T b_j(s) \int_0^s \int_0^l f\left(\xi, y, \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\xi)\, \vartheta_j(y)\right) P_i(s,\xi)\, \vartheta_i(y)\, dy\, d\xi ds, \ j=\overline{1,k}.$$

В этом случае согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{ji}(\mu, u_i) = \Delta_{ji}(\mu, w_i) + \Delta_{ji}(\mu, f_i),$$

где определители $\Delta_{ji}(\mu, w_i)$ и $\Delta_{ji}(\mu, f_i)$ получаются из (14) путем замены столбца $B_{ji}(u_i)$ на $B_{ji}(w_i)$ и $B_{ji}(f_i)$ соответственно. Тогда вместо (13) имеем

$$c_{ji} = \frac{\Delta_{ji}(\mu, w_i)}{\Delta_i(\mu)} + \frac{\Delta_{ji}(\mu, f_i)}{\Delta_i(\mu)}, \ j=\overline{1,k}.$$

Подставляя последнее равенство в (9), имеем следующую ССНИУ:

$$u_i(t) = \Im(t; u_i) \equiv F_i(t) + \mu \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ji}(\mu, f_i)}{\Delta_i(\mu)}\, G_{ji}(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} u_j(s)\, \vartheta_j(y)\right) P_i(t,s)\, \vartheta_i(y)\, dy\, ds, \tag{15}$$

где

$$F_i(t) = w_i(t) + \mu \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ji}(\mu, w_i)}{\Delta_i(\mu)}\, G_{ji}(t), \ G_{ji}(t) = \int_0^t P_{ji}(t,s)\, a_j(s)\, ds.$$

§ 3. Однозначная разрешимость ССНИУ (15)

Л е м м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия для регулярных значений:*

1) *Числовые последовательности* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,n}$, *такие, что* $\|F(t)\|_{B_2(T)} \leqslant \gamma_1 < \infty$;

2) $\left\|\dfrac{1}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2} = \beta_0 < \infty$; $\|\Delta_j(\mu, \gamma_1)\|_{\ell_2} < \infty$;

3) $\delta_0 = \max_{t \in D_T} \int_0^t \|f(s,x,u)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$, $0 < \delta_0 = \mathrm{const}$;

4) $|f(s,x,u) - f(s,x,\vartheta)| \leqslant \delta_1(t,x)\, |u - \vartheta|$;

5) $\delta_2 = \max_{t \in D_T} \int_0^t \|\delta_1(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$, $0 < \delta_2 = \mathrm{const}$;

6) $\rho = \gamma_2^2\, \delta_2 \left[1 + \beta_0 |\mu| \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_{2j}\, \gamma_{3j} \left\|\overline{\Delta}_j(\mu)\right\|_{\ell_2}\right] < 1$,

где

$$\overline{\Delta}_{ji}(\mu)=\begin{vmatrix} 1+\mu\,A_{11i} & \ldots & \mu\,A_{1(j-1)i} & \gamma_{31} & \mu\,A_{1(j+1)i} & \ldots & \mu\,A_{1ki} \\ \mu\,A_{21i} & \ldots & \mu\,A_{2(j-1)i} & \gamma_{32} & \mu\,A_{2(j+1)i} & \ldots & \mu\,A_{2ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\,A_{k1i} & \ldots & \mu\,A_{k(j-1)i} & \gamma_{3k} & \mu\,A_{k(j+1)i} & \ldots & 1+\mu\,A_{kki} \end{vmatrix}.$$

$\gamma_2=\big\|P(t,s)\big\|_{B_2(T)}$, $\gamma_{3j}=\int_0^T\big|b_j(t)\big|\,dt$, $j=\overline{1,k}$.

Тогда ССНИУ (15) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(T)$.

Доказательство. Используется метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} u_i^0(t)=F_i(t),\ t\in D_T, \\ u_i^{\tau+1}(t)=\Im\big(t;u_i^\tau\big),\ t\in D_T, \end{cases} \tag{16}$$

$\tau=0,1,2,\ldots$.

В силу постановки задачи и условий леммы справедливы оценки

$$\big\|P(t,s)\big\|_{B_2(T)}\leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\theta_{0i}^{2n}}}=\gamma_2<\infty,\quad \theta_{0i}^n=\Big(1+\lambda_i^{4m}\Big)^n,$$

где

$$0<M=(n-1)\,!\max_{(t,\,s)\in D_T\times D_T}(t-s)^{n-1}\exp\big\{-\theta_{1i}\,(t-s)\big\}<\infty,\quad 0<\theta_{1i}<1;$$

$$\left\|\frac{\Delta_j(\mu,F(t))}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}\leqslant\left\|\frac{\Delta_j(\mu,\gamma_1)}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}\leqslant\|\Delta_j(\mu,\gamma_1)\|_{\ell_2}\left\|\frac{1}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}=\beta_{1j}<\infty;$$

$$\big\|G_j(t)\big\|_{B_2(T)}\leqslant\big\|P(t,s)\big\|_{B_2(T)}\left\|\int_0^t a_j(s)\,ds\right\|_C\leqslant\gamma_2\,\beta_{2j}<\infty.$$

Используя неравенства Гельдера и Бесселя, в силу условий леммы получаем оценку

$$\big\|B_j(f)\big\|_{\ell_2}\leqslant\left|\int_0^T b_j(t)\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l f\big(s,y,u\big)\,P_i(t,s)\,\vartheta_i(y)\,dy\,ds\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\big\|P(t,s)\big\|_{B_2(T)}\max_{t\in D_T}\int_0^t\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\int_0^l\big|f\big(s,y,u\big)\big|\cdot\big|\vartheta_i(y)\big|\,dy\Big]^2}\,ds\int_0^T\big|b_j(t)\big|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_2\,\delta_0\int_0^T\big|b_j(t)\big|\,dt=\gamma_2\,\delta_0\,\gamma_{3j}<\infty,\ j=\overline{1,k}, \tag{17}$$

где $\gamma_{3j}=\int_0^T\big|b_j(t)\big|\,dt$.

Отсюда следует, что имеет место и следующая оценка:

$$\left\|\frac{\Delta_j(\mu,f(t))}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}\leqslant\big\|\Delta_j(\mu,f(t))\big\|_{\ell_2}\left\|\frac{1}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}=\beta_{3j}<\infty,\ j=\overline{1,k}. \tag{18}$$

Для оценки по норме первой разности с учетом (17) и (18) из (16) получаем оценку

$$\big\|u^1(t)-u^0(t)\big\|_{B_2(T)}\leqslant|\mu|\sum_{j=1}^{k}\left\|\frac{\Delta_j(\mu,f(t))}{\Delta(\mu)}\right\|_{\ell_2}\big\|G_j(t)\big\|_{B_2(T)}+$$

$$+\big\|P(t,s)\big\|_{B_2(T)}\max_{t\in D_T}\int_0^t\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\int_0^l\big|f\big(s,y,u\big)\big|\cdot\big|\vartheta_i(y)\big|\,dy\Big]^2}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2 \left(|\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{3j}\, \beta_{2j} + \delta_0 \right). \tag{19}$$

С учетом предыдущих оценок по норме для произвольного натурального числа получим оценку

$$\left\| u^{\tau+1}(t) - u^{\tau}(t) \right\|_{B_2(T)} \leqslant \beta_0\, \gamma_2\, |\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{2j} \left\| \Delta_j(\mu, u^{\tau}) - \Delta_j(\mu, u^{\tau-1}) \right\|_{\ell_2} +$$

$$+ \gamma_2 \max_{t \in D_T} \int_0^t \sqrt{\int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{\tau}(s)\, \vartheta_i(y)\right) - f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{\tau-1}(s)\, \vartheta_i(y)\right) \right|^2 dy\, ds}. \tag{20}$$

Каждое слагаемое в правой части (20) будем оценивать отдельно. Аналогично (17), используя неравенства Гельдера и Бесселя, в силу условий леммы получаем оценку

$$\left\| B_j\left(f^{\tau} - f^{\tau-1}\right) \right\|_{\ell_2} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2\, \gamma_{3j} \max_{t \in D_T} \int_0^t \sqrt{\int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{\tau}(s)\, \vartheta_i(y)\right) - f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{\tau-1}(s)\, \vartheta_i(y)\right) \right|^2 dy\, ds} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2\, \gamma_{3j} \max_{t \in D_T} \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \left| u_i^{\tau}(s) - u_i^{\tau-1}(s) \right| \int_0^l \delta_1(s, y) \left| \vartheta_i(y) \right| dy\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2\, \gamma_{3j} \max_{t \in D_T} \int_0^t \left\| u_i^{\tau}(s) - u_i^{\tau-1}(s) \right\|_{B_2(T)} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^l \delta_1(s, y) \left| \vartheta_i(y) \right| dy \right]^2} ds \leqslant$$

$$\leqslant \delta_2\, \gamma_2\, \gamma_{3j} \left\| u_i^{\tau}(t) - u_i^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{21}$$

Тогда для разности $\Delta_j(\mu, u^{\tau}) - \Delta_j(\mu, u^{\tau-1})$ с учетом (21) справедлива оценка по норме

$$\left\| \Delta_j(\mu, u^{\tau}) - \Delta_j(\mu, u^{\tau-1}) \right\|_{\ell_2} \leqslant$$

$$\leqslant \delta_2\, \gamma_2\, \gamma_{3j} \left\| u_i^{\tau}(t) - u_i^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)} \left\| \overline{\Delta}_j(\mu) \right\|_{\ell_2}, \tag{22}$$

где

$$\overline{\Delta}_{ji}(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu\, A_{11i} & \dots & \mu\, A_{1(j-1)i} & \gamma_{31} & \mu\, A_{1(j+1)i} & \dots & \mu\, A_{1ki} \\ \mu\, A_{21i} & \dots & \mu\, A_{2(j-1)i} & \gamma_{32} & \mu\, A_{2(j+1)i} & \dots & \mu\, A_{2ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\, A_{k1i} & \dots & \mu\, A_{k(j-1)i} & \gamma_{3k} & \mu\, A_{k(j+1)i} & \dots & 1 + \mu\, A_{kki} \end{vmatrix},$$

$\gamma_{3j} = \int_0^T \left| b_j(t) \right| dt$, $j = \overline{1, k}$.

Подстановка (22) в (20) и учет (21) при этом дают

$$\left\| u^{\tau+1}(t) - u^{\tau}(t) \right\|_{B_2(T)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta_0\, \delta_2 \gamma_2^2\, |\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{2j}\, \gamma_{3j} \left\| \overline{\Delta}_j(\mu) \right\|_{\ell_2} \left\| u^{\tau}(t) - u^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+ \delta_2 \gamma_2^2 \left\| u^{\tau}(t) - u^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)} = \rho \left\| u^{\tau}(t) - u^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)}, \tag{23}$$

где $\rho = \gamma_2^2\, \delta_2 \left[1 + \beta_0 |\mu| \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_{2j}\, \gamma_{3j} \left\| \overline{\Delta}_j(\mu) \right\|_{\ell_2} \right]$.

Так как по условию леммы $\rho < 1$, то для произвольного натурального числа τ из (23) получаем оценку

$$\left\| u^{\tau+1}(t) - u^{\tau}(t) \right\|_{B_2(T)} < \left\| u^{\tau}(t) - u^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)}. \tag{24}$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (24) следует, что оператор в правой части (15) является сжимающим. Из оценок (19) и (24) заключаем, что для оператора в правой части (15) существует единственная неподвижная точка (см., например [22, с. 389–401]). Следовательно, ССНИУ (15) имеет единственное решение: $u(t) \in B_2(T)$.

§ 4. Разрешимость смешанной задачи (1)–(2)

Подстановка ССНИУ (15) в ряд Фурье (3) дает формальное решение смешанной задачи (1)–(2):

$$U(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(x) \left[F_i(t) + \mu \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ji}(\mu, f_i)}{\Delta_i(\mu)} G_{ji}(t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} u_j(s) \vartheta_j(y)\right) P_i(t,s) \vartheta_i(y) \, dy \, ds \right]. \tag{25}$$

Покажем, что ряд (25) сходится абсолютно и равномерно в области D. С этой целью, применяя к (25) неравенства Минковского и учитывая оценки (17) и (18), получаем

$$\left| U(t,x) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left| \vartheta_i(x) \right| \left| F_i(t) + \mu \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ji}(\mu, f_i)}{\Delta_i(\mu)} G_{ji}(t) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} u_j(s) \vartheta_j(y)\right) P_i(t,s) \vartheta_i(y) \, dy \, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \left\{ \left\| F(t) \right\|_{B_2(T)} + |\mu| \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\Delta_j(\mu, f(t))}{\Delta(\mu)} \right\|_{\ell_2} \left\| G_j(t) \right\|_{B_2(T)} + \right.$$

$$\left. + \left\| P(t,s) \right\|_{B_2(T)} \max_{t \in D_T} \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(s, y, u\right) \right| \cdot \left| \vartheta_i(y) \right| dy \right]^2} \, ds \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\gamma_1 + \gamma_2 \left(|\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{3j} \beta_{2j} + \delta_0 \right) \right] < \infty.$$

Таким образом, нами доказано, что справедлива следующая

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия леммы. Тогда смешанная задача* (1)–(2) *однозначна разрешима для всех регулярных значений* μ *в области* D. *Обобщенное решение этой задачи представляется в виде ряда Фурье* (25).

Список литературы

1. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
2. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 248 с.
3. Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 2. С. 5–28. DOI: 10.14529/mmp140201
4. Похожаев С.И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Математический сборник. 1982. Т. 117 (159). № 2. С. 251–265.
5. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973. 219 с.

6. Тодоров Т.Г. О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка // Вестник Ленинградского государственного университета. 1975. Т. 19. С. 56–63.
7. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 112–123.
8. Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 69–75.
9. Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18. № 4. С. 489–506.
10. Юлдашев Т.К. Обратная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2016. № 3. С. 19–33.
11. Юлдашев Т.К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 644–655. DOI: 10.14498/vsgtu1502
12. Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. Issue 3. P. 547–553. DOI: 10.1134/S199508021703026X
13. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 2 (92). С. 97–154.
14. Лажетич Н. О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 5. С. 682–694.
15. Мартемьянова Н.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с переменным потенциалом // Известия вузов. Математика. 2015. № 11. С. 44–53.
16. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.
17. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. 2011. Т. 89. Вып. 4. С. 596–602. DOI: 10.4213/mzm8462
18. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.
19. Эгамбердиев У., Апаков Ю.П. О задаче Дирихле для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерной области // Известия АН Узб ССР. Сер. Физико-математические науки. 1989. № 3. С. 51–56.
20. Юлдашев Т.К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2016. Вып. 1 (47). С. 119–128.
21. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1699–1711.
22. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Поступила в редакцию 13.05.2017

Юлдашев Турсун Камалдинович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, 660014, Россия, г. Красноярск, пр. им. газеты «Красноярский рабочий», 31.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

T. K. Yuldashev

Generalized solvability of the mixed value problem for a nonlinear integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 121–132 (in Russian).

Keywords: mixed value problem, nonlinear integro-differential equation, degenerate kernel, differential operator of higher degree, generalized solvability.

MSC2010: 35A02, 35M10, 35S05

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-10

This paper is concerned with the generalized solvability of a mixed problem for a nonlinear integro-differential equation with a pseudo-parabolic operator of an arbitrary natural degree and with a degenerate kernel. V. A. Il'in's approach to the definition of a weak generalized solution of the problem posed with initial and boundary conditions is used. A Fourier series method based on the separation of variables is applied. A countable system of algebraic equations is obtained using the degeneracy of the kernel and by integration under initial conditions. The well-known Cramer method is modified to solve the countable system of algebraic equations and to derive the desired function from the sign of the determinant. This makes it possible to obtain a countable system of nonlinear integral equations for regular values of the spectral parameter. First, a lemma on the unique solvability of this countable system of nonlinear integral equations in a Banach space is proved by the method of contracting mappings. Next, a theorem on the convergence of the Fourier series obtained as a formal solution of the given mixed problem is proved. In the proofs of the lemma and the theorem, the Holder, Minkowski and Bessel inequalities are repeatedly applied.

REFERENCES

1. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* (Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions), Moscow: Nauka, 1986, 336 p.
2. Algazin S.D., Kiiko I.A. *Flatter plastin i obolochek* (Flutter of plates and shells), Moscow: Nauka, 2006, 248 p.
3. Zamyshlyaeva A.A. The higher-order Sobolev-type models, *Bulletin of the South Ural State University, Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28 (in Russian). DOI: 10.14529/mmp140201
4. Pokhozhaev S.I. On the solvability of quasilinear elliptic equations of arbitrary order, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 257–271. DOI: 10.1070/SM1983v045n02ABEH002598
5. Skrypnik I.V. *Nelineinye ellipticheskie uravneniya vysshego poryadka* (Nonlinear elliptic equations of higher order), Kiev: Naukova dumka, 1973, 219 p.
6. Todorov T.G. On the continuity of generalized bounded solutions of quasi-linear elliptic equations of high order, *Vestnik Leningradskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1975, vol. 19, pp. 56–63 (in Russian).
7. Yuldashev T.K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, issue 1, pp. 105–116. DOI: 10.1134/S0965542512010150
8. Yuldashev T.K. Inverse problem for nonlinear integral differential equation with hyperbolic operator of a high degree, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2013, vol. 5, issue 1, pp. 69–75 (in Russian).
9. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary-value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel, *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 220, no. 4, pp. 440–460. DOI: 10.1007/s10958-016-3194-2
10. Yuldashev T.K. Inverse problem for an ordinary integro-differential equation with degenerate kernel and nonlocal integral conditions, *Vestn. Tver. Gos. Univ. Ser. Prikl. Mat.*, 2016, no. 3, pp. 19–33 (in Russian).
11. Yuldashev T.K. An ordinary integro-differential equation with a degenerate kernel and an integral condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 644–655 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1502
12. Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, issue 3, pp. 547–553. DOI: 10.1134/S199508021703026X
13. Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. DOI: 10.1070/RM1960v015n02ABEH004217
14. Lazhetich N.L. On existence of classic solution of mixed problem for a one dimensional hyperbolic equation of second order, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 683–695.
15. Martem'yanova N.V. The Dirichlet problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with variable potential, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 11, pp. 36–44. DOI: 10.3103/S1066369X15110043
16. Moiseev E.I. On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1105–1112.
17. Sabitov K.B. Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain, *Mathematical Notes*, 2011, vol. 89, no. 3–4, pp. 562–567. DOI: 10.1134/S0001434611030278
18. Chernyatin V.A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Justification of Fourier method in mixed problem for partial equations), Moscow: Moscow State University, 1991, 112 p.

19. Egamberdiev U., Apakov Yu.P. On Dirichlet problem for mixed elliptic-hyperbolic equation in three dimensional domain, *Izvestiya Akad. Nauk Uzb. SSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1989, no. 3, pp. 51–56 (in Russian).
20. Yuldashev T.K. On a mixed differential equation of fourth order, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2016, issue 1 (47), pp. 119–128 (in Russian).
21. Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, issue 12, pp. 1775–1786. DOI: 10.1134/S0012266106120123
22. Trenogin V.A. *Funktsional'nyi analiz* (Functional analysis), Moscow: Nauka, 1980, 495 p.

Received 13.05.2017

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Reshetnev Siberian State Aerospace University, pr. im. Gazety Krasnoyarskii Rabochii, 31, Krasnoyarsk, 660014, Russia.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com