

УДК 519.21

© *А. В. Беляев, Т. В. Первалова*

## **СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ И ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ**

Целью исследования, представленного в данной статье, является анализ возможных динамических режимов детерминированной и стохастической модели Лотки–Вольтерры. В зависимости от двух параметров системы строится карта режимов. Изучаются параметрические зоны существования устойчивых равновесий, циклов, замкнутых инвариантных кривых, а также хаотических аттракторов. Описываются бифуркации удвоения периода, Неймарка–Саккера и кризиса. Демонстрируется сложная форма бассейнов притяжения нерегулярных аттракторов (замкнутой инвариантной кривой и хаоса). Помимо детерминированной системы подробно изучается стохастическая, описывающая влияние внешнего случайного воздействия. Здесь ключевым является нахождение чувствительности таких сложных аттракторов, как замкнутая инвариантная кривая и хаос. В случае хаоса дан алгоритм нахождения критических линий, описывающих границу хаотического аттрактора. Опираясь на найденную функцию стохастической чувствительности, строятся доверительные полосы, позволяющие описать разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора.

*Ключевые слова:* популяционная динамика, стохастическая чувствительность, хаос, замкнутая инвариантная кривая.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-02

### **Введение**

В настоящее время изучение систем, описывающих поведение взаимодействующих популяций, привлекает внимание многих исследователей. Существует множество моделей, учитывающих различные факторы взаимодействия, такие как совместная охота, разделение популяции по полу или возрасту [1–5]. А также традиционно используются различные функции для описания взаимодействия популяции жертв и хищников (функции Холлинга различного типа) [6]. В моделях с дискретным временем даже на первый взгляд простейший вид нелинейности приводит к возникновению различных сложных режимов динамики [7–9]. Здесь главным инструментом становится математическая теория бифуркаций как аттракторов, так и их бассейнов [10].

Однако существование живых систем невозможно без влияния на их деятельность различных факторов, обладающих случайной природой. Случайные составляющие чаще всего подразделяют на внешние факторы (аддитивный шум) и внутренние (параметрический шум) [11–13]. И здесь помимо методов прямого численного моделирования и эмпирического анализа вероятностных характеристик полезным является метод функции стохастической чувствительности и связанный с ней метод доверительных областей. Данный метод широко применяется для описания различных индуцированных шумом феноменов [14–19].

Целью данного исследования является анализ возможных режимов, в первую очередь, детерминированной модели Лотки–Вольтерры с дискретным временем в зависимости от параметров системы. Ранее в работах [7, 8, 22] проводился параметрический анализ существования и устойчивости равновесий данной модели с построением однопараметрических бифуркационных диаграмм и примеров фазовых портретов. В работе [22] помимо этого

найлены условия для возникновения Флип бифуркации и Неймарка–Саккера, а также описывается метод управления хаосом. В нашей работе главный акцент исследований делается на изучении замкнутых инвариантных кривых и хаотических аттракторов. Мы демонстрируем бифуркационный сценарий на двухпараметрической карте режимов и показываем сложную структуру бассейнов притяжения аттракторов.

Наряду с детерминированной системой в данной работе мы подробно изучаем стохастическую, описывающую влияние внешнего случайного воздействия. Ранее данная модель не изучалась в стохастической интерпретации. Здесь, опираясь на технику функции стохастической чувствительности [20, 21], мы приводим анализ разброса случайных состояний. Новизной данной работы является применение метода функции стохастической чувствительности в анализе отклика квазипериодического (замкнутой инвариантной кривой) и хаотического аттракторов на вносимые случайные возмущения.

## § 1. Детерминированная модель

В данной работе рассматривается модель динамики популяции [22], заданная следующим двумерным отображением:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - bx_n y_n, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_n$  — плотность численности жертв,  $y_n$  — плотность численности хищников (исходя из биологического смысла  $x_n \geq 0$  и  $y_n \geq 0$ ),  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — положительные бифуркационные параметры системы. Для последующего исследования модели зафиксируем значения параметров  $b = 1$  и  $c = 0.2$ .

Данная модель (1) имеет три равновесия:

$$M_0(0; 0), \quad M_1\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}; 0\right), \quad M_2\left(\frac{c + 1}{d}; \frac{\alpha(d - 1 - c) - d}{bd}\right).$$

На рис. 1 изображены зоны устойчивости равновесий системы (1) в плоскости параметров  $\alpha$  и  $d$ . Также красным (синим), черным, зеленым и пурпурным построены бифуркационные кривые Транскритическая, Неймарка–Саккера, Флип и Удвоения периода, соответственно<sup>1</sup>.

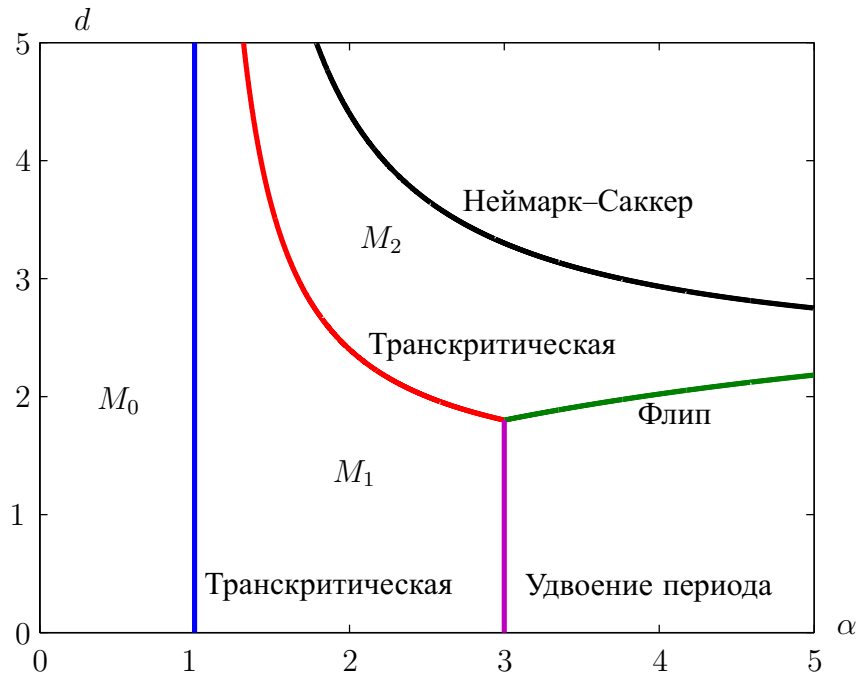
В зонах параметра, где равновесия являются неустойчивыми, наблюдаются различные режимы — периодические (циклы всевозможных периодов), квазипериодические (замкнутые инвариантные кривые) и хаотические.

На рис. 2 разными цветами представлены различные динамические режимы данной системы. Оттенками зеленого показаны области устойчивых равновесий, синий цвет соответствует зоне параметров, где динамика системы расходится, остальными цветами показаны циклы разных периодов до 17. Белые зоны на диаграмме отвечают циклам периодов выше, чем 17, замкнутым инвариантным кривым или хаотическим аттракторам. Видно, что в зависимости от сочетания бифуркационных параметров реализуются два бифуркационных сценария. Первый, соответствующий зоне параметров  $\alpha > 3$  и  $d < 2$ , представляет собой классический каскад бифуркации удвоения периода. Второй, соответствующий зоне параметров  $\alpha > 1.5$  и  $d > 2$ , — бифуркации Неймарка–Саккера (рождение замкнутых инвариантных кривых) с возникновением зон периодических режимов (языки Арнольда). Сравним более детально эти две зоны параметров.

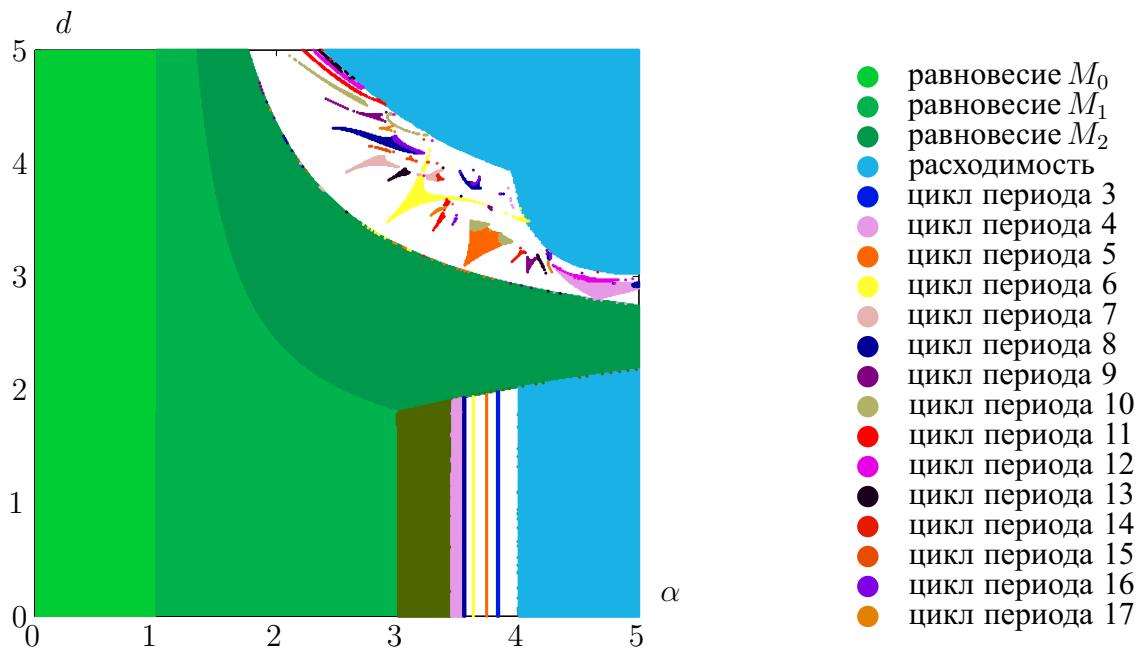
На рис. 3 для двух значений параметра  $d$  изображены бифуркационные диаграммы (серый цвет), старший показатель Ляпунова (синий цвет) и младший показатель (красный).

<sup>1</sup>Доказательство результата по устойчивости равновесий и возникновению бифуркаций приведено в [22].





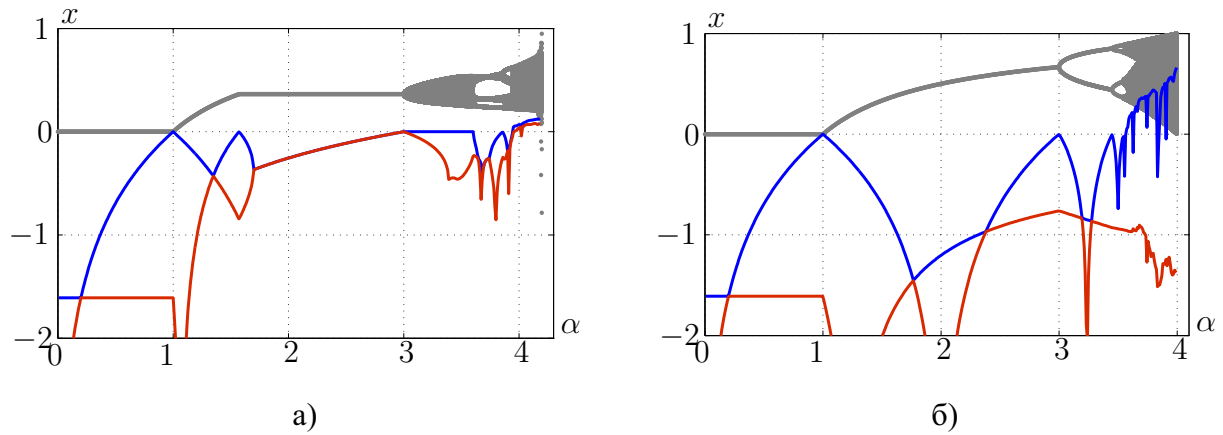
**Рис. 1.** Параметрические зоны устойчивости равновесий системы (1).  
 Здесь Транскритическая (красная):  $d = \frac{\alpha(1+c)}{\alpha-1}$ , Флип:  $d = \frac{\alpha(1+c)(3+c)}{3+\alpha+c(\alpha-1)}$ , Неймарк-Саккер:  
 $d = \frac{\alpha(2+c)}{\alpha-1}$



**Рис. 2.** Карта режимов системы (1)

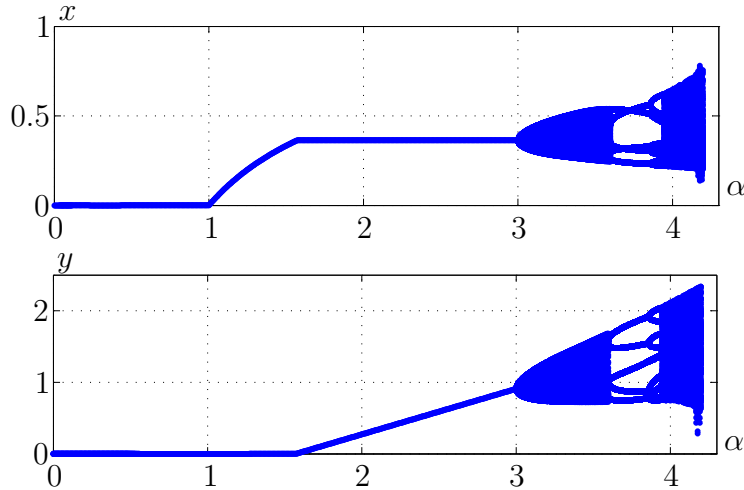
Показатель Ляпунова позволяет определять, является ли поведение системы регулярным или хаотичным. Области изменения параметра  $\alpha$ , где график показателя отрицательный, соответствуют регулярному аттрактору, а положительные области — хаотическому аттрактору.

тору. В точках бифуркаций показатель Ляпунова равен нулю.



**Рис. 3.** Показатели Ляпунова при: а)  $d = 3.3$ ; б)  $d = 1$

На рис. 4 показана бифуркационная диаграмма при изменении параметра  $\alpha$  для фиксированного значения параметра  $d = 3.3$ . При  $0 < \alpha < 3$  аттрактором системы всегда является одно из равновесий —  $M_0$  (при  $0 < \alpha \leq 1$ ),  $M_1$  (при  $1 < \alpha \leq 1.6$ ) и  $M_2$  (при  $1.6 < \alpha \leq 3$ ). Далее в области  $3 < \alpha \leq 3.6$  наблюдается замкнутая инвариантная кривая. Затем в зоне  $3.6 < \alpha \leq 3.9$  возникает цикл периода 5 со своим каскадом бифуркации удвоения периода, который сменяется хаотическим аттрактором при  $\alpha > 3.9$ . Легко заметить, что, если значение бифуркационного параметра  $\alpha > 1.6$ , то в системе возможно сосуществование популяции жертв и хищников.



**Рис. 4.** Бифуркационная диаграмма для  $d = 3.3$

Рис. 5 представляет бифуркационную диаграмму при изменении параметра  $\alpha$  для фиксированного значения параметра  $d = 1$ . В этом случае поведение жертв соответствует логистическому отображению. Аналогично рис. 4 при  $0 < \alpha < 3$  аттрактором системы всегда является равновесие. Затем происходит каскад бифуркаций удвоения периода, который в конечном итоге приводит систему к хаотическому режиму. Стоит заметить, что в отличие от случая  $d = 3.3$  при данном значении параметра  $d$  хищники не имеют шанса на выживание, и существует только популяция жертв.

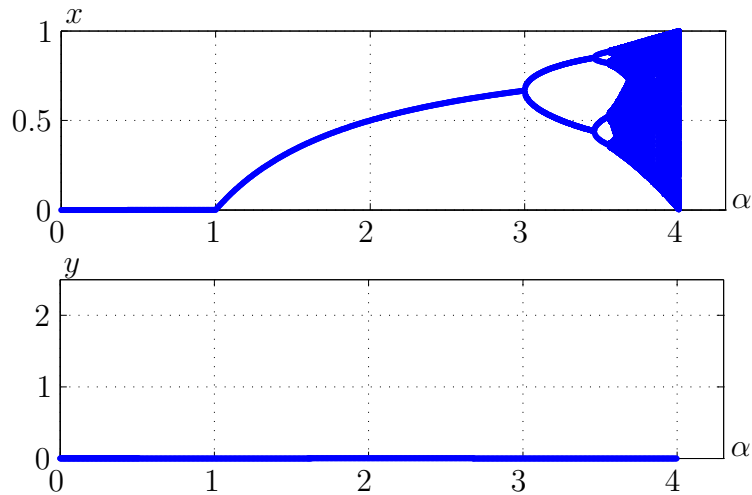


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для  $d = 1$

На рис. 6 представлены примеры аттракторов системы (1) со своими бассейнами притяжения. Синим цветом изображен сам аттрактор, серый цвет соответствует точкам системы, с которых запущенный итерационный процесс сходится на бесконечность, то есть расходится. Бирюзовый цвет отвечает за область точек, итерационный процесс которых сходится на аттрактор — замкнутая инвариантная кривая в случае а) или хаос, изображенный в случае б). Ромб красного цвета — равновесие  $M_1$ . Синяя выколотая точка — равновесие  $M_2$ . Черная звезда в начале координат — равновесие  $M_0$ . Видно, что при увеличении параметра  $\alpha$  изменяется не только вид аттрактора, но и его бассейн притяжения.

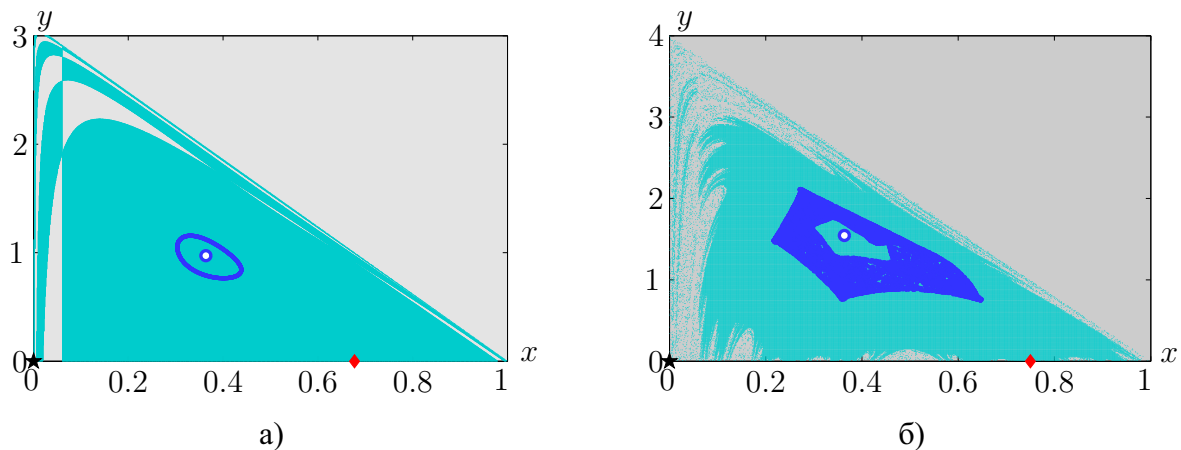


Рис. 6. Бассейны притяжения при  $d = 3.3$  для: а) ЗИКа при  $\alpha = 3.1$ ; б) хаоса при  $\alpha = 4$

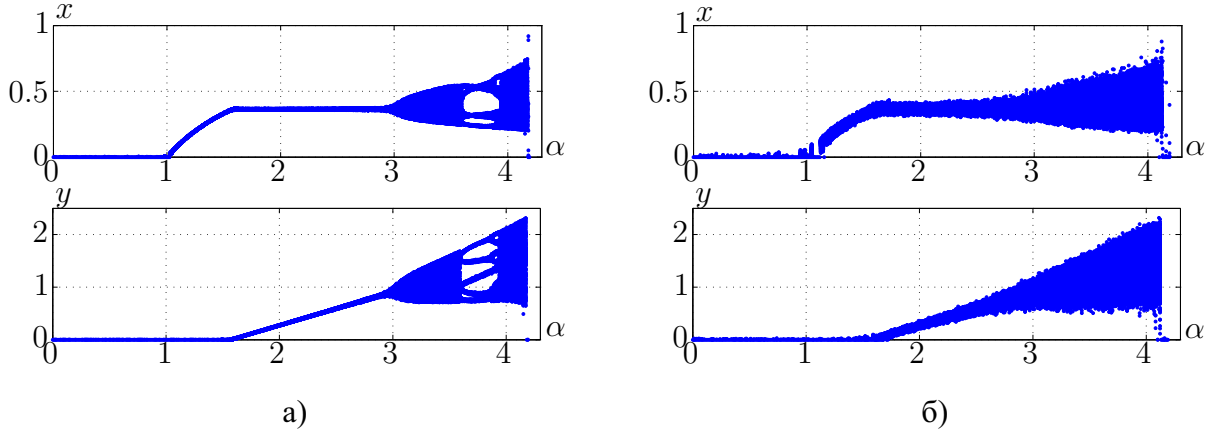
## § 2. Стохастическая модель

В данном разделе описывается стохастический вариант модели (1), учитывающий влияние внешнего случайного шума:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - bx_n y_n + \varepsilon \xi_{n,1}, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n + \varepsilon \xi_{n,2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — интенсивность шума,  $\xi_n$  — двумерный не коррелированный случайный процесс, распределенный по нормальному закону с параметрами  $E\xi_n = 0$ ,  $E\xi_n\xi_n^T = I$ ,  $E\xi_n\xi_k^T = 0$  ( $n \neq k$ ).

На рис. 7 изображены случайные состояния системы (2) под действием аддитивного шума для разной интенсивности. При увеличении интенсивности шума (смотри 7, б) разброс случайных состояний увеличивается, а также размывается структура циклов, и сливаются границы внутри хаотического аттрактора.



**Рис. 7.** Стохастические диаграммы при  $d = 3.3$  для: а)  $\varepsilon = 0.001$ ; б)  $\varepsilon = 0.01$

Далее в работе на основе техники функции стохастической чувствительности приводится изучение разброса случайных состояний вокруг аттракторов детерминированной системы (замкнутой инвариантной кривой [20] и хаоса [21]).

### § 2.1. Стохастическая чувствительность замкнутой инвариантной кривой

Пусть детерминированная система записана в общем виде

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned} \quad (3)$$

и имеет экспоненциально устойчивую гладкую замкнутую инвариантную кривую (ЗИК)  $\Gamma$ . Зафиксируем произвольную точку  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$  и рассмотрим решение системы с начальным условием  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}, \bar{y})$ . В силу квазипериодичности замкнутой инвариантной кривой, точки решения лежат всюду плотно. Это значит, что для любого  $\delta > 0$  найдется такое  $k$ , что выполняется условие  $\rho((\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}) - (\bar{x}_1, \bar{y}_1)) < \delta$  (здесь  $\rho$  — выбранная метрика). Поэтому можно рассматривать набор точек  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  как элементы цикла периода  $k$ , являющийся  $\delta$ -аппроксимацией исходной замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma$ . Для каждой точки  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  этой  $\delta$ -аппроксимации можно найти матрицу чувствительности  $M_i$ , которая дает приближение  $\varepsilon^2 M_i$  для ковариационной матрицы стационарного вероятностного распределения состояний стохастической системы в ортогональной к точке  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  гиперплоскости  $\Pi_i$ .

**У т в е р ж д е н и е 1.** <sup>2</sup> Матрица для первого элемента  $\delta$ -аппроксимацией замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma$  является решением следующего уравнения:

$$M_1 = P_1 [\Phi M_1 \Phi^T + Q] P_1,$$

где  $P_t$  — это матрица проекций на гиперплоскость  $\Pi_t$ ,  $\Phi = F_k P_k F_{k-1} \dots P_2 F_1$ ,  $Q = Q^{(k)}$  и

<sup>2</sup>Доказательство данного утверждения приведено в [20].

$$F_t = \begin{pmatrix} f'_x(\bar{x}_t, \bar{y}_t) & f'_y(\bar{x}_t, \bar{y}_t) \\ g'_x(\bar{x}_t, \bar{y}_t) & g'_y(\bar{x}_t, \bar{y}_t) \end{pmatrix}.$$

Матрица  $Q^{(k)}$  может быть найдена рекуррентно:

$$Q^{(0)} = 0,$$

$$Q^{(j)} = P_{j-1} [F_j Q^{(j-1)} F_j^T + G_j] P_{j+1} (j = 1, \dots, k-1),$$

$$Q^{(k)} = F_k Q^{(k-1)} F_k^T + G_k.$$

Здесь  $G_j$  — матрица вносимого шума, для случая аддитивного шума это единичная матрица ( $j = 1, \dots, k$ ).

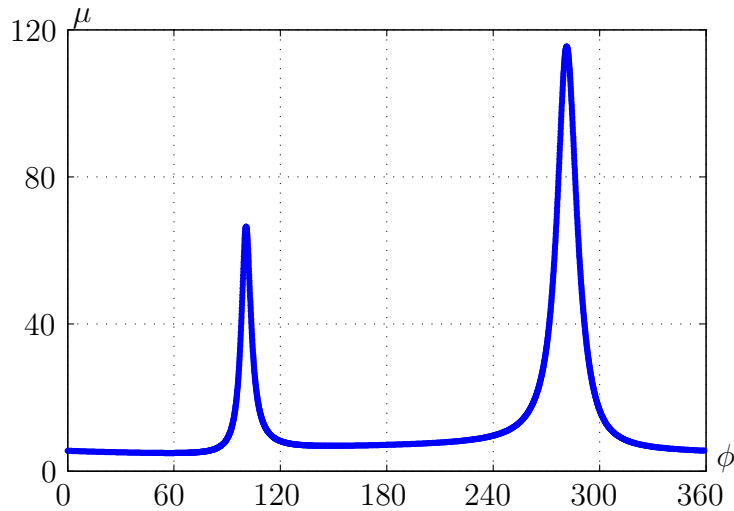
Матрицы  $M_2, \dots, M_k$  для остальных элементов находятся по следующей формуле:

$$M_{t+1} = P_{t+1} [F_t M_t F_t^T + G_t] P_{t+1}.$$

В нашем случае двумерной системы выполняется равенство  $M_1 = \mu_1 p_1 p_1^T$ , где  $p_1 = p_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  — это ортонормированный вектор к  $\Gamma$  в точке  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ , и значение функции стохастической чувствительности  $\mu_1$  ищется по формуле:

$$\mu_1 = \frac{p_1^T Q p_1}{1 - (p_1^T \Phi p_1)^2}.$$

Значения функции стохастической чувствительности  $\mu_2, \dots, \mu_k$  для последующих элементов являются максимальными собственными значениями матриц  $M_2, \dots, M_k$ .



**Рис. 8.** Зависимость ФСЧ от угла  $\phi$  для  $\alpha = 3.1$

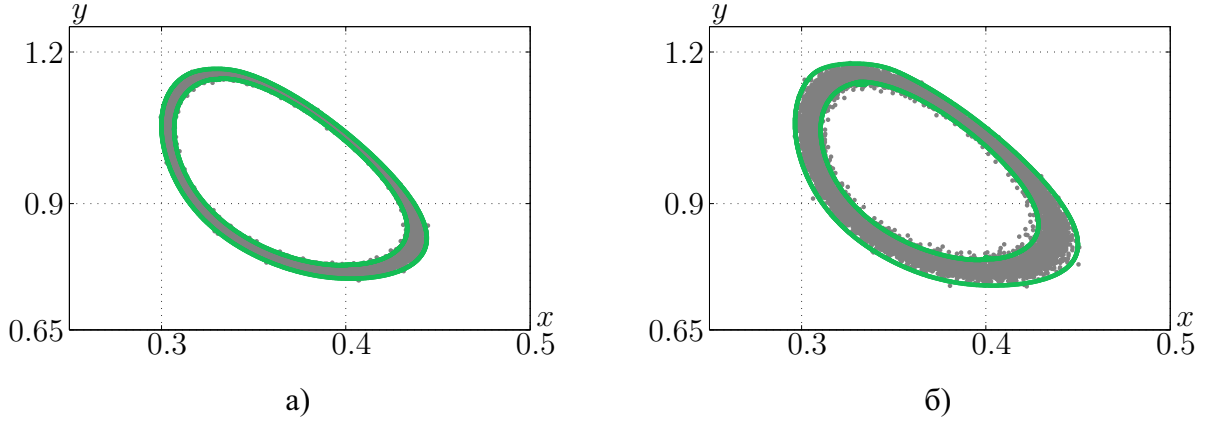
На рис. 8 показано изменение ФСЧ  $\mu$  в случае ЗИК ( $\alpha = 3.1$ ) в зависимости от угла  $\phi$  — угла между вектором, проведенным параллельно оси  $Ox$  из точки начала координат, и вектором, проведенным из начала координат к точке  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ . В данном случае центром координат является равновесие  $M_2$ .

Для описания разброса вдоль замкнутой инвариантной кривой в каждой его точке можно построить доверительный интервал по правилу трех-сигма, опираясь на функцию стохастической чувствительности, следующим образом:

$$x = \bar{x} \pm 3\varepsilon \sqrt{\mu(\bar{x}, \bar{y})} p^1(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$y = \bar{y} \pm 3\varepsilon \sqrt{\mu(\bar{x}, \bar{y})} p^2(\bar{x}, \bar{y}),$$

где  $\mu(\bar{x}, \bar{y})$  — значение функции стохастической чувствительности в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  и  $p = (p^1(\bar{x}, \bar{y}) \ p^2(\bar{x}, \bar{y}))^\top$  — ортонормированный вектор к  $\Gamma$  в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Построенные таким образом интервалы в каждой точке образуют доверительную полосу вдоль замкнутой инвариантной кривой.



**Рис. 9.** Доверительные полосы при  $\alpha = 3.1$  и  $d = 3.3$  для: а)  $\varepsilon = 0.0005$ ; б)  $\varepsilon = 0.001$

На рис. 9 для системы (2) представлены доверительные полосы (зеленый цвет) вокруг замкнутой инвариантной кривой ( $\alpha = 3.1$  и  $d = 3.3$ ) при двух различных значениях интенсивности шума:  $\varepsilon = 0.0005$  (случай а) и  $\varepsilon = 0.001$  (случай б). Серым цветом изображены случайные состояния системы. Видно, что чем больше значение интенсивности шума, тем шире полоса. Также легко заметить, что доверительные полосы хорошо описывают распределение случайных состояний стохастической модели, отражая зоны замкнутой инвариантной кривой более или менее чувствительные к вносимому шуму.

## § 2.2. Стохастическая чувствительность хаотического аттрактора

Аналогично, используя метод функции стохастической чувствительности, можно оценить распределение точек стохастической системы (2) в случае, когда аттрактором системы является хаотический аттрактор  $A$ . Чтобы это сделать, нужно, во-первых, определить границу хаотического аттрактора, а во-вторых, оценить разброс случайных состояний системы, выходящих за данную границу.

Для начала опишем границу хаоса. Это делается с помощью теории критических линий [23, 24]. Нахождение границы представлено следующим алгоритмом.

Пусть  $l$  — линия такая, что  $l = \{(x_{-1}, y_{-1}) | \det F(x_{-1}, y_{-1}) = 0\}$ , где

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(\bar{x}, \bar{y}) & f'_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g'_x(\bar{x}, \bar{y}) & g'_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $LC_{-1} = l \cap A$ . Отображение (3) переводит  $LC_{-1}$  в следующую критическую линию

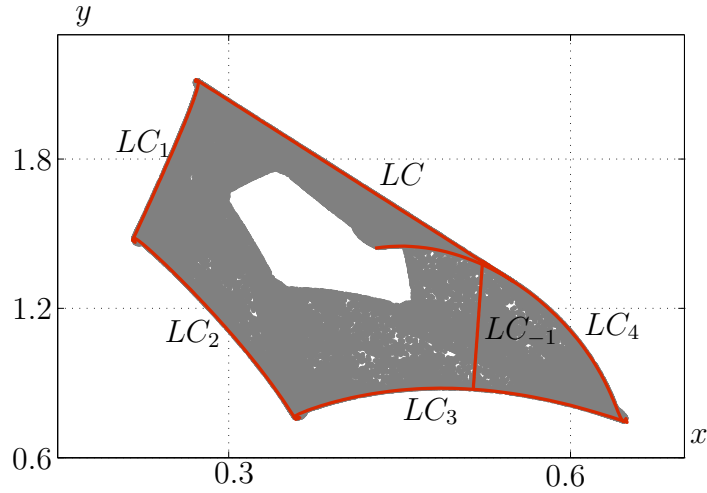
$$LC = \{(x_\bullet, y_\bullet) | x_\bullet = f(x_{-1}, y_{-1}), y_\bullet = g(x_{-1}, y_{-1}), (x_{-1}, y_{-1}) \in LC_{-1}\}.$$

Далее таким же образом можно построить следующие критические линии

$$LC_1 = \{(x_1, y_1) | x_1 = f(x_\bullet, y_\bullet), y_1 = g(x_\bullet, y_\bullet), (x_\bullet, y_\bullet) \in LC\},$$

$$LC_2 = \{(x_2, y_2) | x_2 = f(x_1, y_1), y_2 = g(x_1, y_1), (x_1, y_1) \in LC_1\},$$

и так далее. Особенность критических линий заключается в том, что, замыкаясь, они образуют внутри поглощающую область — это область, в которой реализуется динамика системы: какой бы ни была начальная точка, через конечный момент времени состояние системы попадет в эту область и никогда ее не покинет. Поэтому граница всего хаотического аттрактора  $A$  формируется данными критическими кривыми. Другими словами, состояние  $(x_t, y_t)$  детерминированного хаоса локализуется на границе  $LC$ , если прообраз  $(x_{t-1}, y_{t-1})$  принадлежит  $LC_{-1}$ . Тогда последующие состояния  $(x_{t+1}, y_{t+1}), (x_{t+2}, y_{t+2}), \dots$  принадлежат  $LC_1, LC_2, \dots$  соответственно.



**Рис. 10.** Критические линии для хаоса при  $\alpha = 4$  и  $d = 3.3$

На рис. 10 для системы (1) серым цветом представлен детерминированный хаос ( $\alpha = 4$  и  $d = 3.3$ ), а красным цветом показаны критические линии  $\{LC, LC_1, LC_2, LC_3, LC_4\}$ , которые находятся из  $LC_{-1}$  алгоритмом, описанным выше. Таким образом, данный пример иллюстрирует результат построения алгоритмом границы хаотического аттрактора.

Далее аналогично случаю замкнутой инвариантной кривой для границ хаотического аттрактора  $A$  можно найти значение функции стохастической чувствительности.

**Утверждение 2.**<sup>3</sup> В каждой точке  $(x_\bullet, y_\bullet) \in LC$  значения функции стохастической чувствительности определяются по формуле:

$$\mu_1(x_\bullet, y_\bullet) = n^\top(x_\bullet, y_\bullet)Q(x_{-1}, y_{-1})n(x_\bullet, y_\bullet),$$

где  $x_\bullet = f(x_{-1}, y_{-1}), y_\bullet = g(x_{-1}, y_{-1}), n(x_\bullet, y_\bullet)$  — ортонормированный вектор к  $LC$  в точке  $(x_\bullet, y_\bullet)$  и  $Q(x_{-1}, y_{-1})$  — матрица вносимого шума (единичная в случае аддитивного шума).

Следующие значения  $\mu_2, \mu_3, \dots$  функции стохастической чувствительности в точках  $(x_1, y_1) \in LC_1, (x_2, y_2) \in LC_2, \dots$  находятся рекуррентным образом:

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= n_{t+1}^\top(F_t W_t F_t^\top + Q_t)n_{t+1}, \\ W_{t+1} &= \mu_{t+1}n_{t+1}n_{t+1}^\top, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь,  $W_1 = \mu_1 n_1 n_1^\top$  является матрицей стохастической чувствительности в точке  $(x_\bullet, y_\bullet)$  кривой  $LC$ . Последующие матрицы  $W_2, W_3, \dots$  характеризуют стохастическую чувствительность границ  $LC_1, LC_2, \dots$  в точках  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$

<sup>3</sup>Доказательство данного утверждения приведено в [21].

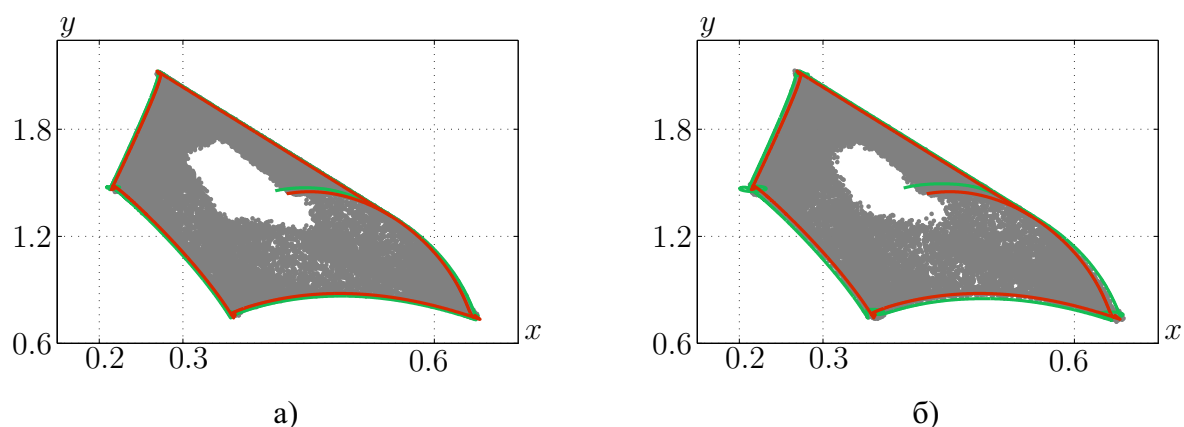
Стоит отметить, что последовательность  $n_t$  ортонормированных векторов может быть найдена с помощью соответствующих касательных векторов  $q_t$ , которые находятся рекуррентно:  $q_{t+1} = F_t q_t$ . Здесь  $q_0$  — это вектор, касательный к  $LC_{-1}$  в точке  $(x_{-1}, y_{-1})$ .

Зная значения  $\mu_t(x_t, y_t)$  границы  $LC_t$  хаотического аттрактора  $A$ , можно построить доверительные полосы. Эти полосы состоят из доверительных интервалов, границы которых в точке  $(x_t, y_t) \in LC_t$  находятся в соответствии с правилом трех-сигм по формуле:

$$\begin{aligned} x &= x_t \pm 3\varepsilon \sqrt{\mu_t(x_t, y_t)} n^1(x_t, y_t), \\ y &= y_t \pm 3\varepsilon \sqrt{\mu_t(x_t, y_t)} n^2(x_t, y_t), \end{aligned}$$

где  $(n^1(x_t, y_t), n^2(x_t, y_t))^T$  — это ортонормированный вектор к  $LC_t$  в точке  $(x_t, y_t)$ .

На рис. 11 для системы (2) показана внешняя часть доверительной полосы (зеленый цвет) для хаотического аттрактора ( $\alpha = 4$  и  $d = 3.3$ ) при разной интенсивности внешнего воздействия:  $\varepsilon = 0.0005$  (случай а) и  $\varepsilon = 0.001$  (случай б). Как и на рис. 9 серым цветом показаны случайные состояния. Красным цветом изображено семейство критических линий. Важно, что внешняя полоса адекватно описывает распределение случайных состояний вокруг хаотического аттрактора.



**Рис. 11.** Доверительная внешняя полоса при  $\alpha = 4$  и  $d = 3.3$  для: а)  $\varepsilon = 0.0005$ ; б)  $\varepsilon = 0.001$

Таким образом, в данной работе рассмотрены детерминированный и стохастический случаи популяционной модели типа «хищник–жертва» с дискретным временем. Изучены равновесия, их устойчивость и бифуркационные сценарии, представленные картой динамических режимов. Построены бифуркационные диаграммы и бассейны притяжения изучаемых аттракторов. Обнаружено, что не для всех начальных значений плотностей популяций система может прийти в стационарный режим, возможен также неограниченный рост популяций. В случае воздействия на систему внешнего шума исследована чувствительность замкнутой инвариантной кривой и хаотического аттрактора, построены полосы рассеивания, позволяющие описать разброс случайных состояний.

**Финансирование.** Работа поддержана Российским научным фондом, грант №16–11–10098.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neverova G. P., Zhdanova O. L., Ghosh B., Frisman E. Y. Dynamics of a discrete-time stage-structured predator–prey system with Holling type II response function // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. No. 1. P. 427–446. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05202-3>



2. Khan A.Q. Bifurcations of a two-dimensional discrete-time predator–prey model // *Advances in Difference Equations*. 2019. Vol. 2019. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-1995-6>
3. Pal S., Pal N., Chattopadhyay J. Hunting cooperation in a discrete-time predator–prey system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2018. Vol. 28. No. 7. P. 1850083. <https://doi.org/10.1142/S0218127418500839>
4. Zhao M., Li C.P., Wang J.L. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator–prey system // *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2017. Vol. 7. No. 2. P. 478–500. <https://doi.org/10.11948/2017030>
5. Saratchandran P.P., Ajithprasad K. C., Harikrishnan K. P. Numerical exploration of the parameter plane in a discrete predator–prey model // *Ecological Complexity*. 2015. Vol. 21. P. 112–119. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2014.11.010>
6. ReniSagayaRaj M., George Maria Selvam A., Dhineshababu R. Stability in a discrete nonlinear prey–predator model with functional response // *International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences*. 2014. Vol. 7. No. 2. P. 190–193.
7. ReniSagayaRaj M., George Maria Selvam A., Meganathan M. Dynamics in a discrete prey–predator system // *International Journal of Engineering Research and Development*. 2013. Vol. 6. No. 5. P. 1–5.
8. Elsadany A. A. E., El-Metwally H. A., Elabbasy E. M., Agiza H. N. Chaos and bifurcation of a nonlinear discrete prey–predator system // *Computational Ecology and Software*. 2012. Vol. 2. No. 3. P. 169–180. [http://www.iaees.org/publications/journals/ces/articles/2012-2\(3\)/2012-2\(3\).asp](http://www.iaees.org/publications/journals/ces/articles/2012-2(3)/2012-2(3).asp)
9. Ren J.L., Yu L.P., Siegmund S. Bifurcations and chaos in a discrete predator–prey model with Crowley–Martin functional response // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 90. No. 1. P. 19–41. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3643-6>
10. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and discontinuous piecewise–smooth one–dimensional maps: Invariant sets and bifurcation structures. Singapore: World Scientific, 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>
11. Allen L. J. S., Fagan J. F., Högnäs G., Fagerholm H. Population extinction in discrete-time stochastic population models with an Allee effect // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2005. Vol. 11. Issue 4–5. P. 273–293. <https://doi.org/10.1080/10236190412331335373>
12. Bashkirtseva I. A. Stochastic sensitivity synthesis in discrete-time systems with parametric noise // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. Vol. 51. No. 32. P. 610–614. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.491>
13. Bashkirtseva I., Tsvetkov I. Impact of the parametric noise on map-based dynamical systems // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 2025. Issue 1. 040004. <https://doi.org/10.1063/1.5064888>
14. Bashkirtseva I., Ekaterinchuk E., Ryashko L. Analysis of noise-induced transitions in a generalized logistic model with delay near Neimark–Sacker bifurcation // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017. Vol. 50. No. 27. P. 275102. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa734b>
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 491. P. 28–36. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.157>
16. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced extinction in the Ricker model with delay and Allee effect // *Bulletin of Mathematical Biology*. 2018. Vol. 80. No. 6. P. 1596–1614. <https://doi.org/10.1007/s11538-018-0422-6>
17. Jungeilges J., Ryazanova T. Transitions in consumption behaviors in a peer-driven stochastic consumer network // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2019. Vol. 128. P. 144–154. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.07.042>
18. Belyaev A. V., Ryazanova T. V. The stochastic sensitivity function method in analysis of the piecewise-smooth model of population dynamics // *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*. 2019. Vol. 53. P. 36–47. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-04>
19. Belyaev A., Ryazanova T. Stochastic sensitivity of attractors for a piecewise smooth neuron model // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2019. Vol. 25. No. 9–10. P. 1468–1487. <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1678596>

20. Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay // *Physics Letters A*. 2014. Vol. 378. No. 48. P. 3600–3606. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.10.022>
21. Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2019. Vol. 126. P. 78–84. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.05.032>
22. Zhao Ming, Xuan Zuxing, Li Cuiping. Dynamics of a discrete-time predator-prey system // *Advances in Difference Equations*. 2016. Vol. 2016. No. 1. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0903-6>
23. Bischi G-I., Stefanini L., Gardini L. Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game // *Mathematics and Computers in Simulation*. 1998. Vol. 44. No. 6. P. 559–585. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(97\)00100-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(97)00100-6)
24. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J-C. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. Singapore: World Scientific, 1996. <https://doi.org/10.1142/2252>

Поступила в редакцию 01.04.2020

Беляев Александр Владимирович, студент, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.  
E-mail: [belyaev.alexander1337@yandex.ru](mailto:belyaev.alexander1337@yandex.ru)

Перевалова Татьяна Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.  
E-mail: [tatyana.perevalova@urfu.ru](mailto:tatyana.perevalova@urfu.ru)

**Цитирование:** А. В. Беляев, Т. В. Перевалова. Стохастическая чувствительность квазипериодических и хаотических аттракторов дискретной модели Лотки–Вольтерры // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2020. Т. 55. С. 19–32.

*Keywords:* population dynamics, stochastic sensitivity, chaos, closed invariant curve.

MSC2010: 39A50

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-02

The aim of the study presented in this article is to analyze the possible dynamic modes of the deterministic and stochastic Lotka–Volterra model. Depending on the two parameters of the system, a map of regimes is constructed. Parametric areas of existence of stable equilibria, cycles, closed invariant curves, and also chaotic attractors are studied. The bifurcations such as the period doubling, Neimark–Sacker and the crisis are described. The complex shape of the basins of attraction of irregular attractors (closed invariant curve and chaos) is demonstrated. In addition to the deterministic system, the stochastic system, which describes the influence of external random influence, is discussed. Here, the key is to find the sensitivity of such complex attractors as a closed invariant curve and chaos. In the case of chaos, an algorithm to find critical lines giving the boundary of a chaotic attractor, is described. Based on the found function of stochastic sensitivity, confidence domains are constructed that allow us to describe the form of random states around a deterministic attractor.

**Funding.** This study was supported by Russian Science Foundation, grant no. 16–11–10098.

#### REFERENCES

1. Neverova G.P., Zhdanova O.L., Ghosh B., Frisman E.Y. Dynamics of a discrete-time stage-structured predator–prey system with Holling type II response function, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 98, no. 1, pp. 427–446. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05202-3>
2. Khan A.Q. Bifurcations of a two-dimensional discrete-time predator–prey model, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-1995-6>
3. Pal S., Pal N., Chattopadhyay J. Hunting cooperation in a discrete-time predator–prey system, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, vol. 28, no. 7, pp. 1850083. <https://doi.org/10.1142/S0218127418500839>
4. Zhao M., Li C.P., Wang J.L. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator–prey system, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 478–500. <https://doi.org/10.11948/2017030>
5. Saratchandran P.P., Ajithprasad K.C., Harikrishnan K.P. Numerical exploration of the parameter plane in a discrete predator–prey model, *Ecological Complexity*, 2015, vol. 21, pp. 112–119. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2014.11.010>
6. ReniSagayaRaj M., George Maria Selvam A., Dhineshbabu R. Stability in a discrete nonlinear prey–predator model with functional response, *International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 190–193.
7. ReniSagayaRaj M., George Maria Selvam A., Meganathan M. Dynamics in a discrete prey–predator system, *International Journal of Engineering Research and Development*, 2013, vol. 6, no. 5, pp. 1–5.
8. Elsadany A.A.E., El-Metwally H.A., Elabbasy E.M., Agiza H.N. Chaos and bifurcation of a nonlinear discrete prey–predator system, *Computational Ecology and Software*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 169–180. [http://www.iaees.org/publications/journals/ces/articles/2012-2\(3\)/2012-2\(3\).asp](http://www.iaees.org/publications/journals/ces/articles/2012-2(3)/2012-2(3).asp)
9. Ren J.L., Yu L.P., Siegmund S. Bifurcations and chaos in a discrete predator–prey model with Crowley–Martin functional response, *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, no. 1, pp. 19–41. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3643-6>
10. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. *Continuous and discontinuous piecewise–smooth one–dimensional maps: Invariant sets and bifurcation structures*, Singapore: World Scientific, 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>

11. Allen L. J. S., Fagan J. F., Högnäs G., Fagerholm H. Population extinction in discrete-time stochastic population models with an Allee effect, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2005, vol. 11, no. 4–5, pp. 273–293. <https://doi.org/10.1080/10236190412331335373>
12. Bashkirtseva I. A. Stochastic sensitivity synthesis in discrete-time systems with parametric noise, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 610–614. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.491>
13. Bashkirtseva I., Tsvetkov I. Impact of the parametric noise on map-based dynamical systems, *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2025, issue 1, 040004. <https://doi.org/10.1063/1.5064888>
14. Bashkirtseva I., Ekaterinchuk E., Ryashko L. Analysis of noise-induced transitions in a generalized logistic model with delay near Neimark–Sacker bifurcation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, vol. 50, no. 27, pp. 275102. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa734b>
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, vol. 491, pp. 28–36. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.157>
16. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced extinction in the Ricker model with delay and Allee effect, *Bulletin of Mathematical Biology*, 2018, vol. 80, no. 6, pp. 1596–1614. <https://doi.org/10.1007/s11538-018-0422-6>
17. Jungeilges J., Ryazanova T. Transitions in consumption behaviors in a peer-driven stochastic consumer network, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, vol. 128, pp. 144–154. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.07.042>
18. Belyaev A. V., Ryazanova T. V. The stochastic sensitivity function method in analysis of the piecewise-smooth model of population dynamics, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 53, pp. 36–47. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-04>
19. Belyaev A., Ryazanova T. Stochastic sensitivity of attractors for a piecewise smooth neuron model, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2019, vol. 25, no. 9–10, pp. 1468–1487. <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1678596>
20. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay, *Physics Letters A*, 2014, vol. 378, no. 48, pp. 3600–3606. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.10.022>
21. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, vol. 126, pp. 78–84. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.05.032>
22. Zhao Ming, Xuan Zuxing, Li Cuiping. Dynamics of a discrete-time predator–prey system, *Advances in Difference Equations*, 2016, vol. 2016, no. 1. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0903-6>
23. Bischi G-I., Stefanini L., Gardini L. Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game, *Mathematics and Computers in Simulation*, 1998, vol. 44, no. 6, pp. 559–585. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(97\)00100-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(97)00100-6)
24. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J-C. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, Singapore: World Scientific, 1996. <https://doi.org/10.1142/2252>

Received 01.04.2020

Belyaev Aleksandr Vladimirovich, Student, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: [belyaev.alexander1337@yandex.ru](mailto:belyaev.alexander1337@yandex.ru)

Perevalova Tat'yana Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: [tatyana.perevalova@urfu.ru](mailto:tatyana.perevalova@urfu.ru)

**Citation:** A. V. Belyaev, T. V. Perevalova. Stochastic sensitivity of quasiperiodic and chaotic attractors of the discrete Lotka–Volterra model, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 19–32.