Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 33–41

УДК 517.977

© *А. Р. Данилин, А. А. Шабуров*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО АДДИТИВНО ЗАВИСИТ ОТ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается задача оптимального управления линейной стационарной управляемой системой в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление на конечном отрезке времени и критерием качества типа Больца. В частности, исследуется задача управления движением системой точек малой массы под действием ограниченной силы с критерием качества, терминальная часть которого аддитивно зависит от медленных и быстрых переменных, а интегральное слагаемое есть строго выпуклая функция по переменной управления. При выполнении условия вполне управляемости пары матриц системы и управления для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. Отличие данного исследования от предыдущих работ заключается в том, что матрица при быстрых переменных в уравнении быстрых переменных нулевая и тем самым не выполнено условие, при котором справедливы результаты А. Б. Васильевой об асимптотике фундаментальной матрицы управляемой системы. Тем не менее линейная система удовлетворяет условию вполне управляемости. В работе показано, что задачи с интегральным выпуклым критерием качества более регулярны, чем задачи быстродействия.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-03

Введение

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления линейными системами [1–3] с постоянными коэффициентами с быстрыми и медленными переменными [4–6] на конечном временном промежутке с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Рассматриваемая система не удовлетворяет стандартному условию устойчивости присоединенной системы. Поэтому результаты А. Б. Васильевой [7] неприменимы. Задачи оптимального быстродействия с таким условием рассматривались в [8,9]. Однако линейная система удовлетворяет условию вполне управляемости. При одинаковых условиях на управляемую систему для задачи с интегральным выпуклым критерием качества получены степенные разложения в смысле Пуанкаре определяющего вектора и оптимального значения функционала качества, а для задачи быстродействия — асимптотическое разложение определяющего вектора и времени быстродействия (оптимального значения функционала качества) раскладываются в асимптотическое разложение в смысле Эрдейи по сложной системе функций [9]. Современные результаты по нахождению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления представлены в обзоре [10] и работах [11, 12].

§ 1. Задача с медленными переменными в терминальной части критерия качества

Рассмотрим управление движением материальной точки в среде без сопротивления, то есть следующую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & t \in [0, T], \quad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, \\ \varepsilon \cdot \dot{y}_\varepsilon = u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x_0, \quad y_\varepsilon(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ — медленные и быстрые переменные, а $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ — вектор управления с интегральным выпуклым критерием качества:

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon) := \frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2 + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\, dt \to \min. \tag{1.2}$$

Управляемая система (1.1) имеет вид

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, \quad z_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{I} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Отметим, что в силу (1.3)

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{W}_\varepsilon(t) \\ \mathcal{O} & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & t \cdot \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \qquad C_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} t \cdot \mathcal{I} \\ \varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{I} \end{pmatrix}.$$

Поскольку система (1.1) вполне управляема, то, как доказано в [13, утверждение 1, формулы (2.4), (2.5)], оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ в задаче (1.1), (1.2) имеет вид

$$u_\varepsilon(T - t) = \frac{C^*_\varepsilon(t) l_\varepsilon}{S\left(\|C^*_\varepsilon(t) l_\varepsilon\|\right)}, \qquad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases}$$

а вектор l_ε есть единственное (с учетом кофинитности $\varphi := \frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2$ — [14, теорема 26.6]) решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + x_0 + \mathcal{W}_\varepsilon(T) y_0 + \int_0^T \frac{C_\varepsilon(t) C^*_\varepsilon(t) l}{S\left(\|C^*_\varepsilon(t) l\|\right)} dt. \tag{1.4}$$

Здесь $\varphi(x) = \|x\|^2/2$, $\varphi^* = \varphi$ — функция, сопряженная с φ в смысле выпуклого анализа (см., например, [14, § 12]), а $\nabla\varphi^*(-l) = -l$.

Таким образом, уравнение (1.4) имеет вид

$$-l = x_0 + T \cdot y_0 + \int_0^T \frac{\varepsilon^{-2} t^2 \cdot l}{S\left(\varepsilon^{-1} t \|l\|\right)} dt. \tag{1.5}$$

Так как $\varepsilon^{-1} t \|l_\varepsilon\|$ при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ является возрастающей функцией, равной нулю при $t = 0$ и стремящейся к $+\infty$ при $t \to +\infty$, то оптимальное управление в таком случае будет иметь не более одной точки смены вида оптимального управления, причем единственная точка $t_{0,\varepsilon}$ определяется из следующего выражения:

$$\frac{t_{0,\varepsilon}}{\varepsilon} \cdot \|l_\varepsilon\| = 2, \text{ откуда } t_{0,\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

(1) Если

$$t_{0,\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} < T, \tag{1.6}$$

то $t_{0,\varepsilon}$ — точка смены вида оптимального управления и уравнение (1.5) перепишется как

$$-l_\varepsilon = x_0 + T \cdot y_0 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{t_{0,\varepsilon}} \frac{t^2 \cdot l_\varepsilon}{2} dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{t_{0,\varepsilon}}^T \frac{t^2 \cdot l_\varepsilon}{\varepsilon^{-1} t \|l_\varepsilon\|} dt.$$

Отсюда

$$-\varepsilon \cdot l_\varepsilon = \varepsilon \cdot (x_0 + T \cdot y_0) - \frac{2}{3}\varepsilon^2 \cdot \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|^3} + \frac{T^2}{2} \cdot \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}.$$

Таким образом, должно выполняться следующее:

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{2}{3}\varepsilon^2 \cdot \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|^3} + \frac{T^2}{2} \cdot \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{l_\varepsilon}{2\|l_\varepsilon\|}\left(T^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\|l_\varepsilon\|^2}\right).$$

Поскольку $\|l_\varepsilon/(2\|l_\varepsilon\|)\| = 1/2$, то отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\|l_\varepsilon\|^2} = T^2, \text{ то есть } \|l_\varepsilon\|^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{T^2} + o(\varepsilon^2), \quad \|l_\varepsilon\| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{T} + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому условие (1.6) примет вид

$$T > \frac{2\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} = \frac{2\varepsilon}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{T} + o(\varepsilon)\right)} = \frac{\sqrt{3}T}{1 + o(1)} \to \sqrt{3}T \text{ при } \varepsilon \to +0,$$

что противоречиво при всех малых ε.

Таким образом, реализация случая **(1)** невозможна и реализуется только второй случай.

(2) Если

$$t_{0,\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} \geqslant T, \tag{1.7}$$

то уравнение (1.5) принимает вид

$$-l_\varepsilon = x_0 + T \cdot y_0 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \frac{t^2 \cdot l_\varepsilon}{2} dt = x_0 + T \cdot y_0 + \frac{T^3}{6\varepsilon^2} \cdot l_\varepsilon.$$

Таким образом,

$$l_\varepsilon = \frac{-6\varepsilon^2 \cdot (x_0 + T \cdot y_0)}{T^3 + 6\varepsilon^2} = \frac{-6\varepsilon^2 \cdot (x_0 + T \cdot y_0)}{T^3 \cdot \left(1 + \frac{6\varepsilon^2}{T^3}\right)},$$

или

$$l_\varepsilon = \frac{-6\varepsilon^2 \cdot (x_0 + T \cdot y_0)}{T^3} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \left(\frac{6\varepsilon^2}{T^3}\right)^k\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.8}$$

Отметим, что поскольку $l_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$, то величина $2\varepsilon/\|l_\varepsilon\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, и, таким образом, условие (1.7) выполнено при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Найдем оптимальное значение функционала качества (1.2)

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \int_0^T \left(\frac{t \cdot l_\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2 dt = \|l_\varepsilon\|^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{T^3}{12\varepsilon^2}\right).$$

С учетом (1.8) получим

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{3\varepsilon^2\|x_0 + T \cdot y_0\|^2}{T^3} + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to +0.$$

Тем самым доказана теорема. □

Т е о р е м а 1.1. *В задаче* (1.1), (1.2) *определяющий вектор* l_ε *и оптимальное значение функционала качества* $J_{1,\varepsilon}$ *при* $\varepsilon \to +0$ *раскладываются в асимптотические степенные ряды по малому параметру* ε.

§ 2. Задача с медленными и быстрыми переменными в терминальной части критерия качества

Рассмотрим задачу для управляемой системы (1.1) со следующим критерием качества:

$$J_{2,\varepsilon}(u_\varepsilon) := \frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_\varepsilon(T)\|^2 + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt \to \min. \tag{2.1}$$

В этом случае согласно [15, формула (3)] уравнение для определяющего вектора λ в задаче (1.1), (2.1) имеет вид

$$\nabla\varphi^*(-\lambda) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_0 + \int_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}\mathcal{B}_\varepsilon \cdot \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\tau}\lambda_\varepsilon}{S\left(\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\tau}\lambda_\varepsilon\|\right)} d\tau = z_\varepsilon(T). \tag{2.2}$$

Поскольку $\varphi^* = \varphi = \|z(T)\|^2/2$, то $\nabla\varphi^*(-\lambda) = -\lambda$, и в силу обозначения

$$\lambda := \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix} = -z_\varepsilon(T) = \begin{pmatrix} -x_\varepsilon(T) \\ -y_\varepsilon(T) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.2) можно переписать как

$$\begin{pmatrix} -l_\varepsilon \\ -\rho_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + T\cdot y_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^T \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} t\cdot\mathcal{I} \\ \varepsilon^{-1}\cdot\mathcal{I} \end{pmatrix} \cdot \frac{\varepsilon^{-1}\cdot(t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon)}{S\left(\varepsilon^{-1}\|t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|\right)} dt,$$

или

$$-l_\varepsilon = x_0 + T\cdot y_0 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \frac{t\cdot(t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon)}{S\left(\varepsilon^{-1}\cdot\|t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|\right)} dt, \tag{2.3}$$

$$-\rho_\varepsilon = y_0 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \frac{t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{S\left(\varepsilon^{-1}\cdot\|t\cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|\right)} dt. \tag{2.4}$$

Утверждение 2.1. *Рассмотрим задачу быстродействия для управляемой системы* (1.1)*:*

$$z_\varepsilon(T_\varepsilon) = 0, \qquad T_\varepsilon \to \min. \tag{2.5}$$

Если задача (1.1)*,* (2.5) *разрешима и* $T_\varepsilon \leqslant T$*, то* $J_{2,\varepsilon} \leqslant T_\varepsilon$*, где* $J_{2,\varepsilon}$ *— оптимальное значение критерия качества в задаче* (1.1)*,* (2.1).

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(t)$ — оптимальное управление в задаче быстродействия. Рассмотрим оптимальное управление

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) := \begin{cases} u_\varepsilon(t), & 0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon, \\ 0, & T_\varepsilon \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Тогда, в силу формулы Коши в конечный момент времени $t = T$, получим:

$$z(T) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_0 + \int_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T-s)}\mathcal{B}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon(s) ds = e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T-T_\varepsilon)}\cdot e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T-s)}\mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(s) ds =$$

$$= e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T-T_\varepsilon)}\cdot\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T_\varepsilon - s)}\mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(s) ds\right) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T-T_\varepsilon)}\cdot z(T_\varepsilon),$$

следовательно, $z(T) = 0$. Поэтому (с учетом неравенства $\|u_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant 1$)

$$J_{2,\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) = \int_0^T \|\tilde{u}_\varepsilon(t)\|^2 dt = \int_0^{T_\varepsilon} \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \leqslant T_\varepsilon.$$

Но $J_{2,\varepsilon}(u_\varepsilon) \leqslant J_{2,\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \leqslant T_\varepsilon$. □

С л е д с т в и е 2.1. *$J_{2,\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon})$ и $\|z_\varepsilon(T)\| = O(\sqrt[4]{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$, где $z_\varepsilon(T)$ — состояние системы* (1.1) *в момент времени T при оптимальном управлении.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [9, теоремы 1, 2] время быстродействия в задаче (1.1), (2.5) есть $T_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \cdot 2\sqrt{\|z_0\|} + O(\varepsilon)$. Таким образом, $J_{2,\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon})$. Поскольку все слагаемые в (2.1) неотрицательны, то и $\|z_\varepsilon(T)\| = O(\sqrt[4]{\varepsilon})$. □

Из следствия 2.1, формулы (2.2) и вида $\nabla\varphi^*$ получим, что

$$l_\varepsilon = O(\sqrt[4]{\varepsilon}), \qquad \rho_\varepsilon = O(\sqrt[4]{\varepsilon}), \qquad \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt = O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \varepsilon \to +0,$$

где $u_\varepsilon(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче (1.1), (2.1).

Рассмотрим $t_{1,\varepsilon}$ и $t_{2,\varepsilon}$ — точки смены вида оптимального управления в задаче (1.1), (2.1). Они являются корнями квадратного уравнения

$$0 = \|t \cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|^2 - 4\varepsilon^2 = t^2\|l_\varepsilon\|^2 + 2t\langle l_\varepsilon, \rho_\varepsilon\rangle + \|\rho_\varepsilon\|^2 - 4\varepsilon^2.$$

При этом на отрезках $[0, t_{1,\varepsilon}]$ и $[0, t_{2,\varepsilon}]$ (если они есть) $\|u_\varepsilon(t)\|^2 \equiv 1$. Поэтому в силу следствия 2.1

$$\int_0^{t_{1,\varepsilon}} \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt + \int_{t_{2,\varepsilon}}^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt = t_{1,\varepsilon} + T - t_{2,\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \varepsilon \to +0,$$

то есть

$$t_{1,\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad t_{2,\varepsilon} = T + O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \varepsilon \to +0. \tag{2.6}$$

Поскольку подынтегральные выражения в (2.3) и (2.4) ограничены, то с учетом (2.6) эти уравнения принимают вид

$$\begin{cases} -l_\varepsilon = x_0 + T \cdot y_0 + \dfrac{l_\varepsilon}{6\varepsilon^2}\left(t_{2,\varepsilon}^3 - t_{1,\varepsilon}^3\right) + \dfrac{\rho_\varepsilon}{4\varepsilon^2}\left(t_{2,\varepsilon}^2 - t_{1,\varepsilon}^2\right) + O(\varepsilon^{-1/2}), \\ -\rho_\varepsilon = y_0 + \dfrac{l_\varepsilon}{4\varepsilon^2}\left(t_{2,\varepsilon}^2 - t_{1,\varepsilon}^2\right) + \dfrac{\rho_\varepsilon}{2\varepsilon^2}\left(t_{2,\varepsilon} - t_{1,\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{-1/2}). \end{cases} \tag{2.7}$$

После умножения каждого уравнения в (2.7) на $2\varepsilon^2$ эта система с учетом (2.6) принимает вид

$$\begin{cases} l_\varepsilon\left(\frac{T^3}{3} + O(\sqrt{\varepsilon})\right) + \rho_\varepsilon\left(\frac{T^2}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})\right) = O(\varepsilon^{3/2}), \\ l_\varepsilon\left(\frac{T^2}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})\right) + \rho_\varepsilon\left(T + O(\sqrt{\varepsilon})\right) = O(\varepsilon^{3/2}). \end{cases} \tag{2.8}$$

Вычислим определитель системы (2.8):

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{T^3}{3} + O(\sqrt{\varepsilon}) & \frac{T^2}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ \frac{T^2}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) & T + O(\sqrt{\varepsilon}) \end{vmatrix} = \frac{T^4}{12} + O(\sqrt{\varepsilon}) \to \frac{T^4}{12} \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Поэтому этот определитель не равен нулю при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. В силу формул Крамера из (2.8) получим, что

$$l_\varepsilon = O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \rho_\varepsilon = O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \varepsilon \to +0.$$

Но тогда $\varepsilon^{-1}\|t \cdot l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\| = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $t \in [0, T]$, и, таким образом, на отрезке $[0, T]$ нет точек смены вида оптимального управления , то есть $t_{1,\varepsilon} = 0$ и $t_{2,\varepsilon} = T$. Поэтому система (2.8) имеет вид

$$
\begin{cases} l_\varepsilon\left(\frac{T^3}{3}+2\varepsilon^2\right)+\rho_\varepsilon\frac{T^2}{2}=-2\varepsilon^2(x_0+T\cdot y_0), \\ l_\varepsilon\cdot\frac{T^2}{2}+\rho_\varepsilon\left(T+2\varepsilon^2\right)=-2\varepsilon^2 y_0. \end{cases} \tag{2.9}
$$

Решая систему (2.9) методом Крамера, находим l_ε и ρ_ε в явном виде:

$$
l_\varepsilon=\frac{\triangle_1}{\triangle}=\frac{\varepsilon^2\cdot(-2Tx_0-T^2y_0-4x_0\varepsilon^2-4Ty_0\varepsilon^2)}{\frac{T^4}{12}+\varepsilon^2\cdot\left(2T+\frac{2}{3}T^3\right)+4\varepsilon^2},
$$

$$
\rho_\varepsilon=\frac{\triangle_2}{\triangle}=\frac{\varepsilon^2\cdot\left(T^2x_0+\frac{T^3y_0}{3}-4y_0\varepsilon^2\right)}{\frac{T^4}{12}+\varepsilon^2\cdot\left(2T+\frac{2}{3}T^3\right)+4\varepsilon^2}.
$$

Поэтому векторы l_ε и ρ_ε раскладываются в асимптотические степенные по ε ряды при $\varepsilon\to+0$. Первое приближение этих векторов имеет следующий вид:

$$
l_\varepsilon=\left(-\frac{24}{T^3}x_0-\frac{12}{T^2}y_0\right)\cdot\varepsilon^2+O(\varepsilon^2),\quad \rho_\varepsilon=\left(\frac{12}{T^2}x_0+\frac{4}{T}y_0\right)\cdot\varepsilon^2+O(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\to 0. \tag{2.10}
$$

Найдем оптимальное значение функционала качества (2.1):

$$
J_{2,\varepsilon}(u_\varepsilon):=\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\rho_\varepsilon\|^2+\int_0^T\left(\frac{t\cdot l_\varepsilon+\rho_\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2dt=
$$

$$
=\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2+\frac{1}{2}\|\rho_\varepsilon\|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{T^3}{3}\|l_\varepsilon\|^2+T^2\langle l_\varepsilon,\rho_\varepsilon\rangle+T\|\rho_\varepsilon\|^2\right).
$$

С учетом (2.10) получим

$$
J_{2,\varepsilon}(u_\varepsilon)=\varepsilon^2\cdot\left(\frac{12}{T^3}\|x^0\|^2+\frac{12}{T^2}\langle x^0,y^0\rangle-\frac{6}{T}\|y^0\|^2\right)+O(\varepsilon^3),\quad \varepsilon\to+0.
$$

Таким образом, и в этом случае справедлива теорема, аналогичная теореме 1.1:

Т е о р е м а 2.1. *В задаче* (1.1), (2.1) *определяющий вектор* λ_ε *и оптимальное значение функционала качества* $J_{2,\varepsilon}$ *при* $\varepsilon\to+0$ *раскладываются в асимптотические степенные ряды по малому параметру* ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. Дончев А. Л. Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
5. Kokotovic P. V., Haddad A. H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20. No. 1. P. 111–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100852
6. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51. http://mi.mathnet.ru/at1125
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
8. Данилин А. Р., Коврижных О. О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451. № 6. С. 612–614. https://doi.org/10.7868/S086956521325004X

9. Данилин А. Р., Коврижных О. О. Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 92–99. http://mi.mathnet.ru/timm1032
10. Zhang Y., Naidu D. S., Chenxiao Cai, Yun Zou. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // International Journal of Informaton and Systems Sciences. 2014. Vol. 9. No. 1. P. 1–36.
11. Курина Г. А., Нгуен Т. Х. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 4. С. 628–652. http://mi.mathnet.ru/zvmmf9683
12. Kurina G. A., Hoai N. T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear–quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. P. 020073. https://doi.org/10.1063/1.5049067
13. Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 303–310. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
15. Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 83–98.

Поступила в редакцию 01.03.2020

Данилин Алексей Руфимович, д. ф.-м. н., профессор, зав. отделом, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: dar@imm.uran.ru

Шабуров Александр Александрович, аспирант, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: alexandershaburov@mail.ru

Цитирование: А. Р. Данилин, А. А. Шабуров. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого аддитивно зависит от медленных и быстрых переменных // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 33–41.

A. R. Danilin, A. A. Shaburov

Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index, whose terminal part additively depends on slow and fast variables

Keywords: optimal control, singularly perturbed problems, asymptotic expansion, small parameter.

MSC2010: 49N05, 93C70

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-03

The paper deals with the problem of optimal control with a Boltz–type quality index over a finite time interval for a linear steady–state control system in the class of piecewise continuous controls with smooth control constraints. In particular, we study the problem of controlling the motion of a system of small mass points under the action of a bounded force. The terminal part of the convex integral quality index additively depends on slow and fast variables, and the integral term is a strictly convex function of control variable. If the system is completely controllable, then the Pontryagin maximum principle is a necessary and sufficient condition for optimality. The main difference between this study and previous works is that the equation contains the zero matrix of fast variables and, thus, the results of A. B. Vasilieva on the asymptotic of the fundamental matrix of a control system are not valid. However, the linear steady–state system satisfies the condition of complete controllability. The article shows that problems of optimal control with a convex integral quality index are more regular than time–optimal problems.

REFERENCES

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes*, New York: Interscience Publishers, 1962.
2. Krasovskii N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* (Theory of motion control. Linear systems), Moscow: Nauka, 1968.
3. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967.
4. Dontchev A. L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Berlin: Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/BFb0043612
5. Kokotovic P. V., Haddad A. H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. 20, issue 1, pp. 111–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100852
6. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
7. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* (Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations), Moscow: Nauka, 1973.
8. Danilin A. R., Kovrizhnykh O. O. On the problem of controlling a small mass point in an environment without resistance, *Dokl. Akad. Nauk*, 2013, vol. 448, no. 6, pp. 612–614 (in Russian). https://doi.org/10.7868/S086956521325004X
9. Danilin A. R., Kovrizhnykh O. O. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal problem with two small parameters, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 46–53. https://doi.org/10.1134/S0081543815020066
10. Zhang Y., Naidu D. S., Chenxiao Cai, Yun Zou. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012, *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
11. Kurina G. A., Nguyen T. H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear–quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. https://doi.org/10.1134/S0965542512040100

12. Kurina G. A., Hoai N. T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case, *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, pp. 020073. https://doi.org/10.1063/1.5049067
13. Shaburov A. A. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space $\mathbb{R}^n$ with an integral convex performance index, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 303–310 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310
14. Rockafellar R. T. *Convex analysis*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.
15. Danilin A. R., Shaburov A. A. Asymptotic expansion of solution to singularly perturbed optimal control problem with convex integral quality functional with terminal part depending on slow and fast variables, *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, issue 2, pp. 82–96.

Received 01.03.2020

Danilin Aleksei Rufimovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
E-mail: dar@imm.uran.ru

Shaburov Aleksandr Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: alexandershaburov@mail.ru

Citation: A. R. Danilin, A. A. Shaburov. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index, whose terminal part additively depends on slow and fast variables, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 33–41.