Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 42–59

УДК 517.958, 517.984.56

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ЛАНДАУ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ $V \in L^P_{\mathrm{LOC}}(\mathbb{R}^2)$, $P > 1$

Рассматривается двумерный оператор Шрёдингера $\widehat{H}_B + V$ с однородным магнитным полем $B \in \mathbb{R}$ и с электрическим потенциалом V из пространства $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ вещественнозначных функций $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$. Предполагается, что поток $\eta = (2\pi)^{-1}Bv(K)$ магнитного поля B через элементарную ячейку K решетки Λ, где $v(K)$ — площадь ячейки K, является рациональным числом (из $\mathbb{Q}$). Доказано, что для любого $p > 1$ (и любой решетки Λ) в банаховом пространстве $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$ существует типичное в смысле Бэра множество $\mathcal{O}$ (содержащее плотное G_δ -множество) такое, что для любого электрического потенциала $V \in \mathcal{O}$ и любого однородного магнитного поля B с рациональным потоком $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ абсолютно непрерывен.

Ключевые слова: двумерный оператор Шрёдингера, периодический электрический потенциал, однородное магнитное поле, спектр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-04

Введение

Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$\widehat{H}_B + V = \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)^2 + V, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$, с однородным магнитным полем $B \in \mathbb{R}$ и периодическим с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ электрическим потенциалом $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Пусть E^1, E^2 — базисные векторы решетки Λ, $\Lambda = \{N_1E^1 + N_2E^2 : N_1,\, N_2 \in \mathbb{Z}\}$; E^1_*, E^2_* — базисные векторы обратной решетки $\Lambda^* = \{N_1E^1_* + N_2E^2_* : N_1,\, N_2 \in \mathbb{Z}\}$, для которых $(E^\mu_*, E^\nu) = \delta_{\mu\nu}$, $\mu,\, \nu = 1, 2$ (через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ обозначаются скалярное произведение и длина векторов из $\mathbb{R}^2$, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера). Пусть $\eta = (2\pi)^{-1}Bv(K)$ — поток магнитного поля через элементарную ячейку $K = \{\xi_1E^1 + \xi_2E^2 : 0 \leqslant \xi_j \leqslant 1,\ j = 1, 2\}$ решетки Λ, где $v(K)$ — площадь ячейки K. В настоящей работе предполагается, что η — ненулевое рациональное число ($\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$).

Обозначим через $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, и $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ пространства периодических с решеткой периодов Λ функций $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ из $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и $C(\mathbb{R})$ соответственно. На пространствах $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ определим нормы $\|W\|_{L^p(K)} \doteq \|W(\cdot|_K)\|_{L^p(K)}$, $\|W\|_{C(K)} \doteq$ $\doteq \|W(\cdot|_K)\|_{C(K)}$. Пусть W_Y — коэффициенты Фурье функций $W \in L^1_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$,

$$W_Y = \big(v(K)\big)^{-1} \int_K W(x)e^{-i\,(Y,x)}\,dx, \quad Y \in 2\pi\Lambda^*.$$

Спектр гамильтониана Ландау

$$\widehat{H}_B = \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)^2$$

(при $B \neq 0$) состоит из собственных значений $\lambda = (2j+1)|B|$, $j \in \mathbb{Z}_+ \doteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, бесконечной кратности (уровни Ландау). В [1] доказано, что для периодического точечного потенциала V все уровни Ландау $\lambda = (2j+1)|B|$, $j \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями оператора (0.1), если решетка периодов является одноатомной и $\mathbb{Q} \ni |\eta| > 1$ (в этом случае имеется также абсолютно непрерывный спектр). Потенциалы $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, имеют нулевую грань в смысле квадратичных форм относительно свободного оператора Шрёдингера $-\Delta = -\partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2$ и, следовательно, относительно операторов $\widehat{H}_B$, поэтому (из разложения оператора $\widehat{H}_B + V$ в прямой интеграл "послойных" операторов с компактной резольвентой, зависящих от магнитного квазиимпульса, следует, что) при $\eta \in \mathbb{Q}$ в спектре оператора (0.1) нет сингулярной составляющей и при отсутствии собственных значений спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ абсолютно непрерывен [2,3]. Однако неизвестно, существуют ли непостоянные потенциалы $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, для которых в спектре оператора $\widehat{H}_B + V$ имеются собственные значения для какого-либо однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ [4–6].

В [7] приведено доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1), если V — непостоянный тригонометрический многочлен и $\eta \in \{\pm Q^{-1} : Q \in \mathbb{N}\}$.

В [6] доказано, что в банаховом пространстве $(C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C(K)})$ существует типичное в смысле Бэра множество (плотное G_δ -множество) $\mathcal{O}$ такое, что для любого потенциала $V \in \mathcal{O}$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ спектр оператора (0.1) абсолютно непрерывен. Аналогичное утверждение для потенциалов V из пространства $(L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(K)})$ получено в [8][1].

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 0.1. *Для любого $p > 1$ в пространстве $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$ существует типичное в смысле Бэра множество $\mathcal{O}$ (дополнение которого является множеством первой категории) такое, что для любого электрического потенциала $V \in \mathcal{O}$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ абсолютно непрерывен.*

При $B = 0$ оператор (0.1) является частным случаем двумерного магнитного оператора Шрёдингера

$$\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right)^2 + \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right)^2 + V, \qquad (0.2)$$

где магнитный потенциал $A = (A_1, A_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и электрический потенциал $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов Λ. В этом случае магнитное поле $B(x) = \partial A_2/\partial x_1 - \partial A_1/\partial x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$, имеет нулевой поток через элементарную ячейку K решетки Λ. Спектр периодического оператора Шрёдингера (0.2) исследовался во многих работах (см. [9–13] и ссылки в этих статьях). В [12, 13], в частности, доказано, что спектр оператора (0.2) абсолютно непрерывен, если функции V и $|A|^2$ имеют нулевую грань в смысле квадратичных форм относительно свободного оператора Шрёдингера $-\Delta$. Следовательно, спектр оператора (0.1) при $B = 0$ абсолютно непрерывен для всех потенциалов $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$ [9]. Обзор результатов об абсолютной непрерывности спектра многомерных периодических операторов Шрёдингера приведен в [14–16].

Утверждение, аналогичное теореме 0.1, справедливо также для двумерного оператора Дирака

$$\widehat{\sigma}_1\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \widehat{\sigma}_2\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2, \qquad (0.3)$$

действующего в $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, где $\widehat{\sigma}_j$, $j = 1, 2, 3$, — матрицы Паули, $\widehat{I}_2$ — единичная 2×2-матрица, $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $m \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$, и рассматривается однородное магнитное

[1] В [8, теорема 3] утверждается существование множества второй категории $\mathcal{O} \subseteq L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ такого, что для всех $V \in \mathcal{O}$ и всех однородных магнитных полей B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ абсолютно непрерывен. Но множество $\mathcal{O}$ при доказательстве получено как дополнение множества первой категории, то есть оно является типичным (в смысле Бэра).

поле B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$. При $B \neq 0$, $m(\cdot) \equiv m_0 \in \mathbb{R}$ и $V(\cdot) \equiv 0$ спектр оператора (0.3) состоит из собственных значений (бесконечной кратности) $\lambda_0 = m_0 \operatorname{sign} B$ (где $\operatorname{sign} B = 1$ при $B > 0$ и $\operatorname{sign} B = -1$ при $B < 0$) и $\lambda_j^{\pm} = \pm(m_0^2 + 2|B|j)^{1/2}$, $j \in \mathbb{N}$. Если $m(\cdot) \operatorname{sign} B + V(\cdot) \equiv$ $\equiv C \in \mathbb{R}$, то у оператора (0.3) также имеется собственное значение $\lambda = C$. Для произвольной невозрастающей функции $(0,1] \ni \varepsilon \mapsto \mathcal{R}(\varepsilon) \in (0,+\infty)$, для которой $\mathcal{R}(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$, обозначим через $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ множество функций $m \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ таких, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ найдется тригонометрический многочлен $\mathcal{P}^{(\varepsilon)} \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которого $\|m - \mathcal{P}^{(\varepsilon)}\|_{L^p(K)} < \varepsilon$ и для коэффициентов Фурье $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y$, $Y \in 2\pi\Lambda^*$, при $|Y| > \mathcal{R}(\varepsilon)$ справедливо равенство $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y = 0$. В [17] доказано, что для любой рассматриваемой функции $\mathcal{R}(\cdot)$ в банаховом пространстве $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$, $p > 2$, существует типичное в смысле Бэра множество $\mathcal{O}$ такое, что для всех $V \in \mathcal{O}$, всех $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора Дирака (0.3) абсолютно непрерывен.

Доказательство теоремы 0.1 приведено в § 1. Оно опирается на теорему 1.1, которая доказана в § 4. В § 2 собраны необходимые результаты из магнитно-блоховской теории. В § 3 содержится ряд вспомогательных утверждений.

§ 1. Доказательство теоремы 0.1

Пусть $p > 1$. Обозначим $U^{(p)}_R = \{W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \colon \|W\|_{L^p(K)} < R\}$, $U^{(p)}_R(W') =$ $= \{W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \colon \|W - W'\|_{L^p(K)} < R\}$, где $R > 0$, $W' \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Для $B > 0$, $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$ положим

$$\mathcal{L}(\Lambda, B; V, \widetilde{Y}) \doteq |V_{\widetilde{Y}}| - \sum_{Y \,\in\, 2\pi\Lambda^* \setminus \{0\}} e^{-|Y|^2/4B}\, |V_{\widetilde{Y}+Y}|.$$

Следующая теорема 1.1, доказательство которой приведено в § 4, является ключевым утверждением настоящей работы.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $p > 1$, $0 < \theta < \min\{1, 4((p-1)/p)^2\}$ и рассматривается однородное магнитное поле $B > 0$ с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$. Тогда для любых $R > 0$ и $L > 0$ существуют числа $\widetilde{C}(R,L) = \widetilde{C}(R,L;p,\theta,\Lambda,K,B) > 0$ и $C'(R,L) = C'(R,L;p,\theta,\Lambda,K,B) > 0$ такие, что для любой функции $V \in U^{(p)}_R \subset L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которой у оператора $\widehat{H}_B + V$ имеется некоторое собственное значение $\lambda \in [-L, L]$, и любого вектора $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, для которого $|\widetilde{Y}| \geqslant \widetilde{C}(R,L)$, выполняется оценка*

$$\mathcal{L}(\Lambda, B; V, \widetilde{Y}) \leqslant C'(R,L)\, |\widetilde{Y}|^{-\theta}. \tag{1.1}$$

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает теорема 1.2.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $p > 1$, $0 < \theta < \min\{1, 4((p-1)/p)^2\}$, $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и задано однородное магнитное поле $B > 0$ с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$. Предположим, что существует последовательность векторов $\widetilde{Y}^{(j)} \in 2\pi\Lambda^*$, $j \in \mathbb{N}$, для которой $|\widetilde{Y}^{(j)}| \to +\infty$ и*

$$|\widetilde{Y}^{(j)}|^\theta \mathcal{L}(\Lambda, B; V, \widetilde{Y}) \to +\infty$$

при $j \to +\infty$. Тогда спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ абсолютно непрерывен.

В условиях теоремы 1.2 при $p = 2$ можно выбрать число $\theta = 1$ (см. [8, теорема 1]).

Для всех $r > 0$ и $B > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{Y \,\in\, 2\pi\Lambda^* \colon |Y| \,\geqslant\, r} e^{-|Y|^2/4B} \leqslant C(\Lambda)(B + r)\, e^{-r^2/4B}, \tag{1.2}$$

где константа $C(\Lambda)>0$ зависит только от решетки Λ.

Для $R>0$, $L>0$ и $B>0$ (при условии $\eta\in\mathbb{Q}$) обозначим через $\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$ множество функций $V\in U_R^{(p)}\subset L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p>1$, для которых у оператора $\widehat{H}_B+V$ имеется некоторое собственное значение $\lambda\in[-L,L]$.

Теорема 1.1 используется при доказательстве следующей теоремы 1.3.

Т е о р е м а 1.3. *Для любых $p>1$, $R>0$, $L>0$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$ множество $\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$ нигде не плотно в $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}),\|\cdot\|_{L^p(K)})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V\in\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$. Выберем любое число $\varepsilon>0$, для которого $\varepsilon<R-\|V\|_{L^p(K)}$. Обозначим

$$b\doteq\big(v(K)\big)^{-1/p}\,\frac{\varepsilon}{8}\,,\quad \delta\doteq\big(1+C(\Lambda)B\big)^{-1}\,\frac{\varepsilon}{32}\,.$$

Пусть для числа $r>0$ выполняется неравенство

$$C(\Lambda)(B+r)\,e^{-r^2/4B}\big(v(K)\big)^{-1/p}R\leqslant\frac{b}{4}\,.$$

Так как $|V_Y|\to0$ при $|Y|\to+\infty$, то вектор $\widetilde{Y}\in2\pi\Lambda^*$ можно выбрать так, что

$$|\widetilde{Y}|>2r,\quad |\widetilde{Y}|\geqslant\widetilde{C}(R,L),\quad b\geqslant4C'(R,L)|\widetilde{Y}|^{-\theta},$$

$$\big(v(K)\big)^{1/p}\Bigg(\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|\,Y-\widetilde{Y}\,|\,<\,r}|V_Y|+\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|\,Y+\widetilde{Y}\,|\,<\,r}|V_Y|\Bigg)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Для функции V определим функцию $V'\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, имеющую коэффициенты Фурье $V'_{\widetilde{Y}}=V'_{-\widetilde{Y}}=b$, $V'_{\widetilde{Y}}=0$, если $|Y-\widetilde{Y}|<r$ или $|Y+\widetilde{Y}|<r$, и $V'_{\widetilde{Y}}=V_Y$, если $|Y-\widetilde{Y}|\geqslant r$ и $|Y+\widetilde{Y}|\geqslant r$. Тогда

$$\|V-V'\|_{L^p(K)}\leqslant\big(v(K)\big)^{1/p}\Bigg(2b+\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|\,Y-\widetilde{Y}\,|\,<\,r}|V_Y|+\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|\,Y+\widetilde{Y}\,|\,<\,r}|V_Y|\Bigg)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

и для любой функции $V''\in U_\delta^{(p)}\subset L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

$$\|V-V'-V''\|_{L^p(K)}\leqslant\|V-V'\|_{L^p(K)}+\|V''\|_{L^p(K)}<\frac{\varepsilon}{2}+\delta<\varepsilon<R-\|V\|_{L^p(K)},$$

поэтому $U_\delta^{(p)}(V')\subset U_R^{(p)}$. Справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(\Lambda,B;V'+V'',\widetilde{Y})\geqslant b-\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|Y|\,\geqslant\,r}e^{-|Y|^2/4B}\,|V'_{\widetilde{Y}+Y}|-\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}e^{-|Y|^2/4B}\,|V''_{\widetilde{Y}+Y}|.\quad(1.3)$$

Так как для всех $Y\in2\pi\Lambda^*$

$$|V'_Y|\leqslant\big(v(K)\big)^{-1/p}\,\|V'\|_{L^p(K)}<\big(v(K)\big)^{-1/p}R,\quad |V''_Y|\leqslant\big(v(K)\big)^{-1/p}\,\|V''\|_{L^p(K)}<\big(v(K)\big)^{-1/p}\delta,$$

то с помощью (1.2) получаем

$$\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\,|Y|\,\geqslant\,r}e^{-|Y|^2/4B}\,|V'_{\widetilde{Y}+Y}|\leqslant C(\Lambda)(B+r)\,e^{-r^2/4B}\big(v(K)\big)^{-1/p}R\leqslant\frac{b}{4}\,,$$

$$\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} e^{-|Y|^2/4B}\,|V''_{\widetilde{Y}+Y}| \leqslant \bigl(1+C(\Lambda)B\bigr)\bigl(v(K)\bigr)^{-1/p}\delta \,=\, \frac{b}{4}\,.$$

Поэтому из (1.3) вытекает неравенство

$$\mathcal{L}(\Lambda,B;V'+V'',\widetilde{Y}) \,\geqslant\, b-\frac{b}{4}-\frac{b}{4} \,=\, \frac{b}{2} \,\geqslant\, 2C'(R,L)|\widetilde{Y}|^{-\theta}.$$

Следовательно (в силу теоремы 1.1), $U^{(p)}_\delta(V') \cap \mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L) = \varnothing$. Но число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым и V — любая функция из $\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$, поэтому множество $\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$ нигде не плотно. Теорема 1.3 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 0.1. Пусть $\mathcal{M}^{(p)}(\eta)$, $\eta\in\mathbb{Q}$, — множество функций $V\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p>1$, для которых в спектре оператора $\widehat{H}_B+V$ для однородного магнитного поля B с потоком η имеются собственные значения. Если $\eta\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$, то

$$\mathcal{M}^{(p)}(\eta) \,=\, \bigcup_{R,\,L\,\in\,\mathbb{N}} \mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L),$$

где (в силу теоремы 1.3) множества $\mathcal{M}_p(\Lambda,B;R,L)$ нигде не плотны в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Поэтому $\mathcal{M}^{(p)}(\eta)$, $\eta\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$, — множества первой категории. Случай $\eta\in\mathbb{Q}\cap(-\infty,0)$ сводится к случаю $-\eta\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$ при комплексном сопряжении оператора (0.1). Откуда $\mathcal{M}^{(p)}(\eta)=\mathcal{M}^{(p)}(-\eta)$ для всех $\eta\in\mathbb{Q}$. Кроме того, $\mathcal{M}^{(p)}(0)=\varnothing$ [9]. Поэтому множество $\mathcal{O} \doteq L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\setminus \bigcup\limits_{\eta\,\in\,\mathbb{Q}} \mathcal{M}^{(p)}(\eta)$ является типичным (в смысле Бэра) и для любого электрического потенциала $V\in\mathcal{O}$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta\in\mathbb{Q}$ в спектре оператора $\widehat{H}_B+V$ нет собственных значений и, следовательно, спектр абсолютно непрерывен. Теорема 0.1 доказана.

§ 2. Магнитно-блоховская теория

В этом параграфе дается краткое изложение магнитно-блоховской теории (см. также [1]) и приведена теорема 2.1, которая используется при доказательстве теоремы 1.1.

Фиксируем однородное магнитное поле B с потоком $\eta = PQ^{-1}$, где $P,\,Q\in\mathbb{N}$ — взаимно простые числа. Пусть координаты в $\mathbb{R}^2$ задаются в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2. Так как операторы (0.1) унитарно эквивалентны при разном выборе базисных векторов e_1, e_2, то можно считать, что $E^1_1>0$, $E^1_2=0$ и $E^2_2>0$, где $E^\mu_j=(E^\mu,e_j)$, $\mu,\,j=1,\,2$. Пусть $K^*=\{\xi_1E^1_*+\xi_2E^2_* : 0\leqslant\xi_j\leqslant1,\ j=1,\,2\}$ — элементарная ячейка решетки Λ^* с площадью $v(K^*)=\bigl(v(K)\bigr)^{-1}=(E^1_1E^2_2)^{-1}$. Определим также “укрупненную” решетку $\widetilde{\Lambda}$ с базисными векторами $\widetilde{E}^1=QE^1$, $\widetilde{E}^2=E^2$. Через $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}^*$ обозначим элементарные ячейки решеток $\widetilde{\Lambda}$ и $\widetilde{\Lambda}^*$ (для базисных векторов $\widetilde{E}^1$, $\widetilde{E}^2$ и $\widetilde{E}^1_*=Q^{-1}E^1_*$, $\widetilde{E}^2_*=E^2_*$ соответственно). Имеем $B\widetilde{E}^1_1\widetilde{E}^2_2=2\pi P\in2\pi\mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{H}_B=\mathcal{H}^0_B$ — множество функций $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ из $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих при почти всех $x\in\mathbb{R}^2$ условиям

$$\varphi(x+\widetilde{E}^\mu) \,=\, e^{iB\widetilde{E}^\mu_1x_2}\varphi(x), \quad \mu=1,\,2;$$

$\mathcal{H}^q_B$, $q>0$, — множество функций из $\mathcal{H}_B$, принадлежащих классу Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$; $\mathcal{H}^\infty_B = \mathcal{H}_B\cap C^\infty(\mathbb{R}^2)$. На пространстве $\mathcal{H}_B$ определим скалярное произведение

$$(\psi,\varphi)_B \,=\, \int_{\widetilde{K}} \overline{\psi}\varphi\,dx, \quad \psi,\,\varphi\in\mathcal{H}_B,$$

и соответствующую ему норму $\|\varphi\|_B=(\varphi,\varphi)^{1/2}_B$, $\varphi\in\mathcal{H}_B$.

Для функций $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ для всех $k \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ положим

$$\widehat{U}(\Phi)(k;x) = \sum_{\mu_1,\,\mu_2\,\in\,\mathbb{Z}} e^{-(iB/2)\widetilde{E}_1^2\widetilde{E}_2^2\mu_2(\mu_2-1)}\, e^{-iB(\mu_1\widetilde{E}_1^1+\mu_2\widetilde{E}_1^2)x_2}\, e^{-i(k,x+\mu_1\widetilde{E}^1+\mu_2\widetilde{E}^2)}\, \Phi(x+\mu_1\widetilde{E}^1+\mu_2\widetilde{E}^2),$$

при этом $\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot) \in \mathcal{H}_B^\infty$ для всех $k \in \mathbb{R}^2$. Линейный оператор

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \ni \Phi \mapsto \widehat{U}(\Phi) = \{2\pi\widetilde{K}^* \ni k \mapsto \widehat{U}(\Phi)(k;\cdot) \in \mathcal{H}_B\}$$

продолжается по непрерывности до унитарного оператора

$$L^2(\mathbb{R}^2) \ni \Phi \mapsto \widehat{U}(\Phi) \in \int_{2\pi\widetilde{K}^*}^{\oplus} \mathcal{H}_B \,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)}\,.$$

Рассмотрим самосопряженные операторы

$$\widehat{H}_B(k) = \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)^2, \quad k \in \mathbb{R}^2,$$

действующие в $\mathcal{H}_B$ и имеющие область определения $D(\widehat{H}_B(k)) = \mathcal{H}_B^2$. Операторы $k_1 - - i\partial/\partial x_1$ и $k_2 - i\partial/\partial x_2 - Bx_1$ также действуют в $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_B^1 \subset D(k_1 - i\partial/\partial x_1)$, $\mathcal{H}_B^1 \subset \subset D(k_2 - i\partial/\partial x_2 - Bx_1)$. Так как $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \subseteq L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, то электрический потенциал V (как оператор умножения в пространстве $\mathcal{H}_B$) имеет нулевую грань в смысле квадратичных форм относительно операторов $\widehat{H}_B(k)$, $k \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, для всех $k \in \mathbb{R}^2$ квадратичная форма

$$\mathcal{W}_{B,V}(k;\psi,\varphi) = \left(\left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\psi, \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right)_B + \\ + \left(\left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\psi, \left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\varphi\right)_B + (\psi, V\varphi)_B$$

с областью определения $Q(\mathcal{W}_{B,V}(k;\cdot,\cdot)) = \mathcal{H}_B^1 \subset \mathcal{H}_B$ является замкнутой и полуограниченной. Пусть $\widehat{H}_B(k) + V$ — самосопряженный оператор, порождающий квадратичную форму $\mathcal{W}_{B,V}(k;\cdot,\cdot)$ [18, глава VI] и имеющий некоторую область определения $D(\widehat{H}_B(k) + V) \subset \subset Q(\mathcal{W}_{B,V}(k;\cdot,\cdot)) = \mathcal{H}_B^1$, не зависящую от k.

Рассмотрим также квадратичную форму (где скалярные произведения рассматриваются в $L^2(\mathbb{R}^2)$)

$$\mathcal{W}_{B,V}(\Psi,\Phi) = \left(-i\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, -i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) + \left(\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\Psi, \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\Phi\right) + (\Psi, V\Phi)$$

с областью определения $Q(\mathcal{W}_{B,V}(\cdot,\cdot)) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, состоящей из функций

$$\Phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2),$$

для которых $\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot) \in \mathcal{H}_B^1$ при почти всех $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$ и

$$\int_{2\pi\widetilde{K}^*} \left\|-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot)\right\|_B^2 dk + \int_{2\pi\widetilde{K}^*} \left\|\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot)\right\|_B^2 dk < +\infty.$$

Для всех Ψ, $\Phi \in Q(\mathcal{W}_{B,V}(\cdot,\cdot))$

$$\mathcal{W}_{B,V}(\Psi,\Phi) = \int_{2\pi\widetilde{K}^*} \mathcal{W}_{B,V}(k;\widehat{U}(\Psi)(k;\cdot),\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot))\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)}\,.$$

При этом электрический потенциал $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ (как оператор умножения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$) имеет нулевую грань в смысле квадратичных форм относительно оператора $\widehat{H}_B$ и квадратичная форма $\mathcal{W}_{B,V}(\cdot,\cdot)$ замкнута и полуограниченна. Для самосопряженного оператора $\widehat{H}_B+V$, порождающего квадратичную форму $\mathcal{W}_{B,V}(\cdot,\cdot)$, справедливо разложение

$$\widehat{U}(\widehat{H}_B+V)\widehat{U}^{-1} = \int^{\oplus}_{2\pi\widetilde{K}^*} \big(\widehat{H}_B(k)+V\big)\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)}\,, \tag{2.1}$$

в котором операторы $\widehat{H}_B(k)+V$ являются “послойными” операторами и вектор $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$ называется *магнитным квазиимпульсом*. Откуда, в частности, следует, что $D(\widehat{H}_B+V)$ — множество функций $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, для которых $\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot) \in D(\widehat{H}_B(k)+V)$ при почти всех $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$ и

$$\|(\widehat{H}_B+V)\Phi\|^2 = \int_{2\pi\widetilde{K}^*} \big\|\big(\widehat{H}_B(k)+V\big)\widehat{U}(\Phi)(k;\cdot)\big\|^2_B\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)} < +\infty.$$

Для векторов $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$ (где $k,\ \varkappa \in \mathbb{R}^2$) замкнутая секториальная квадратичная форма $\mathcal{W}_{B,V}(k+i\varkappa;\cdot,\cdot)$ с областью определения $Q(\mathcal{W}_{B,V}(k+i\varkappa;\cdot,\cdot)) = \mathcal{H}^1_B \subset \mathcal{H}_B$ порождается m -секториальным оператором $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)+V$ (см. [18, глава VI]) с областью определения $D(\widehat{H}_B(k+i\varkappa)+V) \subset Q(\mathcal{W}_{B,V}(k+i\varkappa;\cdot,\cdot)) = \mathcal{H}^1_B$, не зависящей от $k+i\varkappa$.

Самосопряженные операторы $\widehat{H}_B(k)+V$, $k \in \mathbb{R}^2$, имеют компактную резольвенту и, следовательно, их спектр дискретен. Пусть $\lambda_j(k) \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, — собственные значения операторов $\widehat{H}_B(k)+V$ с учетом их кратности, упорядоченные по возрастанию. Для любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^2$ и любого вектора $k^0 \in \mathbb{R}^2$ семейство операторов $\widehat{H}_B(k^0+ze)+V$, $z \in \mathbb{C}$, является самосопряженным аналитическим семейством типа (B) [19, § VII.4] и из теории возмущений следует, что функции $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \lambda_j(k^0+\xi e)$ непрерывны и являются аналитическими вне их пересечений[2]. С другой стороны, оператор $\widehat{H}_B+V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу (2.1), поэтому в спектре оператора $\widehat{H}_B+V$ нет сингулярной составляющей [2,3] и собственные значения λ оператора $\widehat{H}_B+V$ являются собственными значениями операторов $\widehat{H}_B(k)+V$ для всех k из некоторых подмножеств ячейки $2\pi\widetilde{K}^*$ положительной меры Лебега [20, теорема XIII.85]. Тогда из аналитической теоремы Фредгольма следует, что λ — собственные значения операторов $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)+V$ для всех $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$. Поэтому справедлива следующая теорема (см. также [1,6,8])[3].

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, и λ — собственное значение оператора* (0.1) *для некоторого однородного магнитного поля B с потоком $\eta = PQ^{-1} \in \mathbb{Q}$, где $P,Q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа. Тогда λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_B(k+\varkappa)+V$ при всех $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$.*

§ 3. Вспомогательные утверждения

Фиксируем однородное магнитное поле B с потоком $\eta = PQ^{-1} \in \mathbb{Q}$, где $P,\,Q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа.

Из разложения (2.1) и теоремы 2.1 (при $V(\cdot) \equiv 0$) следует, что при всех $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$ операторы $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)$ имеют дискретный спектр $\{(2j+1)B : j \in \mathbb{Z}_+\}$, при этом каждое собственное значение $(2j+1)B$, $j \in \mathbb{Z}_+$, P -кратно вырождено [1]. Для векторов $k \in \mathbb{R}^2$

[2]Аналогичные самосопряженные аналитические семейства “послойных” операторов типа (B) рассматривались в [9] для оператора (0.2) при $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $A \in L^{2p}_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, $p > 1$.

[3]Впервые “послойные” операторы при комплексных значениях квазиимпульса использовались при доказательстве абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шрёдингера в [21].

пусть $\mathcal{H}_B^{(j)}(k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — подпространства собственных функций операторов $\widehat{H}_B(k)$ с собственным значением $\lambda = (2j+1)B$. В $\mathcal{H}_B$ определим магнитные операторы уничтожения и рождения

$$\widehat{Z}_{\mp}(k) = \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \pm i\left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right),$$

$D(\widehat{Z}_{\mp}(k)) = \mathcal{H}_B^1$. Справедливы равенства $\widehat{H}_B(k) = \widehat{Z}_+(k)\widehat{Z}_-(k) + B = \widehat{Z}_-(k)\widehat{Z}_+(k) - B$. При этом $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}(k)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{Z}_-(k)\Psi = 0$.

Для функций $\Psi(k) \in \mathcal{H}_B^{(0)}(k)$ обозначим

$$\Psi^{(j)}(k) \doteq \frac{(2B)^{-j/2}}{\sqrt{j!}}\,\widehat{Z}_+^j(K)\Psi(k), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $\Psi^{(j)}(k) \in \mathcal{H}_B^{(j)}(k)$, $\|\Psi^{(j)}(k)\|_B = \|\Psi(k)\|_B$ и

$$\widehat{Z}_+(k)\Psi^{(j)}(k) = \sqrt{2B(j+1)}\,\Psi^{(j+1)}(k), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1}$$

$$\widehat{Z}_-(k)\Psi^{(j)}(k) = \sqrt{2Bj}\,\Psi^{(j-1)}(k), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Если функции $\Psi_s(k) \in \mathcal{H}_B^{(0)}(k)$, $s = 1, \dots, P$, образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_B^{(0)}(k)$, то для любого $j \in \mathbb{N}$ функции $\Psi_s^{(j)}(k)$, $s = 1, \dots, P$, образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_B^{(j)}(k)$. При этом

$$\mathcal{H}_B = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}_B^{(j)}. \tag{3.3}$$

Через $\widehat{P}^{(j)}(k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, обозначим ортогональный проектор в $\mathcal{H}_B$ на подпространство $\mathcal{H}_B^{(j)}(k)$.

Фиксируем какой-либо вектор $k^0 \in \mathbb{R}^2$. В дальнейшем будут использоваться сокращенные обозначения $\widehat{Z}_{\mp} \doteq \widehat{Z}_{\mp}(k^0)$, $\mathcal{H}_B^{(j)} \doteq \mathcal{H}_B^{(j)}(k^0)$, $\widehat{P}^{(j)} \doteq \widehat{P}^{(j)}(k^0)$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Справедливы следующие три простые леммы.

Л е м м а 3.1 (см. [7]). *Для каждого вектора $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ существует унитарный оператор $\widehat{U}_Y : \mathcal{H}_B^{(0)} \to \mathcal{H}_B^{(0)}$ такой, что для всех $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$*

$$e^{\,i(Y,x)}\,\Psi = e^{-|Y|^2/4B}\,e^{((Y_1+iY_2)/2B)\widehat{Z}_+}\,\widehat{U}_Y\Psi \doteq e^{-|Y|^2/4B}\,\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{Y_1+iY_2}{2B}\right)^j\widehat{Z}_+^j\,\widehat{U}_Y\Psi,$$

где $Y_s = (Y, e_s)$, $s = 1, 2$.

С л е д с т в и е 3.1. *Для любых Ψ', $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$ и $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*(\supseteq 2\pi\Lambda^*)$ справедлива оценка*

$$|(\Psi', e^{\,i(Y,x)}\,\Psi)_B| = e^{-|Y|^2/4B}\,|(\Psi', \widehat{U}_Y\Psi)_B| \leqslant e^{-|Y|^2/4B}\,\|\Psi'\|_B\,\|\Psi\|_B.$$

Л е м м а 3.2. *Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и всех $\varphi \in \mathcal{H}_B^1$ справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{Z}_+ + \zeta)\varphi\|_B \geqslant \sqrt{2B}\,\|\varphi\|_B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\widehat{Z}_+ + \zeta = \widehat{Z}_+(k^0 + (\operatorname{Re}\zeta)e_1 - (\operatorname{Im}\zeta)e_2)$, то доказываемое неравенство следует из (3.3) и (3.1). $\square$

Л е м м а 3.3 (см. [17]). *Для любого* $p > 2$ *существует число* $C_p = C_p(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{K}, B) > 0$ *такое, что для всех* $\widetilde{W} \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, *всех* $k \in \mathbb{R}^2$ *и всех* $\varphi \in \mathcal{H}^1_B$

$$\|\widetilde{W}\varphi\|_B \leqslant C_p \, \|\widetilde{W}\|_{L^p(\widetilde{K})} \, \|\widehat{Z}_+(k)\varphi\|_B.$$

Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ определим самосопряженные операторы

$$\widehat{J}_\zeta \doteq \big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})(\widehat{Z}_+ + \zeta)\big)^{1/2},$$

действующие в $\mathcal{H}_B$, $D(\widehat{J}_\zeta) = \mathcal{H}^1_B$. При этом $\|\widehat{J}_\zeta\varphi\|_B = \|(\widehat{Z}_+ + \zeta)\varphi\|_B$, $\varphi \in \mathcal{H}^1_B$. Будут рассматриваться также операторы $\widehat{J}^z_\zeta$, $z \in \mathbb{C}$, для которых

$$\widehat{J}^z_\zeta \, \varphi = \sum_{j \geqslant 0} \big(2B(j+1)\big)^{z/2} \, \widehat{P}^{(j)}(k^0 + (\operatorname{Re}\zeta)e_1 - (\operatorname{Im}\zeta)e_2)\,\varphi, \quad \varphi \in D(\widehat{J}^z_\zeta),$$

где $D(\widehat{J}^z_\zeta) = \mathcal{H}_B$ при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ и

$$D(\widehat{J}^z_\zeta) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H}_B : \sum_{j \geqslant 0} \big(2B(j+1)\big)^{\operatorname{Re} z} \, \big\|\widehat{P}^{(j)}(k^0 + (\operatorname{Re}\zeta)e_1 - (\operatorname{Im}\zeta)e_2)\varphi\big\|^2_B < +\infty \right\}$$

при $\operatorname{Re} z > 0$.

Л е м м а 3.4. *Для любых* $p > 2$ *и* $\delta \in [0, 1 - (2/p))$ *существует число* $C_{p,\delta} = C_{p,\delta}(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{K}, B) > 0$ *такое, что для всех* $\widetilde{W} \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, *всех* $\zeta \in \mathbb{C}$ *и всех* $\varphi \in \mathcal{H}_B$

$$\|\widetilde{W}\widehat{J}^{\delta-1}_\zeta\varphi\|_B \leqslant C_{p,\delta} \, \|\widetilde{W}\|_{L^p(\widetilde{K})} \, \|\varphi\|_B. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $p_1 \in (2, p]$ так, что $1 - \delta = p_1/p \in ((2/p), 1]$. Вначале предположим, что $\widetilde{W} \in L^\infty_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Для функции $|\widetilde{W}|^{p/p_1} \in L^\infty_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (для которой полагаем $|\widetilde{W}(x)|^{p/p_1} = 0$ при $\widetilde{W}(x) = 0$) имеем $\big\| \, |\widetilde{W}|^{p/p_1} \big\|_{L^{p_1}(\widetilde{K})} = \|\widetilde{W}\|^{p/p_1}_{L^p(\widetilde{K})}$, поэтому из леммы 3.3 для любой функции $\varphi \in \mathcal{H}_B$ следует оценка

$$\| \, |\widetilde{W}|^{p/p_1} \widehat{J}^{-1}_\zeta \varphi \, \|_B \leqslant C_{p_1} \, \|\widetilde{W}\|^{p/p_1}_{L^p(\widetilde{K})} \, \|\varphi\|_B. \tag{3.5}$$

Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{H}_B$ определим при $t \in [0, 1]$ и $\tau \in \mathbb{R}$ функции

$$t + i\tau \mapsto \mathcal{G}_\varphi(t + i\tau) \doteq |\widetilde{W}|^{(p/p_1)(t+i\tau)} \, \widehat{J}^{-(t+i\tau)}_\zeta \varphi \in \mathcal{H}_B$$

(где $|\widetilde{W}(x)|^{(p/p_1)(t+i\tau)} = 0$, если $\widetilde{W}(x) = 0$). Функция $t + i\tau \mapsto \mathcal{G}_\varphi(t + i\tau) \in \mathcal{H}_B$ является непрерывной и ограниченной при $t \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и аналитической при $t \in (0, 1)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Так как $\|\widehat{J}^{-i\tau}_\zeta\varphi\|_B = \|\varphi\|_B$, $\tau \in \mathbb{R}$, то из (3.5) для всех $\tau \in \mathbb{R}$ получаем

$$\|\mathcal{G}_\varphi(i\tau)\|_B = \|\varphi\|_B, \quad \|\mathcal{G}_\varphi(1 + i\tau)\|_B \leqslant C_{p_1} \, \|\widetilde{W}\|^{p/p_1}_{L^p(\widetilde{K})} \, \|\varphi\|_B.$$

Тогда в силу леммы Адамара о трех прямых (см. [22]) для всех $t \in [0, 1]$

$$\|\mathcal{G}_\varphi(t)\|_B \leqslant \left(C_{p_1} \, \|\widetilde{W}\|^{p/p_1}_{L^p(\widetilde{K})} \right)^t \|\varphi\|_B.$$

Откуда при $t = p_1/p = 1 - \delta$ следует оценка (3.4) (и $C_{p,\delta} = C_{p_1}^{1-\delta}$). Теперь для функции $\widetilde{W} \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ при всех $n \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\widetilde{W}_n(x) = \begin{cases} \widetilde{W}(x), & \text{если } |\widetilde{W}(x)| \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

для которых $\widetilde{W}_n \in L^\infty_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и, следовательно, для них оценка (3.4) уже доказана для всех $\varphi \in \mathcal{H}_B$. Но тогда в пределе при $n \to +\infty$ получаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{H}_B$ выполняется включение $\widetilde{W}\widehat{J}^{\delta-1}\varphi \in \mathcal{H}_B$ и для функции $\widetilde{W}$ (и для всех $\varphi \in \mathcal{H}_B$) также справедлива оценка (3.4). Лемма 3.4 доказана. $\square$

Далее предполагается, что $p > 1$. Выберем числа $p_s > 0$, $s = 1, 2$, так, что

(1) если $1 < p < 2$, то $2 < p_s < 2p/(2-p)$, и если $p \geqslant 2$, то $p_s > p$,

(2) $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$.

Любую функцию $W \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ можно представить в виде $W = \widetilde{W}_1\widetilde{W}_2$, где $\widetilde{W}_s \in L^{p_s}_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\|\widetilde{W}_s\|_{L^{p_s}(\widetilde{K})} = \|W\|^{p/p_s}_{L^p(\widetilde{K})}$, $s = 1, 2$ (можно считать, что $\widetilde{W}_1(x) = |W(x)|^{p/p_1}$ при $W(x) \neq 0$ и $\widetilde{W}_1(x) = 0$ при $W(x) = 0$). Тогда для всех Φ', $\Phi'' \in \mathcal{H}^1_B$

$$|(\Phi', W\Phi'')_B| \leqslant \|\widetilde{W}_1\Phi'\|_B \, \|\widetilde{W}_2\Phi''\|_B.$$

Поэтому из леммы 3.4 вытекает лемма 3.5.

Л е м м а 3.5. *Пусть* $W \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, *и числа* $p_1 > 2$ *и* $p_2 > 2$ *удовлетворяют условиям* (1) *и* (2). *Тогда для любых* $\delta_s \in [0, 1 - (2/p_s))$, $s = 1, 2$, *всех* Φ', $\Phi'' \in \mathcal{H}^1_B$ *и всех* $\zeta \in \mathbb{C}$

$$|(\Phi', W\Phi'')_B| \leqslant C_{p_1,\delta_1} C_{p_2,\delta_2} \|W\|_{L^p(\widetilde{K})} \|\widehat{J}^{1-\delta_1}_\zeta \Phi'\|_B \, \|\widehat{J}^{1-\delta_2}\Phi''\|_B.$$

С л е д с т в и е 3.2. *Для любых* $p > 1$ *и* $\delta \in [0, \min\{2(p-1)/p, 1\})$ *существует число* $C'_{p,\delta} = C'_{p,\delta}(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{K}, B) > 0$ *такое, что для любой функции* $W \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, *всех* Φ', $\Phi'' \in \mathcal{H}^1_B$ *и любых* $\zeta \in \mathbb{C}$

$$|(\Phi', W\Phi'')_B| \leqslant C'_{p,\delta} \|W\|_{L^p(\widetilde{K})} \|\widehat{J}_\zeta \Phi'\|_B \, \|\widehat{J}^{1-\delta}\Phi''\|_B. \tag{3.6}$$

Следствие 3.2 получается из леммы 3.5 при $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta$ и при выборе соответствующих чисел $p_1 > 2$ и $p_2 > 2$. Если в неравенстве (3.6) положить $\zeta = 0$ и поменять местами Φ' и Φ'', то получится следствие 3.3.

С л е д с т в и е 3.3. *Для любых* $p > 1$ *и* $\delta \in [0, \min\{2(p-1)/p, 1\})$, *любой функции* $W \in L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *и всех* Φ', $\Phi'' \in \mathcal{H}^1_B$

$$|(\Phi', W\Phi'')_B| \leqslant C'_{p,\delta} \|W\|_{L^p(\widetilde{K})} \|\widehat{J}^{1-\delta}\Phi'\|_B \, \|\widehat{J}\Phi''\|_B.$$

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $R > 0$, $L > 0$, $V \in U^{(p)}_R \subset L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \subseteq L^p_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 1$, и при $\eta = PQ^{-1}$ (где P, $Q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа) у оператора $\widehat{H}_B + V$ существует собственное значение $\lambda \in [-L, L]$. Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ определим операторы

$$\widehat{H}_-(\zeta) \doteq \widehat{H}_B(k^0 + (\zeta/2)e_1 - (i\zeta/2)e_2) + V.$$

Если Φ', $\Phi'' \in \mathcal{H}^1_B$, то

$$i\left(\left(k_1^0 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Phi', \left(k_2^0 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\Phi''\right)_B -$$

$$- i\left(\left(k_2^0 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\Phi', \left(k_1^0 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Phi''\right)_B = -B\,(\Phi', \Phi'')_B$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}(\Phi', \widehat{H}_-(\zeta)\Phi'')_B = \mathcal{W}_{B,V}(k^0 + (\zeta/2)e_1 - (i\zeta/2)e_2; \Phi', \Phi'') \ = \\ = \ \big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi', \widehat{Z}_-\Phi''\big)_B + \big(\Phi', (V+B)\Phi''\big)_B.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Обозначим $W \doteq V + B - \lambda$. При этом

$$\|W\|_{L^p(\widetilde{K})} \ = \ Q^{1/p}\,\|W\|_{L^p(K)} \ < \ Q^{1/2}(R + L + B).$$

Из (4.1) и теоремы 2.1 следует теорема 4.1.

Т е о р е м а 4.1. *Для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ существует ненулевая функция $\Phi_\zeta \in D(\widehat{H}_-(\zeta)) \subset \mathcal{H}^1_B$ (являющаяся собственной функцией оператора $\widehat{H}_-(\zeta)$ с собственным значением λ) такая, что для всех $\Phi \in \mathcal{H}^1_B$ справедливо равенство*

$$\big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi, \widehat{Z}_-\Phi_\zeta\big)_B + (\Phi, W\Phi_\zeta)_B = 0. \tag{4.2}$$

Далее полагаем $\delta = \sqrt{\theta}$, где $\theta \in (0, \min\{1, 4(p-1)^2p^{-2}\})$. Через $C^{(\nu)}$, $\nu = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5$, будут обозначаться константы , зависящие только от R, L, p, δ, Λ, K и B. Для функций Φ_ζ, определяемых в теореме 4.1, положим $\Psi_\zeta \doteq \widehat{P}^{(0)}\Phi_\zeta$ и $\widetilde{\Phi}_\zeta \doteq \Phi_\zeta - \Psi_\zeta$. Выполняются оценки (см. (3.2), (3.3))

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \ \leqslant \ \|\widehat{Z}_-\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \ = \ \|\widehat{Z}_-\Phi_\zeta\|_B.$$

Так как области значений $R(\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})$ операторов $\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}$ совпадают с $\mathcal{H}_B$, то для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ можно выбрать функцию $\Phi'_\zeta \in \mathcal{H}^1_B$ так, что

$$P^{(0)}(k^0 + (\operatorname{Re}\zeta)e_1 - (\operatorname{Im}\zeta)e_2)\,\Phi'_\zeta \ = \ 0 \tag{4.3}$$

и $(\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi'_\zeta = \widehat{Z}_-\Phi_\zeta$. При этом из (3.1), (3.3) и условия (4.3) следуют оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\|\widehat{J}_\zeta\Phi'_\zeta\|_B \ \leqslant \ \|(\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi'_\zeta\|_B \ \leqslant \ \|\widehat{J}_\zeta\Phi'_\zeta\|_B.$$

Тогда, используя следствие 3.2 и равенство (4.2), получаем

$$\frac{1}{2}\,\|\widehat{J}_\zeta\Phi'_\zeta\|_B\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \ \leqslant \ \|(\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi'_\zeta\|_B\,\|\widehat{Z}_-\Phi_\zeta\|_B \ =$$

$$= \ \big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\Phi'_\zeta, \widehat{Z}_-\Phi_\zeta\big)_B \ = \ |(\Phi'_\zeta, W\Phi_\zeta)_B| \ \leqslant \ C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(\widetilde{K})}\,\|\widehat{J}_\zeta\Phi'_\zeta\|_B\,\|\widehat{J}^{1-\delta}\Phi_\zeta\|_B.$$

Откуда (так как $\widetilde{\Phi}_\zeta = 0$, если $\|\widehat{J}_\zeta\Phi'_\zeta\|_B = 0$)

$$\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \ \leqslant \ 2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{1-\delta}\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.4}$$

Т е о р е м а 4.2. *Для всех* $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \;\leqslant\; C^{(1)}\,\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j_0 \in \mathbb{N}$ — наименьшее число, для которого

$$\big(2B(j_0+1)\big)^{\delta/2} \geqslant 4\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}.$$

Тогда для всех $j \geqslant j_0$

$$\big(2B(j+1)\big)^{1/2} \;\geqslant\; 4\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\big(2B(j+1)\big)^{(1-\delta)/2}. \tag{4.6}$$

Обозначим $\chi^{(j_0)} \doteq \sum\limits_{j\,\geqslant\, j_0} \widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta$. В силу (4.4)

$$\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \;\leqslant 2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\big(\|\widehat{J}^{\,1-\delta}\chi^{(j_0)}\|_B + \|\widehat{J}^{\,1-\delta}(\Phi_\zeta - \chi^{(j_0)})\|_B\big).$$

Из (4.6) следует, что

$$2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{\,1-\delta}\chi^{(j_0)}\|_B \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\|\widehat{J}\,\chi^{(j_0)}\|_B \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B.$$

Кроме того,

$$\|\widehat{J}^{\,1-\delta}(\Phi_\zeta - \chi^{(j_0)})\|_B \;\leqslant\; (2Bj_0)^{(1-\delta)/2}\,\|\Phi_\zeta - \chi^{(j_0)}\|_B \;\leqslant\; (2Bj_0)^{(1-\delta)/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B.$$

Поэтому из (4.4) и последних оценок вытекает оценка

$$\frac{1}{2}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \leqslant \frac{1}{2}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B + \left(\frac{1}{2}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B - 2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{\,1-\delta}\chi^{(j_0)}\|_B\right) \leqslant$$

$$\leqslant\; 2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{\,1-\delta}(\Phi_\zeta - \chi^{(j_0)})\|_B \leqslant 2\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,(2Bj_0)^{(1-\delta)/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B.$$

Если $j_0 = 1$, то

$$\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \leqslant 4\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,(2B)^{(1-\delta)/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B \leqslant 2^{\delta/2}\sqrt{2B}\,\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.7}$$

Если $j_0 > 1$, то $(2Bj_0)^{\delta/2} < 4\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}$ и в этом случае

$$\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \;\leqslant\; \big(4\,Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\big)^{1/\delta}\,\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.8}$$

Оценка (4.5) теперь следует из (4.7) и (4.8). Теорема 4.2 доказана. □

С л е д с т в и е 4.1. *Для всех* $\zeta \in \mathbb{C}$ *и всех* $\Psi^{(j)} \in \mathcal{H}_B^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$|(\Psi^{(j)}, W\Phi_\zeta)_B| \;\leqslant\; C^{(2)}\,\big(2B(j+1)\big)^{(1-\delta)/2}\,\|\Psi^{(j)}\|_B\,\|\Phi_\zeta\|_B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия 3.3 и теоремы 4.2 получаем

$$|(\Psi^{(j)}, W\Phi_\zeta)_B| \;\leqslant\; Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{\,1-\delta}\Psi^{(j)}\|_B\,\|\widehat{J}\,\Phi_\zeta\|_B \;\leqslant$$

$$\leqslant\; Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\big(2B(j+1)\big)^{(1-\delta)/2}\,\|\Psi^{(j)}\|_B\,\big(\|\widehat{J}\,\Psi_\zeta\|_B + \|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B\big) \;\leqslant$$

$$\leqslant\; C^{(2)}\,\big(2B(j+1)\big)^{(1-\delta)/2}\,\|\Psi^{(j)}\|_B\,\|\Phi_\zeta\|_B,$$

где $C^{(2)} = Q^{1/p}\,C'_{p,\delta}\,(R+L+B)(\sqrt{2B} + C^{(1)})$. □

Т е о р е м а 4.3. *Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$, для которых $|\zeta| \geqslant \sqrt{8B}$, выполняется оценка*

$$\|\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \leqslant C^{(3)}\, |\zeta|^{-\delta}\, \|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.2), если положить $\Phi = \widehat{Z}_- \widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta \in \mathcal{H}_B^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, следуют равенства

$$\big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta, \widehat{Z}_-\Phi_\zeta\big)_B = \zeta\,\|\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B^2 = 2B\zeta\,\|\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B^2 = -(\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta, W\Phi_\zeta)_B$$

и при $j \in \mathbb{N}$

$$\big((\widehat{Z}_- + \overline{\zeta})\,\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta, \widehat{Z}_-\Phi_\zeta\big)_B = \zeta\,\|\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta\|_B^2 + (\widehat{Z}_-^2\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta, \widehat{Z}_-\widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta)_B =$$

$$= \zeta\cdot 2B(j+1)\,\|\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta\|_B^2 + 2Bj\,(\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta, \widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta)_B = -(\widehat{Z}_-\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta, W\Phi_\zeta)_B,$$

из которых с помощью следствия 4.1 получаем неравенства

$$|\zeta|\cdot\|\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B \leqslant C^{(2)}(2B)^{-\delta/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B \tag{4.10}$$

и при $j \in \mathbb{N}$

$$|\zeta|\cdot\|\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta\|_B \leqslant \frac{2Bj}{\sqrt{2B(j+1)}}\,\|\widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta\|_B + C^{(2)}\big(2B(j+1)\big)^{-\delta/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.11}$$

Пусть $j_0 \in \mathbb{N}$ — наибольшее число, для которого $\sqrt{2Bj_0} \leqslant |\zeta|$; $j_1 \in \mathbb{N}$ — наибольшее число, для которого $2j_1 \leqslant j_0$ (так как $j_0 \geqslant 4$, то $j_1 \geqslant 2$). Для всех чисел $j \in \{1,\ldots,j_1\}$

$$\frac{2Bj}{\sqrt{2B(j+1)}}\,\frac{1}{|\zeta|} \leqslant \frac{j}{\sqrt{(j+1)j_0}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Поэтому при $j \in \{1,\ldots,j_1\}$ (см. (4.11))

$$\|\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta\|_B \leqslant 2^{-1/2}\,\|\widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta\|_B + |\zeta|^{-1}\,C^{(2)}\big(2B(j+1)\big)^{-\delta/2}\,\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.12}$$

Обозначим $\widehat{P}_\downarrow^{(j)} \doteq \sum\limits_{s=0}^{j}\widehat{P}^{(s)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. В силу (4.10) и (4.12)

$$\|\widehat{P}_\downarrow^{(j_1)}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B^2 = \|\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B^2 + \sum_{j=1}^{j_1-1}\|\widehat{P}^{(j+1)}\Phi_\zeta\|_B^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B^2 + \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{j_1-1}\|\widehat{P}^{(j)}\Phi_\zeta\|_B^2 + 3\,\big(|\zeta|^{-1}C^{(2)}\big)^2\Bigg(\sum_{j=1}^{j_1-1}\big(2B(j+1)\big)^{-\delta}\Bigg)\,\|\Phi_\zeta\|_B^2$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{P}_\downarrow^{(j_1)}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B^2 \leqslant 4\,\|\widehat{P}^{(1)}\Phi_\zeta\|_B^2 + 12\,\big(|\zeta|^{-1}C^{(2)}\big)^2\Bigg(\sum_{j=1}^{j_1-1}\big(2B(j+1)\big)^{-\delta}\Bigg)\,\|\Phi_\zeta\|_B^2 \leqslant$$

$$\leqslant 12\,\big(|\zeta|^{-1}C^{(2)}\big)^2\Bigg(\sum_{j=0}^{j_1-1}\big(2B(j+1)\big)^{-\delta}\Bigg)\,\|\Phi_\zeta\|_B^2\,.$$

Так как
$$\sum_{j=o}^{j_1-1}(j+1)^{-\delta} \,<\, \int_0^{j_1}\xi^{-\delta}\,d\xi \,=\, (1-\delta)^{-1}j_1^{1-\delta}$$
и $j_1 \leqslant \frac{1}{2}\,j_0 \leqslant \frac{1}{4B}\,|\zeta|^2$, то
$$\|\widehat{P}_{\downarrow}^{(j_1)}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, \sqrt{3}\,2^{\,(\delta+1)/2}\,(1-\delta)^{-1/2}\,(2B)^{-1/2}\,C^{(2)}|\zeta|^{-\delta}\|\Phi_\zeta\|_B. \tag{4.13}$$
С другой стороны, $j_1+2>\frac{1}{2}\,(j_0+1)>\frac{1}{4B}\,|\zeta|^2$, поэтому с помощью теоремы 4.2 получаем
$$\begin{aligned}\|(\widehat{I}-\widehat{P}_{\downarrow}^{(j_1)})\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,&\leqslant\, \bigl(2B(j_1+2)\bigr)^{-1/2}\,\|\widehat{J}(\widehat{I}-\widehat{P}_{\downarrow}^{(j_1)})\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B^2 \,\leqslant\\ &\leqslant\, \sqrt{2}\,|\zeta|^{-1}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, \sqrt{2}\,C^{(1)}|\zeta|^{-1}\,\|\Phi_\zeta\|_B\end{aligned} \tag{4.14}$$
(где $\widehat{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}_B$). Из (4.13) и (4.14) следует оценка (4.9), при этом $C^{(3)}=\sqrt{3}\,2^{\,(\delta+1)/2}\,(1-\delta)^{-1/2}\,(2B)^{-1/2}\,C^{(2)}+\sqrt{2}\,(8B)^{\,\delta-1}\,C^{(1)}$. Теорема 4.3 доказана. □

Л е м м а 4.1. *Для всех* $\zeta\in\mathbb{C}$
$$\|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, \|\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B^{\delta}\,\|\widehat{J}\,\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B^{1-\delta}\,.$$

Лемма 4.1 вытекает из неравенства Гёльдера. Следующая теорема является непосредственным следствием теорем 4.2, 4.3 и леммы 4.1.

Т е о р е м а 4.4. *Для всех* $\zeta\in\mathbb{C}$*, для которых* $|\zeta|\geqslant\sqrt{8B}$*, выполняется оценка*
$$\|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, C^{(4)}\,|\zeta|^{-\theta}\,\|\Phi_\zeta\|_B,$$
где $C^{(4)}=(C^{(3)})^{\delta}\,(C^{(1)})^{1-\delta}$ (*и* $\theta=\delta^2$).

Пусть $C^{(5)}>0$ — (наименьшее) число, для которого $C^{(5)}\geqslant\sqrt{8B}$ и $C^{(4)}(C^{(5)})^{-\theta}\leqslant \frac{1}{2}\,(4B)^{1-\delta}$. Если $|\zeta|\geqslant C^{(5)}$, то из теоремы 4.4 следует, что
$$\|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, C^{(4)}\,|\zeta|^{-\theta}\,\bigl(\|\Psi_\zeta\|_B+\|\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B\bigr) \,\leqslant$$
$$\leqslant\, C^{(4)}\,|\zeta|^{-\theta}\,\|\Psi_\zeta\|_B \,+\, \frac{1}{2}\,(4B)^{1-\delta}\,\|\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, C^{(4)}\,|\zeta|^{-\theta}\,\|\Psi_\zeta\|_B \,+\, \frac{1}{2}\,\|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B.$$
Поэтому справедливо следствие 4.2.

С л е д с т в и е 4.2. *Для всех* $\zeta\in\mathbb{C}$*, для которых* $|\zeta|\geqslant C^{(5)}$*, выполняется оценка*
$$\|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \,\leqslant\, 2\,C^{(4)}\,|\zeta|^{-\theta}\,\|\Psi_\zeta\|_B.$$

В дальнейшем для векторов $\widetilde{Y}\in 2\pi\Lambda^*$ выбираются числа $\zeta=-\widetilde{Y}_1+i\widetilde{Y}_2$ и предполагается. что $|\zeta|=|\widetilde{Y}|\geqslant C^{(5)}$ (где $\widetilde{Y}_s=(\widetilde{Y},e_s)$, $s=1,\,2$). В силу следствия 4.2 $\Psi_\zeta\neq 0$ и (поэтому) можно считать, что $\|\Psi_\zeta\|_B=1$.

Если $\Phi=e^{\,i(\widetilde{Y},x)}\Psi$, где $\Psi\in\mathcal{H}_B^{(0)}$, то $(\widehat{Z}_-+\overline{\zeta})\,\Phi=0$. Тогда из теоремы 4.1 следует, что
$$(e^{\,i(\widetilde{Y},x)}\Psi_\zeta,W\Phi_\zeta)_B=0$$
и, следовательно,
$$(e^{\,i(\widetilde{Y},x)}\Psi_\zeta,W\Psi_\zeta)_B \,+\, (\Psi_\zeta,e^{-i(\widetilde{Y},x)}W\widetilde{\Phi}_\zeta)_B=0. \tag{4.15}$$

Так как любую функцию $\widetilde{W} \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ можно сколь угодно точно приблизить в пространстве $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ тригонометрическими многочленами и для коэффициентов Фурье $\widetilde{W}_Y$ функций $\widetilde{W}$ выполняется оценка

$$|\widetilde{W}_Y| \leqslant \big(v(K)\big)^{-1/p} \|\widetilde{W}\|_{L^p(K)}, \quad Y \in 2\pi\Lambda^*,$$

то в силу следствия 3.1 получаем

$$\begin{gathered} |(e^{i(\widetilde{Y},x)}\Psi_\zeta, W\Psi_\zeta)_B| = \Big| \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} W_Y(\Psi_\zeta, e^{i(Y-\widetilde{Y},x)}\Psi_\zeta)_B \Big| \geqslant \\ \geqslant |V_{\widetilde{Y}}| - \sum_{Y'\,\in\,2\pi\Lambda^*\setminus\{0\}} |W_{\widetilde{Y}+Y'}| \cdot |(\Psi_\zeta, e^{i(Y',x)}\Psi_\zeta)_B| \geqslant \\ \geqslant \mathcal{L}(\Lambda, B; V, \widetilde{Y}) - (B+L)e^{-|\widetilde{Y}|^2/4B}. \end{gathered} \tag{4.16}$$

С другой стороны, из следствия 3.2 и следствия 4.2 вытекают оценки

$$|(\Psi_\zeta, e^{-i(\widetilde{Y},x)}W\widetilde{\Phi}_\zeta)_B| \leqslant Q^{1/p}\, C'_{p,\delta}\sqrt{2B}\, \|W\|_{L^p(K)}\, \|\widehat{J}^{1-\delta}\widetilde{\Phi}_\zeta\|_B \leqslant \frac{1}{2}\, C'(R,L)\, |\zeta|^{-\theta}, \tag{4.17}$$

где $C'(R,L) \doteq 4\,Q^{1/p}\, C'_{p,\delta}\, C^{(4)}\sqrt{2B}\,(R+L+B)$. Выберем теперь (наименьшее) число $\widetilde{C}(R,L) > 0$ такое, что $\widetilde{C}(R,L) \geqslant C^{(5)}$ и для всех $a \geqslant \widetilde{C}(R,L)$

$$(B+L)\, e^{-a^2/4B} \leqslant \frac{1}{2}\, C'(R,L) a^{-\theta}.$$

Тогда из (4.15), (4.16) и (4.17) следует, что для всех векторов $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, для которых $|\widetilde{Y}| \geqslant \widetilde{C}(R,L)$, выполняется оценка (1.1). Теорема 1.1 доказана.

Финансирование. Работа поддержана программой финансирования AAAA-A17-117022250041-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гейлер В.А. Двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1–48. http://mi.mathnet.ru/aa252
2. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.1996, № 3855-В96.
3. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307. http://mi.mathnet.ru/znsl711
4. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
5. Гейлер В.А., Маргулис В.А., Чучаев И.И. О структуре спектра трехмерных периодических операторов Ландау // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 3. С. 104–124. http://mi.mathnet.ru/aa721
6. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential // Mathematische Annalen. 2010. Vol. 347. No. 3. P. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
7. Данилов Л.И. О спектре двумерного оператора Шрёдингера с однородным магнитным полем и периодическим электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 51. С. 3–41. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01

8. Данилов Л.И. О спектре гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 1. С. 47–65. https://doi.org/10.1134/S0040577920010055
9. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 41–36. http://mi.mathnet.ru/aa1018
10. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459. https://doi.org/10.1023/A:1022605623235
11. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. общества. 2001. Т. 9. С. 199–233.
12. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320. http://mi.mathnet.ru/znsl912
13. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шредингера // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84. http://mi.mathnet.ru/iimi235
14. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40. http://mi.mathnet.ru/aa1046
15. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. No. 2. P. 537–569. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02878-1
16. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bull. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 53. No. 3. P. 343–414. https://doi.org/10.1090/bull/1528
17. Данилов Л.И. О спектре релятивистского гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 3–26. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-01
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
19. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
20. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
21. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Communications in Mathematical Physics. 1973. Vol. 33. P. 335–343. https://doi.org/10.1007/BF01646745
22. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию 01.05.2020

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: lidanilov@mail.ru

Цитирование: Л. И. Данилов. О спектре гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$ // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 42–59.

L. I. Danilov

On the spectrum of a Landau Hamiltonian with a periodic electric potential $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$

Keywords: two-dimensional Schrödinger operator, periodic electric potential, homogeneous magnetic field, spectrum.

MSC2010: 35P05

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-04

We consider the two-dimensional Shrödinger operator $\widehat{H}_B + V$ with a homogeneous magnetic field $B \in \mathbb{R}$ and with an electric potential V which belongs to the space $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ of Λ -periodic real-valued functions from the space $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$. The magnetic field B is supposed to have the rational flux $\eta = (2\pi)^{-1} B v(K) \in \mathbb{Q}$ where $v(K)$ denotes the area of the elementary cell K of the period lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Given $p > 1$ and the period lattice Λ, we prove that in the Banach space $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$ there exists a typical set $\mathcal{O}$ in the sense of Baire (which contains a dense G_δ -set) such that the spectrum of the operator $\widehat{H}_B + V$ is absolutely continuous for any electric potential $V \in \mathcal{O}$ and for any homogeneous magnetic field B with the rational flux $\eta \in \mathbb{Q}$.

Funding. The research is supported by the financial program AAAA-A17-117022250041-7.

REFERENCES

1. Geiler V.A. The two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and its perturbations by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Math. J.*, 1992, vol. 3, no. 3, pp. 489–532.
2. Danilov L.I. *The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. VI*, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1996, 45 p. Deposited in VINITI 31.12.1996, no. 3855-B96 (in Russian).
3. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in spectra of analytic direct integrals, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2006, vol. 136, no. 2, pp. 3826–3831. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0203-x
4. Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger operators: With applications to quantum mechanics and global geometry*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. Translated under the title *Operatory Shredingera s prilozheniyami k kvantovoi mekhanike i global'noi geometrii*, Moscow: Mir, 1990.
5. Geiler V.A., Margulos V.A., Chuchaev I.I. On the structure of the spectrum of three-dimensional periodic Landau operators, *St. Petersburg Math. J.*, 1997, vol. 8, no. 3, pp. 447–461.
6. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential, *Mathematische Annalen*, 2010, vol. 347, no. 3, pp. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
7. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and a periodic electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 51, pp. 3–41 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01
8. Danilov L.I. Spectrum of the Landau Hamiltonian with a periodic electric potential, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2020, vol. 202, no. 1, pp. 41–57. https://doi.org/10.1134/S0040577920010055
9. Birman M.Sh., Suslina T.A. Absolute continuity of a two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector potential, *St. Petersburg Math. J.*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601.
10. Danilov L.I. The spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403. https://doi.org/10.1023/A:1022605623235

11. Shterenberg R. G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 2003, vol. 209, pp. 191–221. https://doi.org/10.1090/trans2/209/09
12. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger operators with strongly subordinate magnetic potential, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2005, vol. 129, no. 4, pp. 4087–4109. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0344-3
13. Danilov L.I. On absence of eigenvalues in the spectra of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2004, no. 1 (29), pp. 49–84 (in Russian).
14. Birman M.Sh., Suslina T.A. A periodic magnetic Hamiltonian with a variable metric: The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232.
15. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02878-1
16. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 343–414. https://doi.org/10.1090/bull/1528
17. Danilov L.I. On the spectrum of a relativistic Landau Hamiltonian with a periodic electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 3–26 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-01
18. Reed M, Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. I. Functional analysis*, New York: Academic Press, 1972. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom. I. Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Mir, 1977.
19. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*, Berlin: Springer-Verlag, 1976. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9
20. Reed M, Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. IV. Analysis of operators*, New York – London: Academic Press, 1978. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom. IV. Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982, 428 p.
21. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Communications in Mathematical Physics*, 1973, vol. 33, pp. 335–343. https://doi.org/10.1007/BF01646745
22. Reed M, Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. II. Fourier analysis, self-adjointness*, New York: Academic Press, 1975, 361 p. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom. II. Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978, 400 p.

Received 01.05.2020

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru

Citation: L. I. Danilov. On the spectrum of a Landau Hamiltonian with a periodic electric potential $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 42–59.