Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2020. Том 56. С. 41–49

УДК 517.929

© *Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина*

ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Исследуются модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные системой с импульсными воздействиями, зависящей от случайных параметров. Рассматривается структурированная популяция, состоящая из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделенная на n возрастных групп. В частности, можно исследовать популяцию n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции задается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени kd, $d > 0$ извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Процесс сбора можно контролировать таким образом, чтобы не добывать больше, чем необходимо, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими; это нужно для того, чтобы определенная часть ресурса сохранилась с целью увеличения размера следующего сбора. Для данной структурированной популяции в случае $n > 1$ получены оценки средней временной выгоды от добычи ресурса, выполненные с вероятностью единица. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления.

Ключевые слова: структурированная популяция, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-04

Введение

Вопросам оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях посвящено множество работ, первые из которых относятся к семидесятым годам прошлого века (см. [1–3]). Данную тематику продолжают исследования оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными стохастическими моделями, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции [4–7]. Отметим, что более подробный обзор литературы приведен в [8, 9].

Данное исследование является продолжением работ [10, 11], в которых описываются вопросы оптимального сбора ресурса из стохастической популяции, заданной дифференциальным уравнением с импульсными воздействиями (случай $n = 1$). Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (случай $n > 1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\},$$

а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность контролировать процесс сбора так, чтобы не добывать больше, чем необходимо, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем значения $(u_1(k),\ldots,u_n(k)) = u(k) \in [0,1]^n$ в момент kd). В этом случае определенная часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k),\ldots,\ell_n(k)) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \begin{cases} \omega_i(k), & \text{если } \omega_i(k) < u_i(k), \\ u_i(k), & \text{если } \omega_i(k) \geqslant u_i(k) \end{cases}$$

для любого $i = 1,\ldots,n$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) = \big(1 - \ell_i(k)\big)\cdot x_i(kd-0), \end{gathered} \tag{0.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ определены и непрерывны для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \Sigma \doteq \{\sigma\colon \sigma \doteq (\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\}, \quad \omega(k) \in \Omega; \\ U \doteq \{\bar{u}\colon \bar{u} = (u(1),\ldots,u(k),\ldots)\}, \quad u(k) \in [0,1]^n. \end{gathered}$$

Пусть $X_i(k) = x_i(kd-0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k \in \mathbb{N}$, зависящее от долей ресурса $\ell(1),\ldots,\ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i > 0$ — стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(k)\ell_i(k).$$

Для любого $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j)\ell_i(j)\,, \tag{0.2}$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big)$ и, если выполнено равенство $H_*\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big) = H^*\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big)$, то определим предел

$$H\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j)\ell_i(j)\,.$$

В данной работе получены оценки оценки функции (0.2), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции в случае $n > 1$. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления.

§ 1. Оценка средней временной выгоды в случае $n = 1$

Сформулируем результаты, полученные в [10] для оценки функции $H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$ в случае $n = 1$. Здесь полагаем $C_1 = 1$, тогда

$$H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X(j)\ell(j),$$

где $X(j)$ — количество ресурса до сбора в момент jd, $j = 1, 2, \ldots$.

Приведем описание *вероятностной модели*, заданной управляемой системой (0.1). Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0,1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma\colon \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}$, где $\omega(k) \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \big\{\sigma \in \Sigma\colon \omega(1) \in A(1), \ldots, \omega(k) \in A(k)\big\}, \quad \text{где} \quad A(j) \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k) = \widetilde{\mu}(A(1)) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A(k))$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Пусть $\varphi(t, x)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, u) = \begin{cases} \omega, & \text{если} \ \ \omega < u, \\ u, & \text{если} \ \ \omega \geqslant u, \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве Ω. Здесь и далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1.1. *Пусть $\mu(0) < 1$. Предположим, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$, областью притяжения которого является интервал (K_1, K_2), где $0 \leqslant K_1 < K < K_2 \leqslant +\infty$. Тогда для любых $x \in (K_1, K)$ и $x(0) \in (K_1, K_2)$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что неравенства*

$$\varphi(d, x) M\ell \leqslant H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \leqslant K M\ell$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

§ 2. Построение управления и оценка средней временной выгоды в многомерном случае

Вернемся к популяции, заданной управляемой системой (0.1). Вероятностное пространство в случае $n > 1$ определяем аналогично одномерному случаю, учитывая, что

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\varphi(t, x) = \big(\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_n(t, x)\big)$ решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n_+$. Положим

$$u(x, \varphi(d, x)) = \big(u_1(x, \varphi(d, x)), \ldots, u_n(x, \varphi(d, x))\big) = \Big(1 - \frac{x_1}{\varphi_1(d, x)}, \ldots, 1 - \frac{x_n}{\varphi_n(d, x)}\Big). \quad (2.1)$$

Рассмотрим функции

$$\ell_i(k) = \begin{cases} \omega_i(k), & \text{если } \ \omega_i(k) < u_i(x, \varphi(d,x))\,, \\ u_i(x,\varphi(d,x)), & \text{если } \ \omega_i(k) \geqslant u_i(x, \varphi(d,x))\,, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $\widetilde{\mathbb{R}}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$.

В отличие от одномерного случая, для оценки средней временной выгоды нужны дополнительные условия на решения системы $\dot{x} = f(x)$; эти условия приведены в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что для некоторого $x \in \widetilde{\mathbb{R}}^n_+$ решение $\varphi(t,x)$ системы $\dot{x} = f(x)$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\varphi_i(d,x) \geqslant x_i$, $i = 1, \ldots, n$;

(2) *если* $x_i(0) \geqslant x_i$, *то* $\varphi_i(d, x(0)) \geqslant \varphi_i(d,x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Тогда существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(d,x) M\ell_i. \tag{2.2}$$

Здесь $M\ell_i = M\ell_i(k)$ — математическое ожидание случайных величин $\ell_i(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $X_i(k)$ и $x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида до сбора и после сбора в момент kd; тогда $x_i(k) = (1 - \ell_i(k))X_i(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ управления $u(k) = u(x, \varphi(d,x))$, при которых выполнено (2.2), можно определить равенствами (2.1) для всех $x(0)$, таких, что $x_i(0) \geqslant x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Из условий теоремы следует, что если $x_i(0) \geqslant x_i$, то $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geqslant \varphi_i(d,x) \geqslant x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Согласно (2.1), $u_i(k) = 1 - \dfrac{x_i}{\varphi_i(d,x)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда из неравенств $\ell_i(k) \leqslant u_i(x, \varphi(d,x))$ следует, что

$$x_i(1) = (1 - \ell_i(1))X_i(1) \geqslant (1 - u_i(x, \varphi(d,x)))X_i(1) = \frac{x_i X_i(1)}{\varphi_i(d,x)} \geqslant x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Далее, из второго условия теоремы, $X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geqslant \varphi_i(d,x)$. Аналогично получаем, что $X_i(k) \geqslant \varphi_i(d,x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) \ell_i(j) \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(d,x) \ell_i(j). \tag{2.3}$$

Случайные величины $\ell_i(1), \ell_i(2), \ldots$ независимы, имеют одинаковое распределение, и, так как $0 \leqslant \ell_i(k) \leqslant 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $M\big|\ell_i(k)\big| \leqslant 1 < \infty$. Поэтому из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ и каждого $i = 1, \ldots, n$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ell_i(j) = M\ell_i.$$

Таким образом, нижний предел в правой части (2.3) равен пределу

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(d,x) \ell_i(j) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(d,x) M\ell_i. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.2) теперь следует из (2.3) и (2.4). $\square$

В следующем утверждении показано, как проверить выполнение второго условия теоремы 2.1.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Пусть решения* $\varphi(t,x(0))$, $\varphi(t,y(0))$ *системы* $\dot{x}=f(x)$ *существуют при* $t\in[0,d]$ *и содержатся в некотором компактном множестве* $D\subset\mathbb{R}^n$. *Пусть для всех* $x\in D$, $y\in D$, *таких, что* $x_i\leqslant y_i$, *выполнены неравенства* $f_i(x)\leqslant f_i(y)$, $i=1,\ldots,n$. *Если, кроме того,* $x_i(0)\leqslant y_i(0)$ *для любых* $i=1,\ldots,n$, *то*

$$\varphi_i(t,x(0))\leqslant\varphi_i(t,y(0))\quad \textit{для всех}\quad i=1,\ldots,n,\ t\in[0,d].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перейдем от системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x)$ к интегральным уравнениям

$$\varphi_i(t,x(0))=x_i(0)+\int_0^t f_i\big(\varphi(s,x(0))\big)ds,\quad i=1,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $x_i(0)<y_i(0)$ для всех $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$\Delta\doteq\min\Big(\frac{y_1(0)-x_1(0)}{2},\ldots,\frac{y_n(0)-x_n(0)}{2}\Big)>0.$$

Покажем, что найдется $\delta>0$ такое, что для любой начальной точки $x(0)\in D$ и всех $t\in[0,\delta]$ выполнено неравенство

$$\|\varphi(t,x(0))-x(0)\|\leqslant\Delta.$$

Действительно, непрерывные функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ ограничены на множестве D; пусть $|f_i(x)|\leqslant B$ для всех $i=1,\ldots,n$, $x\in D$ и некоторого $B>0$. Далее,

$$\big|\varphi_i(t,x(0))-x_i(0)\big|=\Big|\int_0^t f_i\big(\varphi(s,x(0))\big)ds\Big|\leqslant\int_0^t\big|f_i\big(\varphi(s,x(0))\big)\big|ds\leqslant B\delta$$

для всех $i=1,\ldots,n$, $t\in[0,\delta]$. Отсюда получаем, что

$$\big\|\varphi(t,x(0))-x(0)\big\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\big(\varphi_i(t,x(0))-x_i(0)\big)^2}\leqslant B\delta\sqrt{n}=\Delta \tag{2.6}$$

при всех $t\in[0,\delta]$; поэтому $\delta=\dfrac{\Delta}{B\sqrt{n}}$. Обозначим через $O_\Delta(x(0))$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиусом Δ с центром в $x(0)$. Неравенство (2.6) означает, что $\varphi(t,x(0))\in O_\Delta(x(0))$ при $t\in[0,\delta]$. Аналогично получаем, что $\varphi(t,y(0))\in O_\Delta(y(0))$ при $t\in[0,\delta]$.

Далее, в силу выбора Δ, для любого фиксированного $t\in[0,\delta]$ для пары точек $\varphi(t,x(0))\in O_\Delta(x(0))$ и $\varphi(t,y(0))\in O_\Delta(y(0))$ имеют место неравенства

$$\varphi_i(t,x(0))\leqslant x_i(0)+\Delta\leqslant y_i(0)-\Delta\leqslant\varphi_i(t,y(0)),\quad i=1,\ldots,n;$$

поэтому из условия утверждения при любом $t\in[0,\delta]$ для этих точек выполнено

$$f_i(\varphi(t,x(0)))\leqslant f_i(\varphi(t,y(0))),\quad i=1,\ldots,n.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\int_0^t f_i\big(\varphi(s,x(0))\big)ds\leqslant\int_0^t f_i\big(\varphi(s,y(0))\big)ds,\quad i=1,\ldots,n,\quad t\in[0,\delta].$$

Поэтому, так как $x_i(0)<y_i(0)$, то для любого $t\in[0,\delta]$ имеем

$$\varphi_i(t,y(0))-\varphi_i(t,x(0))=y_i(0)-x_i(0)+\int_0^t f_i\big(\varphi(s,y(0))\big)ds-\int_0^t f_i\big(\varphi(s,x(0))\big)ds>y_i(0)-x_i(0).$$

Повторяя подобные рассуждения для промежутков $(\delta, 2\delta]$, $(2\delta, 3\delta], \ldots$, получаем, что

$$\varphi_i(t, y(0)) - \varphi_i(t, x(0)) > y_i(0) - x_i(0) > 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n, \ \ t \in [0, d].$$

Пусть теперь $x_i(0) = y_i(0)$ при $i \in I$, где I — некоторое непустое подмножество $\{1, \ldots, n\}$ и $x_i(0) < y_i(0)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Введем последовательность $\{x^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ таким образом, что $x_i^k(0)$ монотонно возрастает и стремится к $x_i(0)$ при $i \in I$, а $x_i^k(0) = x_i(0)$ при $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Тогда для каждого $k = 1, 2, \ldots$ выполнено $x_i^k(0) < y_i(0)$ и из доказанного выше следует

$$\varphi_i(t, x^k(0)) < \varphi_i(t, y(0)) \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n, \ \ t \in [0, d]. \tag{2.7}$$

Переходя к пределу в (2.7) и учитывая непрерывность решений по начальному условию, получаем

$$\varphi_i(t, x(0)) = \lim_{k \to \infty} \varphi_i(t, x^k(0)) \leqslant \varphi_i(t, y(0)), \quad i = 1, \ldots, n, \ \ t \in [0, d].$$

Утверждение доказано. □

Далее показано, как проверить выполнение первого условия теоремы 2.1. Доказательство следует сразу из равенства (2.5).

Утверждение 2.2. *Предположим, что решение $\varphi(t, x(0))$ системы $\dot{x} = f(x)$ существует при $t \in [0, d]$ и содержится в некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для всех $x \in D$ выполнены неравенства $f_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\varphi_i(t, x(0)) \geqslant x_i(0)$ для всех $t \in [0, d]$, $i = 1, \ldots, n$.*

Все исследования этой и предыдущих работ стали возможны благодаря той огромной поддержке, которую оказывал нам наш дорогой учитель Евгений Леонидович Тонков.

Финансирование. Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20–01–00293.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource // Mathematical Biosciences. 1974. Vol. 22. P. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
2. Gleit A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41. Issues 1–2. P. 111–123. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90069-X
3. Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. Issue 4. P. 350–363. https://doi.org/10.1016/0095-0696(79)90014-7
4. Ryan D., Hanson F. B. Optimal harvesting of a logistic population in an environment with stochastic jumps // Journal of Mathematical Biology. 1986. Vol. 24. Issue 3. P. 259–277. https://doi.org/10.1007/BF00275637
5. Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of Environmental Economics and Management. 2002. Vol. 43. Issue 2. P. 325–338. https://doi.org/10.1006/jeem.2000.1181
6. Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Environmental and Resource Economics. 2013. Vol. 54. Issue 2. P. 293–310. https://doi.org/10.1007/s10640-012-9606-y
7. Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty // Resource and Energy Economics. 2017. Vol. 50. P. 164–177. https://doi.org/10.1016/j.reseneeco.2017.08.001

8. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 81. P. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
9. Абрамова Е. П., Перевалова Т. В. Влияние случайного воздействия на равновесные режимы популяционной динамики // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 3–18. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-01
10. Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. https://doi.org/10.20537/vm180105
11. Родина Л. И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 213–221. https://doi.org/10.20537/vm180207

Поступила в редакцию 20.10.2020

Мастерков Юрий Викторович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.
E-mail: jura.masterkov@yandex.ru

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87; профессор, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, 4.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Цитирование: Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 41–49.

Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina

Estimation of average time profit for stochastic structured population

Keywords: structured population, average time profit, optimal exploitation.

MSC2010: 39A23, 39A99, 49N90, 93C55

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-04

We investigate models of dynamics of the exploited population, given by the system with impulse influences, depending on random parametres. The considered population is structured, that is either consists of separate kinds $x_1, \ldots, x_n$, or is divided on n age groups. In particular, it is possible to investigate the population of n various kinds of fishes between which there are competition relations for food or dwelling places. We assume, that in the absence of harvesting the population development is described by system of differential equations $\dot{x} = f(x)$, and in time moments kd, $d > 0$ are taken some random share of a resource $\omega(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, that leads to sharp (impulse) reduction of its quantity. It is possible to control gathering process so that not to extract more than it is necessary, if shares of an extracted resource for one or several kinds appear big enough; it is necessary that the certain part of a resource has remained for the purpose of increase in the size of following gathering. We received the estimation of average time profit from the resource extraction, executed with probability one, for the structured population in a case $n > 1$. We described the way of extraction of a resource for a gathering mode in long-term prospect at which some part of population necessary for its further restoration constantly remains.

Funding. The study of the second author was funded by RFBR, project number 20–01–00293.

REFERENCES

1. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource, *Mathematical Biosciences*, 1974, vol. 22, pp. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
2. Gleit A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth, *Mathematical Biosciences*, 1978, vol. 41, issues 1–2, pp. 111–123. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90069-X
3. Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, issue 4, pp. 350–363. https://doi.org/10.1016/0095-0696(79)90014-7
4. Ryan D., Hanson F. B. Optimal harvesting of a logistic population in an environment with stochastic jumps, *Journal of Mathematical Biology*, 1986, vol. 24, issue 3, pp. 259–277. https://doi.org/10.1007/BF00275637
5. Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2002, vol. 43, issue 2, pp. 325–338. https://doi.org/10.1006/jeem.2000.1181
6. Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties?, *Environmental and Resource Economics*, 2013, vol. 54, issue 2, pp. 293–310. https://doi.org/10.1007/s10640-012-9606-y
7. Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty, *Resource and Energy Economics*, 2017, vol. 50, pp. 164–177. https://doi.org/10.1016/j.reseneeco.2017.08.001
8. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information, *Marine Policy*, 2017, vol. 81, pp. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
9. Abramova E. P., Perevalova T. V. Influence of random effects on the equilibrium modes in the population dynamics model, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 3–18 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-01

10. Rodina L. I. Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180105
11. Rodina L. I. Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resourse, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 213–221 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180207

Received 20.10.2020

Masterkov Yurii Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.
E-mail: jura.masterkov@yandex.ru

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia;
Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology MISIS, Leninskii pr., 4, Moscow, 119049, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Citation: Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina. Estimation of average time profit for stochastic structured population, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 41–49.