Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 56. С. 50–62

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров, А. И. Мачтакова*

ПОИМКА ДВУХ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v,$$

где $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$ функции f, a — вещественное число. Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого конуса с вершиной в нуле. Целью преследователей является поимка двух убегающих. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начало координат. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, дробные производные, фазовые ограничения.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-05

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–7]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна. Задача уклонения хотя бы одного убегающего от группы преследователей из любых начальных позиций рассматривалась в работах [8–10]. Достаточные условия уклонения хотя бы одного убегающего из счетного числа убегающих от счетного числа преследователей в задаче простого преследования с интегральными ограничениями на управления представлены в [11]. В работах [12–16] получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление. Задача о поимке заданного числа убегающих при условии, что участники обладают равными возможностями, убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [17–19]. Задача об оптимальной по времени поимке группы убегающих группой преследователей на плоскости в случае простого движения рассмотрена в [20]. Мультиагентный подход к исследованию задачи преследования группой преследователей группы убегающих рассмотрен в [21]. В работах [22, 23] кроме преследователей и убегающих вводится еще один класс участников – защитники убегающих. Достаточные условия поимки двух убегающих в линейных дифференциальных играх получены в [24]. В работах [25, 26] получены достаточные условия поимки двух жестко скоординированых убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх и в линейной задаче группового преследования с простой матрицей.

В данной работе получены достаточные условия поимки двух жестко скоординированных убегающих в дифференциальной игре с дробными производными и фазовыми ограничениями.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1.1. Пусть $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, число $\alpha \in (0,1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\,ds,\quad \text{где } \Gamma(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k\geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n)$ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и 2 убегающих E_1,E_2.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i=ax_i+u_i,\quad x_i(0)=x_i^0,\quad u_i\in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)}y_j=ay_j+v,\quad y_j(0)=y_j^0,\quad v\in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i,y_j,u_i,v\in\mathbb{R}^k$, $V=\{v \mid \|v\|\leqslant 1\}$, $a\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1)$. Кроме того, $x_i^0\neq y_j^0$ для всех i,j.

Дополнительно предполагается, что каждый убегающий E_j не покидает пределы выпуклого конуса с непустой внутренностью

$$\Omega=\{y\in\mathbb{R}^k\colon (p_s,y)\leqslant 0,\ s=1,\ldots,r\},$$

где $p_1,\ldots,p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$. Если $\Omega=\mathbb{R}^k$, то считаем, что $r=0$.

Введем новые переменные $z_{ij}=x_i-y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$D^{(\alpha)}z_{ij}=az_{ij}+u_i-v,\quad z_{ij}(0)=z_{ij}^0=x_i^0-y_j^0. \tag{1.3}$$

Измеримая функция $v\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t)\in V$, $y_j(t)\in\Omega$ для всех $t\geqslant 0$, $j=1,2$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1,E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1.2. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t,z^0,v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0=(z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t)=\mathcal{U}_i(t,z^0,v_t(\cdot))$ со значениями в V.

Определение 1.3. В игре $G(n)$ происходит *поимка*, если существует момент $T_0=T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$ преследователей $P_1,\ldots,P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t)\in V$, $t\in[0,T_0]$, найдутся номера $p,q\in\{1,\ldots,n\}$ и моменты $\tau_1,\tau_2\in[0,T_0]$ такие, что $z_{p1}(\tau_1)=0, z_{q2}(\tau_2)=0$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Обозначим через $\operatorname{Int} X$ и $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad E_\rho(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l\rho^{-1} + \mu)} -$$

обобщенная функция Миттаг–Леффлера,

$$g(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\big(a(t - \tau)^\alpha, \alpha\big), \quad f(t) = \int_0^t g(t, \tau)\, d\tau = t^\alpha \cdot E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1),$$
$$I = \{1, \ldots, n\}, \quad c = y_1^0 - y_2^0.$$

О п р е д е л е н и е 2.1 (см. [27]). Векторы a_1, a_2, ..., a_s образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа α_1, α_2, ..., α_s такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть векторы $b_1, \ldots, b_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Тогда для любых положительных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ векторы $\gamma_1 b_1, \ldots, \gamma_m b_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$.*

Л е м м а 2.2 (см. [6, с. 36]). *Пусть $r = 1$. Векторы $b_1, \ldots, b_m, p_1$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда*

$$\delta = \min_{v \in V} \max\{\max_j \lambda(b_j, v), (p_1, v)\} > 0.$$

Л е м м а 2.3. *Пусть $r = 1$, векторы $b_1, \ldots, b_m, p_1$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$, $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда существует момент $T > 0$ такой, что для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $q \in I$, для которого*

$$E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - \int_0^T g(T, \tau) \lambda(b_q, v(\tau))\, d\tau \leqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.2

$$\delta = \min_{v \in V} \max\{\max_j \lambda(b_j, v), (p_1, v)\} > 0.$$

Пусть $v(\cdot)$ — допустимая функция. Определим функции $h_i(t, v(\cdot))$ и множества $T_1(t)$, $T_2(t)$:

$$h_i(t, v(\cdot)) = \int_0^t g(t, \tau) \lambda(b_i, v(\tau))\, d\tau,$$
$$T_1(t) = \{\tau \in [0, t] \colon (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\}, \quad T_2(t) = \{\tau \in [0, t] \colon (p_1, v(\tau)) < \delta\}.$$

Тогда для всех $\tau \in T_2(t)$ справедливо неравенство $\max_i \lambda(b_i, v(\tau)) \geqslant \delta$. Так как $v(\cdot)$ — допустимая функция, то $(p_1, y_1(t)) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Из [28] и системы (1.2) имеем

$$y_1(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) y_1^0 + \int_0^t g(t, \tau) v(\tau)\, d\tau.$$

Поэтому

$$\int_0^t g(t, \tau)(p_1, v(\tau))\, d\tau \leqslant \mu_1(t) = -E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)(p_1, y_1^0).$$

Следовательно,

$$\mu_1(t) \geqslant \delta \int_{T_1(t)} g(t,\tau)\, d\tau - \int_{T_2(t)} g(t,\tau)\, d\tau,\ \ f(t) = \int_{T_1(t)} g(t,\tau)\, d\tau + \int_{T_2(t)} g(t,\tau)\, d\tau.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\int_{T_2(t)} g(t,\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta f(t) - \mu_1(t)}{1+\delta}.$$

Аналогично, $(p_1, y_2(t)) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\int_{T_2(t)} g(t,\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta f(t) - \mu_2(t)}{1+\delta}, \quad \text{где } \mu_2(t) = -E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)(p_1, y_2^0).$$

Следовательно, для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int_{T_2(t)} g(t,\tau)\, d\tau \geqslant \frac{\delta f(t) - \mu_0(t)}{1+\delta}, \quad \text{где } \mu_0(t) = \max\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}.$$

Далее имеем

$$\max_i h_i(t, v(\cdot)) \geqslant \frac{1}{n}\int_0^t g(t,\tau) \sum_i \lambda(b_i, v(\tau))\, d\tau \geqslant \frac{1}{n}\int_0^t g(t,\tau) \max_i \lambda(b_i, v(\tau))\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\delta}{n}\int_{T_2(t)} g(t,\tau) d\tau \geqslant \frac{\delta(\delta f(t) - \mu_0(t))}{n(1+\delta)}.$$

Рассмотрим функцию

$$H_0(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta(\delta f(t) - \mu_0(t))}{n(1+\delta)}.$$

Так как $a < 0$, то при $t \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [29, с. 12]

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Поэтому $H_0(t) = -\dfrac{c}{t^\alpha} + \dfrac{\delta^2}{an(1+\delta)} + O\left(\dfrac{1}{t^{2\alpha}}\right)$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} H_0(t) < 0$.

Значит существует момент $T > 0$, для которого $H_0(T) < 0$. Пусть $q \in I$ — номер, для которого $\max\limits_i h_i(T, v(\cdot)) = h_q(T, v(\cdot))$. Тогда $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_q(T, v(\cdot)) \leqslant H_0(T) < 0$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.4. *Пусть $r = 1$, векторы $b_1, \ldots, b_m, p_1$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$, $a = 0$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда существует момент $T > 0$ такой, что для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $q \in I$, для которого*

$$1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \lambda(b_q, v(\tau))\, d\tau \leqslant 0.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.3.

Л е м м а 2.5 (см. [26]). *Пусть векторы $b_1, \ldots, b_m$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого набора векторов $(c_1, \ldots, c_m)$, $\|c_l - b_l\| < \varepsilon$, $l = 1, \ldots, m$, векторы $c_1, \ldots, c_m$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$.*

§ 3. Достаточные условия поимки

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $a \leqslant 0$, $\alpha \in (0,1)$, $r \geqslant 1$ *и существуют множества*

$$J_1, J_2 \subset I,\ I_1, I_2 \subset I \setminus (J_1 \cup J_2),\ I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

такие, что наборы векторов

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1, p_1, \ldots, p_r, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in J_2, p_1, \ldots, p_r, c\}, \quad \{z_{l1}^0, l \in J_1^0, z_{s2}^0, s \in J_2^0, p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, *причем*

$$|J_1| \geqslant k, \quad |J_2| \geqslant k, \quad |J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k,$$

где

$$J_1^0 = I_1 \cup \big(J_1 \setminus (J_1 \cap J_2)\big), \quad J_2^0 = I_2 \cup \big(J_2 \setminus (J_1 \cap J_2)\big).$$

Тогда в игре $G(n)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a < 0$. Возможны два варианта.

1. $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Так как $\{z_{i1}^0, i \in J_1, p_1, \ldots, p_r, -c\}$, $\{z_{i2}^0, i \in J_2, p_1, \ldots, p_r, c\}$ образуют положительный базис, то существуют положительные числа $\gamma_{i1}, i \in J_1$, $\gamma_{i2}, i \in J_2$, $\alpha_s^1, \alpha_s^2, s = 1, \ldots, r$, такие, что

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^1 p_s - c = 0, \quad \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^2 p_s + c = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^{r} (\alpha_s^1 + \alpha_s^2) p_s = 0, \tag{3.1}$$

Обозначим

$$p_0 = \sum_{s=1}^{r} (\alpha_s^1 + \alpha_s^2) p_s, \quad \Omega_0 = \{y \mid y \in \mathbb{R}^k, (p_0, y) \leqslant 0\}.$$

Считаем, что $p_0 \neq 0$. Случай $p_0 = 0$ рассматривается аналогично. Тогда $\Omega \subset \Omega_0$.

Покажем, что векторы $z_{i1}^0, i \in J_1$, $z_{i2}^0, i \in J_2, p_0$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$. Так как $|J_1| \geqslant k$, то в силу леммы 2.5 можно считать, что среди векторов $z_{i1}^0, i \in J_1$ имеется k линейно независимых. Считаем, что $z_{i1}^0, i \in J_{11}$, $J_{11} \subset J_1$, $|J_{11}| = k$ линейно независимы.

Пусть $x \in \mathbb{R}^k$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_{i1}, i \in J_{11}$ для которых $x = \sum\limits_{i \in J_{11}} \mu_{i1} z_{i1}^0$. Используя равенство (3.1), получаем, что для любого вещественного числа d справедливо равенство

$$x = \sum_{i \in J_{11}} \mu_{i1} z_{i1}^0 + d\Big(\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2} z_{i2}^0 + p_0\Big).$$

Выбирая $d > 0$ и достаточно большим, получаем, что

$$x = \sum_{i \in J_1} \gamma_{i1}^0 z_{i1}^0 + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2}^0 z_{i2}^0 + \gamma^0 p_0,$$

причем все коэффициенты $\gamma_{i1}^0, i \in J_1$, $\gamma_{i2}^0, i \in J_2$, γ^0 положительны. Это и означает, что соответствующий набор образует положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Задаем управления преследователей $P_i, i \in J_1 \cup J_2$ следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in J_1,$$
$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in J_2.$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Подставляя данные управления в систему (1.3), получаем

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 f_{i1}(t, v(\cdot)), \quad i \in J_1, \quad z_{i2}(t) = z_{i2}^0 f_{i2}(t, v(\cdot)), \quad i \in J_2,$$

где

$$f_{ij}(t, v(\cdot)) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t g(t,\tau)\lambda(z_{ij}^0, v(\tau))\, d\tau.$$

В силу леммы 2.3 существует момент T_0 такой, что хотя бы одна из функций $f_{i1}, i \in J_1$, $f_{i2}, i \in J_2$ обратится в нуль в момент T_0.

Если $f_{l1}(T_0) = f_{m2}(T_0) = 0$ при некоторых $l \in J_1$, $m \in J_2$, то получаем

$$x_l(T_0) = y_1(T_0), \quad x_m(T_0) = y_2(T_0).$$

Следовательно, в игре $G(n)$ происходит поимка. Пусть $f_{l1}(T_0) = 0$, $f_{s2}(T_0) \neq 0$ для всех $s \in J_2$. Тогда $x_l(T_0) = y_1(T_0)$. Кроме того,

$$z_{i2}^0 = \frac{z_{i2}(T_0)}{f_{i2}(T_0, v(\cdot))}, i \in J_2,$$
$$z_{l2}(T_0) = x_l(T_0) - y_2(T_0) = x_l(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) = c \cdot E_{1/\alpha}(aT_0^\alpha, 1).$$

Так как $E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) > 0$ для всех $t > 0$, то из условия теоремы и леммы 2.1 следует, что набор

$$\{z_{i2}(T_0), i \in J_2, z_{l2}(T_0), p_1, \ldots, p_r\}$$

образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. В силу [30] преследователи $\{P_i, i \in J_2, P_l\}$ осуществляют поимку убегающего E_2. Тем самым доказано, что в игре $G(n)$ происходит поимка.

2. $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Пусть $J = J_1 \cap J_2$. Тогда

$$J_1^0 = I_1 \cup (J_1 \setminus J), \quad J_2^0 = I_2 \cup (J_2 \setminus J).$$

Задаем управления преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in J_1^0,$$
$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in J_2^0,$$
$$u_i(t) = v(t), \quad i \in J, \quad t \in [0, T].$$

Момент T будет указан позже. Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Из системы (1.3) имеем

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 f_{i1}(t, v(\cdot)), \quad i \in J_1^0, \quad z_{i2}(t) = z_{i2}^0 f_{i2}(t, v(\cdot)), \quad i \in J_2^0,$$
$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1), \quad z_{i2}(t) = z_{i2}^0 E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1), \quad i \in J.$$

По условию теоремы векторы

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1^0, z_{i2}^0, i \in J_2^0, p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис. Поэтому существуют положительные числа $\gamma_{i1}, i \in J_1^0$, $\gamma_{i2}, i \in J_2^0$, $\alpha_s, s = 1, \ldots, r$, такие, что

$$\sum_{l \in J_1^0} \gamma_{l1} z_{l1}^0 + \sum_{l \in J_2^0} \gamma_{l1} z_{l2}^0 + \sum_{l=1}^{r} \alpha_s p_s = 0.$$

Обозначим

$$p_0 = \sum_{l=1}^{r} \alpha_s p_s, \quad \Omega_0 = \{y \mid (p_0, y) \leqslant 0\}.$$

Получаем, что набор $\{z_{i1}^0, i \in J_1^0, z_{i2}^0, i \in J_2^0, p_0\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Из леммы 2.3 следует, что существуют момент T и номер $l \in J_1^0 \cup J_2^0$ такие, что либо $l \in J_1^0$ и $f_{l1}(T, v(\cdot)) = 0$, либо $l \in J_2^0$ и $f_{l2}(T, v(\cdot)) = 0$.

Пусть $l \in J_1^0$. Тогда $x_l(T) = y_1(T)$ и

$$z_{i2}(T) = z_{i2}^0 f_{i2}(T, v(\cdot)), \quad i \in J_2^0,$$
$$z_{l2}(T) = cE_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1), \quad z_{i2}(T) = z_{i2}^0 E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1), \quad i \in J.$$

Так как $J_2 \subset J_2^0 \cup J$, то из условия теоремы и леммы 2.1 следует, что векторы

$$\{z_{i2}(T), i \in J_2^0 \cup J, z_{l2}(T), p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$. В силу [30] преследователи $\{P_i, i \in J_2^0 \cup J, P_l\}$ осуществляют поимку убегающего E_2. Следовательно, в игре $G(n)$ происходит поимка.

Случай $a = 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть $a \leqslant 0$, $\alpha \in (0, 1)$, Ω — многогранник и $n \geqslant k$. Тогда в игре $G(n)$ происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как Ω — многогранник, то векторы $p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис. Поэтому, если $n \geqslant k$, то выполнены все условия предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть $a \leqslant 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\Omega = \mathbb{R}^k$ и существуют множества*

$$J_1, J_2 \subset I, \quad I_1, I_2 \subset I \setminus (J_1 \cup J_2), \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

такие, что наборы векторов

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in J_2, c\}, \quad \{z_{l1}^0, l \in J_1^0, z_{s2}^0, s \in J_2^0\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, где

$$J_1^0 = I_1 \cup \big(J_1 \setminus (J_1 \cap J_2)\big), \quad J_2^0 = I_2 \cup \big(J_2 \setminus (J_1 \cap J_2)\big).$$

Тогда в игре $G(n)$ происходит поимка.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.

П р и м е р 3.1. Пусть $k = 2$, $n = 4$, $r = 1$ и

$$x_1^0 = (-1, 10), \quad x_2^0 = (2, 11), \quad x_3^0 = (-2, 12), \quad x_4^0 = (-3, 13),$$
$$y_1^0 = (1, 1), \quad y_2^0 = (0, 1), \quad p_1 = (0, -1).$$

В качестве множеств J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1 = \{1, 2\}, \quad J_2 = \{1, 3\}, \quad I_1 = \{4\}, \quad I_2 = \emptyset.$$

Тогда наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{12}^0, p_1, -c\}, \quad \{z_{21}^0, z_{32}^0, p_1, c\}, \quad \{z_{21}^0, z_{32}^0, z_{41}^0, p_1\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^2$. Следовательно, в игре $G(4)$ происходит поимка.

П р и м е р 3.2. Пусть $k = 3$, $n = 6$, $r = 0$ и

$$x_1^0 = (-3, 0, 0), \quad x_2^0 = (0, 3, 3), \quad x_3^0 = (2, 2, -3), \quad x_4^0 = (-2, -6, 6),$$
$$x_5^0 = (1, 2, 4), \quad x_6^0 = (1, 1, -2), \quad y_1^0 = (0, 1, 0), \quad y_2^0 = (0, 0, 2).$$

В качестве множеств J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1 = \{1, 2, 3\}, \quad J_2 = \{2, 3, 4\}, \quad I_1 = \{5\}, \quad I_2 = \{6\}.$$

Тогда получим, что выполнены все условия теоремы 3.2. Следовательно, в игре $G(6)$ происходит поимка.

З а м е ч а н и е 1. Проверку условий теорем 3.1, 3.2 можно осуществить, используя теорему, согласно которой векторы $b_1, \ldots, b_m$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда

$$\delta_0 = \min_{\|v\|=1} \max_j (b_j, v) > 0. \tag{3.2}$$

Для проверки условия (3.2) численными методами были использованы вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект 0827–2020–0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем» и РФФИ (проект 20–01–00293).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф. Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Рихсиев Б. Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан, 1989.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
5. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009.
7. Kumkov S. S., Menec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 4. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
8. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374. http://mi.mathnet.ru/rus/de/v19/i8/p1366
9. Прокопович П. В., Чикрий А. А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
10. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. 2009. № 5. С. 3–12. http://mi.mathnet.ru/ivm1396
11. Alias I. A., Ibragimov G. I., Rakmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 3. P. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0
12. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.

13. Petrov N. N., Vagin D. A. A problem of group pursuit with phase constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66. Issue 2. P. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
14. Мачтакова А. И. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 45–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
15. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
16. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games // Journal of Computer and System Sciences International. 2012. Vol. 51. P. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
17. Петров Н. Н., Прокопенко В. А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726. http://mi.mathnet.ru/de6186
18. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
19. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 182. No. 1. P. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
20. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit–evasion problems // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 4. P. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
21. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H., Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders // Journal of Supercomputing. 2020. Vol. 76. P. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
22. Liang L., Deng F., Peng Z., Li X., Zha W. A differential game for cooperative target defense // Automatica. 2019. Vol. 102. P. 58–71. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034
23. Благодатских А. И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 13–20. http://mi.mathnet.ru/iimi297
24. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054. http://mi.mathnet.ru/dan9111
25. Виноградова М. Н. О поимке двух убегающих в одной нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 12–20. https://doi.org/10.20537/vm150102
26. Виноградова М. Н., Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. http://mi.mathnet.ru/timm897
27. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. http://mi.mathnet.ru/de328
28. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національної академії наук України. 2007. № 1. С. 50–55. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/1877
29. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функции Миттаг–Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. http://mi.mathnet.ru/cmfd182
30. Петров Н. Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. https://doi.org/10.20537/vm170105

Поступила в редакцию 10.08.2020

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

Мачтакова Алена Игоревна, аспирант, младший научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Цитирование: Н. Н. Петров, А. И. Мачтакова. Поимка двух скоординированных убегающих в задаче с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 50–62.

N. N. Petrov, A. I. Machtakova

Capture of two coordinated evaders in a problem with fractional derivatives, phase restrictions and a simple matrix

Keywords: differential game, pursuer, evader, fractional derivatives, phase restrictions.

MSC2010: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-05

In the finite-dimensional Euclidean space, a task of pursuing two evaders by a group of pursuers is considered, described by a system of the form

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v,$$

where $D^{(\alpha)} f$ is the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ of the function f, and a is a real number. It is assumed that all evaders use the same control and that the evaders do not leave a convex cone with vertex at the origin. The aim of the group of pursuers is to capture two evaders. The pursuers use program counterstrategies based on information about the initial positions and the control history of the evaders. The set of admissible controls is a unit ball centered at zero, the target sets are the origins. In terms of initial positions and game parameters, sufficient conditions for the capture are obtained. Using the method of resolving functions as a basic research tool, we derive sufficient conditions for the solvability of the approach problem in some guaranteed time.

Funding. This work was funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075–00232–20–01, project 0827–2020–0010 “Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical system” and under grant 20–01–00293 from the Russian Foundation for Basic Research.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
2. Chernous’ko F. L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 11–20. https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90105-2
3. Rikhsiev B. B. *Differentsial’nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple mothion), Tashkent: Fan, 1989.
4. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Boston–London–Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
5. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol’kimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
6. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob”ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
7. Kumkov S. S., Menec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 4, pp. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
8. Petrov N. N., Petrov N. Nikandr. On the differential game “cossacks–robbers”, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0521.90109
9. Prokopovich P. V., Chikrii A. A. A linear evasion problem for interacting groups of objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 583–591. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90135-X
10. Bannikov A. S. A nonstationary group pursuit problem, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, issue 5, pp. 1–9. https://doi.org/10.3103/S1066369X09050016
11. Alias I. A., Ibragimov G. I., Rakmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0

12. Satimov N., Mamatov M. S. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between the group of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk Uzbekskoi SSR*, 1983, vol. 4, pp. 3–6 (in Russian).
13. Petrov N. N., Vagin D. A. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
14. Machtakova A. I. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
15. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160104
16. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and System Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
17. Petrov N. N., Prokopenko V. A. One problem of pursuit of a group of evader, *Differ. Uravn.,* 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de6186
18. Petrov N. N., Narmanov A .Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
19. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, no. 1, pp. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
20. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit–evasion problems, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
21. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H., Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders, *Journal of Supercomputing*, 2020, vol. 76, pp. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
22. Liang L., Deng F., Peng Z., Li X., Zha W. A differential game for cooperative target defense, *Automatica*, 2019, vol. 102, pp. 58–71. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034
23. Blagodatskikh A. I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, vol. 2 (46), pp. 13–20 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi297
24. Grigorenko N. L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Sov. Math., Dokl.*, 1985, vol. 31, pp. 550–553. https://zbmath.org/?q=an:0592.90110
25. Vinogradova M. N. On the capture of two evaders in a non-stationary pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 12–20 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150102
26. Vinogradova M. N., Petrov N. N., Solov'eva N. A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 29, no. 1, pp. 41–48 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm897
27. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de328
28. Chikrii A. A., Matichin I. I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian). http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/1877
29. Popov A. Yu., Sedletskii A. M. Distribution of roots of Mittag–Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3
30. Petrov N. N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170105

Received 10.08.2020

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru

Machtakova Alyona Igorevna, Post-Graduate Student, Junior Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Citation: N. N. Petrov, A. I. Machtakova. Capture of two coordinated evaders in a problem with fractional derivatives, phase restrictions and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 50–62.