Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2020. Том 56. С. 63–78

УДК 517.925.51

© *И. Н. Сергеев*

ЛЯПУНОВСКИЕ, ПЕРРОНОВСКИЕ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для особой точки автономной дифференциальной системы определены естественные понятия ее перроновской и верхнепредельной устойчивости, напоминающие устойчивость по Ляпунову. Введены их многочисленные разновидности: от асимптотической и глобальной устойчивости до полной и тотальной неустойчивости. Исследованы их логические связи друг с другом: найдены случаи их полного совпадения и приведены примеры их возможного различия. Установлена инвариантность большинства этих свойств относительно сужения фазовой области системы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, автономная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-06

Введение

Настоящая работа посвящена развитию классического понятия *устойчивости по Ляпунову* [1, § 1], довольно подробно изученного к настоящему времени [2–6], но допускающего, тем не менее, различные содержательные вариации.

Одной из таких вариаций, изучаемой здесь, служит *устойчивость по Перрону*, возникшая в результате попытки более точно определить, за какие свойства решений системы отвечают ее *показатели Перрона* [7]. Прежде считалось [6, § 2], хотя и лишь приблизительно, что:

а) отрицательность показателей Перрона всех (ненулевых) решений ассоциируется с *устойчивостью по Пуассону* [2, гл. IV, § 4] нулевого решения;

б) положительность показателей Перрона всех решений напоминает, весьма отдаленно, либо неустойчивость по Ляпунову нулевого решения, либо *полную неустойчивость* [2, гл. IV, § 9] динамической системы (каждая точка которой является *блуждающей* [2, гл. IV, § 5]).

Устойчивость по Перрону введена лишь недавно [8], но уже активно изучается [9–26], а различные перроновские (нижнепредельные) свойства устойчивости действительно оказались связанными со знаками показателей Перрона практически так же, как и аналогичные ляпуновские (и верхнепредельные) — со знаками *показателей Ляпунова* [1, § 6], [3, гл. I], [4, гл. III, § 5].

Другая, еще более поздняя [15] и также изучаемая здесь, вариация понятия устойчивости, занимающая логически промежуточное положение между устойчивостью по Ляпунову и по Перрону, — это *верхнепредельная устойчивость*, в основе которой лежит не нижний временно́й предел от модуля решения (как в перроновской устойчивости), а верхний (фактически используемый, кстати, и в определении асимптотической устойчивости по Ляпунову).

Каждое из понятий ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости или неустойчивости порождает целый ряд еще более детальных его *разновидностей*, таких как асимптотическая, глобальная, почти глобальная и частичная устойчивость или полная, тотальная, почти тотальная и асимптотическая неустойчивость.

В настоящей работе, прежде всего, перечислены всевозможные реализуемые на автономных системах различные *сочетания* перроновских, ляпуновских или верхнепредельных свойств в отдельности, а также логически предельные реализуемые тройки таких свойств разного типа.

Далее, в работе выявлены некоторые специфические особенности этих свойств и их сочетаний в одномерном и линейном автономных случаях, в которых, как оказалось, *неразличимы* все одноименные свойства разного типа, причем асимптотическая устойчивость неотличима от глобальной, а полная неустойчивость — от тотальной.

Наконец, свойства дифференциальных систем изучены ниже также и на предмет их зависимости или независимости от *сужения* системы от исходной фазовой области на ее подобласть. Выяснилось, что глобальная устойчивость любого типа нарушается при выкалывании из фазовой области любой одной точки, а все разновидности перроновской и верхнепредельной устойчивости (кроме частичной и при отсутствии ляпуновской) нарушаются в результате сужения системы на достаточно малую фазовую подобласть, чего, к счастью, нельзя сказать об остальных изучаемых свойствах (в частности, практически обо всех ляпуновских).

Многие аспекты настоящего исследования обсуждались на научных семинарах [9–15] и конференциях [20–26], а некоторые доказательства частично опубликованы в работах [16–19].

§ 1. Определение всех изучаемых свойств

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и открытого связного множества $G \subset \mathbb{R}^n$, являющегося окрестностью нуля и называемого ниже *фазовой областью*, рассмотрим *автономную* систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G, \quad f(0) = 0, \quad f \in C^1(G). \tag{1.1}$$

З а м е ч а н и е 1. Предполагаемая гладкость векторного поля $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ в правой части системы (1.1) заведомо гарантирует для нее существование и единственность решения x задачи Коши с произвольным начальным значением $x(0) \in G$, а также его продолжаемость вправо: либо неограниченную, то есть на всю полуось $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$, либо ограниченную — но тогда лишь до выхода (асимптотического) соответствующей ему фазовой кривой на границу фазовой области G.

Ниже по умолчанию рассматриваются только *непродолжаемые* решения системы (1.1), а через $S_*(f)$, $S_\delta(f)$, $S^\delta(f)$ обозначаются множества тех из них, что удовлетворяют соответственно условиям

$$0 < |x(0)|, \quad 0 < |x(0)| \leqslant \delta, \quad |x(0)| = \delta.$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что система (1.1) (точнее, ее *нулевое решение*, молчаливо подразумеваемое в этом контексте) обладает следующим свойством *перроновского типа*:

(1) *устойчивость по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{1.2}$$

(2) *неустойчивость по Перрону*, если нет устойчивости по Перрону, то есть для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (1.2);

(3) *частичная устойчивость по Перрону*, если для любых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет требованию (1.2);

(4) *полная неустойчивость по Перрону*, если нет частичной устойчивости по Перрону, то есть для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (1.2);

(5) *асимптотическая устойчивость по Перрону*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| = 0; \tag{1.3}$$

(6) *асимптотическая неустойчивость по Перрону*, если нет асимптотической устойчивости по Перрону, то есть для любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (1.3).

Замечание 2. Каждое из требований (1.2) и (1.3) в определении 1, как и каждое из требований (1.4)–(1.6) в нижеследующих определениях 2 и 3, считается *не выполненным* в частности уже тогда, когда непродолжаемое решение $x \in S_*(f)$ системы (1.1) попросту не определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$.

Напомним классические (и не только) понятия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову [1, § 1], вполне отчетливо ассоциируемые с соответствующими перроновскими свойствами.

Определение 2. С каждым из шести введенных в определении 1 перроновских свойств системы (1.1) сопоставим его *ляпуновский* аналог — одноименное свойство *ляпуновского типа*:

(а) *устойчивость* и *неустойчивость*, *частичная устойчивость* и *полная неустойчивость по Ляпунову* получаются соответственно повторением описаний из пп. 1–4 определения 1 с механической заменой в них требования (1.2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{1.4}$$

(б) *асимптотическая устойчивость по Ляпунову* означает выполнение двух условий одновременно: первое состоит в устойчивости по Ляпунову, тогда как второе получается соответственно заменой требования (1.3) в п. 5 определения 1 требованием

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0, \tag{1.5}$$

а *асимптотическая неустойчивость по Ляпунову* означает, что асимптотическая устойчивость по Ляпунову не имеет места, то есть что выполнено хотя бы одно из двух условий: первое состоит в неустойчивости по Ляпунову, а второе получается заменой требования (1.3) в п. 6 определения 1 требованием (1.5).

Описание свойств перроновского типа существенно опирается на переход к нижнему пределу при $t \to \infty$ (см. требования (1.3) и (1.2) в определении 1). Поэтому их можно было бы назвать еще и *нижнепредельными*, а для полноты картины представляется весьма уместным рассмотреть также и их естественные аналоги, использующие верхний предел вместо нижнего.

Определение 3. С каждым из шести введенных в определении 1 перроновских свойств системы (1.1) сопоставим его *верхнепредельный* аналог, или одноименное свойство *верхнепредельного типа*, следующим образом: *верхнепредельные устойчивость*, *неустойчивость*, *частичная устойчивость*, *полная неустойчивость*, *асимптотическая устойчивость* и *асимптотическая неустойчивость* — получаются соответственно повторением описаний из пп. 1–6 определения 1 с механической заменой в них требований (1.2) и (1.3) требованиями

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \tag{1.6}$$

и соответственно (1.5).

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что система (1.1) обладает следующим свойством:

(1) *глобальная устойчивость: по Перрону* или *верхнепредельная*, — если сразу все решения $x \in S_*(f)$ удовлетворяют требованию (1.3) или (1.5) соответственно, причем если в последнем случае система еще и устойчива по Ляпунову, то будем говорить, что имеет также место *глобальная устойчивость по Ляпунову*;

(2) *тотальная неустойчивость: по Перрону, по Ляпунову* или *верхнепредельная*, — если для некоторого $\varepsilon > 0$ сразу все решения $x \in S_*(f)$ не удовлетворяет требованию (1.2), (1.4) или (1.6) соответственно.

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что:

(а) заданному требованию удовлетворяют *почти все* решения системы (1.1), если множество начальных значений всех не удовлетворяющих ему решений $x \in S_*(f)$ — назовем его *множеством вырождения* — имеет в фазовой области G этой системы как нулевую меру Лебега, так и первую категорию Бэра [27, гл. 1, 3]);

(б) система (1.1) *почти глобально устойчива* или *почти тотально неустойчива: по Перрону, по Ляпунову* или *верхнепредельно*, — если соответствующим требованиям из определения 4 удовлетворяют лишь *почти все* ее решения.

О п р е д е л е н и е 6. В совокупном списке свойств системы (1.1), перечисленных в определениях 1–5:

(а) все свойства, в названии которых фигурирует слово *устойчивость* или *неустойчивость*, назовем *свойствами устойчивости* или, соответственно, *свойствами неустойчивости*: *перроновскими, ляпуновскими* или *верхнепредельными* — в зависимости от контекста;

(б) все свойства из определений 1–3 назовем *основными*, а из определений 4 и 5 — *дополнительными* и *особыми* соответственно.

§ 2. Логическая иерархия во множестве свойств

Непосредственно в определениях 1–5 заложены естественные тайные логические взаимосвязи между различными свойствами — их и описывают

Т е о р е м а 1. *Все основные свойства разбиваются на следующие пары однотипных свойств, служащих логическим отрицанием друг друга:*

(1) *устойчивость и неустойчивость одного типа;*

(2) *частичная устойчивость и полная неустойчивость одного типа;*

(3) *асимптотическая устойчивость и асимптотическая неустойчивость одного типа.*

Т е о р е м а 2. *Все основные и дополнительные свойства разбиваются на следующие четверки однотипных свойств устойчивости или неустойчивости в отдельности, логически упорядоченных внутри:*

(1) *устойчивость влечет за собой частичную устойчивость того же типа, но вытекает из асимптотической устойчивости, вытекающей, в свою очередь, из глобальной устойчивости того же типа;*

(2) *неустойчивость влечет за собой асимптотическую неустойчивость того же типа, но вытекает из полной неустойчивости, вытекающей, в свою очередь, из тотальной неустойчивости того же типа.*

Т е о р е м а 3. *Для особых и других однотипных свойств верны следующие импликации:*

(1) *почти глобальная устойчивость вытекает из глобальной устойчивости того же типа и влечет за собой частичную устойчивость того же типа, а почти глобальная устойчивость по Ляпунову влечет за собой и устойчивость по Ляпунову;*

(2) *почти тотальная неустойчивость вытекает из тотальной неустойчивости того же типа и влечет за собой неустойчивость того же типа.*

Т е о р е м а 4. *Все основные, дополнительные и особые свойства разбиваются на следующие тройки одноименных, логически упорядоченные внутри:*

(1) *любое верхнепредельное свойство устойчивости вытекает из одноименного ляпуновского свойства, но влечет за собой одноименное перроновское;*

(2) *любое верхнепредельное свойство неустойчивости вытекает из одноименного перроновского свойства, но влечет за собой одноименное ляпуновское.*

§ 3. Неразличимость некоторых свойств

Вопрос о том, не упущены ли в теоремах 1–4 какие-либо еще логические связи, действующие между отдельными свойствами, помогает положительно решить

О п р е д е л е н и е 7. Для заданной системы (1.1) назовем какие-либо несколько свойств из определений 1–5 *неразличимыми*, если выполнение любого одного из этих свойств влечет за собой выполнение всех остальных.

Прежде всего, в нашем, *автономном*, случае неразличимыми оказываются полная и тотальная неустойчивости сразу всех типов, а значит, и их логические отрицания, о чем и говорит

Т е о р е м а 5. *Для любой автономной системы* (1.1) *неразличимыми являются:*

(1) *следующие шесть свойств: полная неустойчивость и тотальная неустойчивость всех трех типов;*

(2) *следующие шесть свойств: частичная устойчивость и отсутствие тотальной неустойчивости всех трех типов.*

З а м е ч а н и е 3. Полная и тотальная неустойчивости по Ляпунову неразличимы даже и для неавтономных систем.

Доказательство теоремы 5 обеспечивает следующая, представляющая также и самостоятельный, пусть и лишь технический, интерес

Т е о р е м а 6. *Если для некоторого* $\delta > 0$ *фазовая область* G *автономной системы* (1.1) *содержит* δ*-окрестность нуля и ни одно решение* $x \in S_\delta(f)$ *не удовлетворяет условию* (1.4) *с подстановкой в нем* δ *вместо* ε*, то при некоторых* $T > 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \delta)$ *справедливы следующие утверждения:*

(а) *любое решение* $x \in S^\delta(f)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t)| > \delta;$$

(б) *любое решение* $x \in S_*(f) \setminus S_\delta(f)$ *удовлетворяет условию*

$$\inf_{t\geqslant 0} |x(t)| > \varepsilon; \tag{3.1}$$

(в) *ни одно решение* $x \in S_*(f)$ *не удовлетворяет неравенству* (1.2).

Далее, в одномерном случае теорема 5 допускает значительное усиление, а именно: неразличимыми друг с другом становятся любые вообще *одноименные* перроновские, ляпуновские и верхнепредельные свойства из определений 1–5, а также глобальная устойчивость с почти глобальной и тотальная неустойчивость с почти тотальной и с полной, что и подтверждает

Т е о р е м а 7. *При* $n = 1$ *для любой автономной системы* (1.1) *неразличимыми являются:*

(1) *любые одноименные свойства всех трех типов;*

(2) *следующие шесть свойств: глобальная устойчивость и почти глобальная устойчивость всех трех типов;*

(3) *следующие девять свойств: полная неустойчивость, тотальная неустойчивость и почти тотальная неустойчивость всех трех типов.*

В простейшем случае *линейной* автономной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

исследование одноименных перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойств тоже приводит к одинаковому результату, который оказывается одинаковым для глобальной и асимптотической устойчивости, а также для тотальной и полной неустойчивости, как показывает

Т е о р е м а 8. *Для любой линейной автономной системы* (3.2) *неразличимыми являются:*

(1) *любые одноименные свойства всех трех типов;*

(2) *следующие девять свойств: асимптотическая устойчивость, глобальная устойчивость и почти глобальная устойчивость всех трех типов;*

(3) *следующие шесть свойств: полная неустойчивость и тотальная неустойчивость всех трех типов,*

причем они однозначно распознаются по действительным частям собственных значений оператора A*, задающего эту систему, и порядкам его жордановых клеток, отвечающих чисто мнимым из них.*

З а м е ч а н и е 4. Первое утверждение теоремы 8 в части неразличимости одноименных ляпуновских и перроновских свойств не переносится автоматически с линейных автономных систем на линейные неавтономные, и даже на чуть более широкий класс систем, *правильных* по Ляпунову [4, гл. III, § 11].

§ 4. Ключевые случаи различимости свойств

Исследование возможных сочетаний свойств из определений 1–5, реализуемых на одномерных или линейных системах и не противоречащих предыдущим теоремам, начинает

Т е о р е м а 9. *Для каждого из следующих семи свойств или сочетаний свойств всех трех типов сразу существует автономная система* (1.1)*, на которой оно реализуется:*

(1) *глобальная устойчивость;*

(2) *асимптотическая, но не глобальная устойчивость;*

(3) *устойчивость с асимптотической неустойчивостью;*

(4) *почти глобальная устойчивость с асимптотической неустойчивостью;*

(5) *неустойчивость с частичной устойчивостью;*

(6) *почти тотальная, но не полная неустойчивость;*

(7) *тотальная и полная неустойчивость,*
причем для сочетания из п. 4 эту автономную систему можно выбрать двумерной, для сочетания из пп. 2 и 5 — даже одномерной, для сочетаний из пп. 5 и 6 — линейной двумерной, а для сочетаний из пп. 1, 3 и 7 — даже линейной одномерной.

Если же система не одномерна и не линейна, то верхнепредельные свойства автономной системы могут резко контрастировать как с ляпуновскими, так и с перроновскими свойствами (занимая логически промежуточное положение между ними), о чем и говорят

Т е о р е м а 10. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, асимптотически устойчивая по Перрону, но неустойчивая по Ляпунову и верхнепредельно.*

Т е о р е м а 11. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, глобально устойчивая по Перрону и верхнепредельно, но неустойчивая по Ляпунову.*

З а м е ч а н и е 5. Первый пример системы, подтверждающей справедливость теоремы 11, содержится в монографии [3, п. 6.3], а его упрощенная версия — в учебнике [5, § 18]. Эта система, не будучи тотально неустойчивой по Перрону, по п. 2 теоремы 5 хотя бы частично устойчива по Ляпунову.

Автономную систему в теореме 10 можно обогатить еще и некоторыми особыми противоположными свойствами разного типа, которые описывает

Т е о р е м а 12. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, асимптотически и почти глобально устойчивая по Перрону, но неустойчивая и почти тотально неустойчивая по Ляпунову и верхнепредельно, причем множество вырождения ее особых свойств на всей плоскости состоит из окружности, содержащей нуль, и еще одной ненулевой особой точки.*

З а м е ч а н и е 6. Выколов в теореме 12 из фазовой плоскости всего одну упомянутую ненулевую особую точку, можно *почти* глобальную устойчивость по Перрону довести до глобальной.

Если в теореме 12 ослабить асимптотическую устойчивость по Перрону до просто устойчивости по Перрону, то для решений автономной системы можно сделать типичным дополнительное требование (4.1) ниже, которое обеспечивает следующая

Т е о р е м а 13. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, устойчивая и почти глобально устойчивая по Перрону, но неустойчивая и почти тотально неустойчивая по Ляпунову и верхнепредельно, причем почти все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют требованию*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|x(t)| = \infty, \tag{4.1}$$

а множество вырождения ее особых свойств на всей плоскости состоит из замкнутого луча с началом в нуле и еще одной ненулевой точки.

В теореме 5 из [17] утверждается существование неустойчивой и по Перрону, и по Ляпунову, и верхнепредельно автономной системы, у которой все решения, начинающиеся вне некоторой окрестности нуля, сходятся к нулю на бесконечности. Это утверждение значительно усиливает

Т е о р е м а 14. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, почти глобально устойчивая по Перрону и верхнепредельно, но неустойчивая по Перрону, по Ляпунову и верхнепредельно, причем множество вырождения ее особых свойств на всей плоскости состоит из замкнутой дуги окружности с одним из концов в нуле.*

З а м е ч а н и е 7. Список свойств системы в теореме 14 нельзя дополнить почти глобальной устойчивостью по Ляпунову, так как тогда, в силу п. 1 теоремы 3, она стала бы и устойчивой по Ляпунову.

§ 5. Чувствительность свойств к сужению системы

Не праздным является вопрос и о гарантии не нарушения рассматриваемых свойств автономной системы при уменьшении ее фазовой области, что отражает некоторую локальность самих этих свойств.

Определение 8. *Сужением системы* (1.1) с исходной фазовой областью $G \subset \mathbb{R}^n$ на ее *фазовую подобласть* $G' \subset G$, непременно являющуюся окрестностью нуля, назовем новую автономную систему (равно как и собственно переход к ней), получающуюся в результате замены исходной правой части $f \equiv f_G$ системы (1.1) ее сужением $f_{G'}$ на множество G'.

Определение 9. Скажем, что данное свойство автономных систем *нечувствительно к сужению*, если как только это свойство выполнено для некоторой автономной системы (1.1), так оно же выполнено и для любого ее сужения.

Прежде всего, и глобальная, и почти глобальная устойчивости любого типа (определения 4 и 5) *абсолютно чувствительны* к сужению, причем даже к самому незначительному, каковым является выкалывание всего одной произвольной ненулевой точки и соответственно всего одной практически произвольной кривой, как показывает

Теорема 15. *Если автономная система* (1.1) *глобально устойчива по Перрону, по Ляпунову или верхнепредельно, то она перестает быть таковой при удалении из ее фазовой области любой ненулевой точки, а если почти глобально устойчива — то при удалении любой кривой, трансверсальной к векторному полю этой системы.*

Далее, под определение 9 положительно подпадают все ляпуновские свойства из определений 2, 4 и 5, исключая, естественно, глобальную и почти глобальную устойчивость, и все свойства неустойчивости (определение 6) вообще, о чем и говорит

Теорема 16. *Каждое ляпуновское, перроновское и верхнепредельное свойство неустойчивости и каждое ляпуновское свойство устойчивости, отличное от глобальной и почти глобальной ляпуновской устойчивости, нечувствительно к сужению автономной системы.*

С одной стороны, перроновская и верхнепредельная *устойчивость*, даже глобальная, но не подкрепленная ляпуновской устойчивостью (каковая, согласно теореме 11, встречается), при сужении системы на некоторую, специально подобранную, ее фазовую подобласть непременно нарушается, порой и при самом незначительном сужении, что и подтверждают

Теорема 17. *Если автономная система* (1.1) *неустойчива по Ляпунову, то ее сужение на любую достаточно малую фазовую подобласть неустойчиво по Перрону и верхнепредельно.*

Теорема 18. *При $n = 2$ существует автономная система* (1.1)*, глобально устойчивая по Перрону и верхнепредельно, но неустойчивая по Ляпунову, причем удаление из ее фазовой области некоторой сколь угодно близкой к нулю ненулевой точки приводит к неустойчивости по Перрону и верхнепредельно.*

С другой стороны, при наличии ляпуновской устойчивости перроновская и верхнепредельная *асимптотическая устойчивость*, уже не нарушается, о чем говорит

Теорема 19. *Если система* (1.1) *устойчива по Ляпунову и асимптотически устойчива по Перрону или верхнепредельно, то любое ее сужение сохраняет все эти свойства.*

Наконец, *полная* ляпуновская, перроновская или верхнепредельная неустойчивость автономной системы не может возникнуть исключительно в результате сужения ее фазовой области, о чем свидетельствует усиливающая теорему 5 следующая

Т е о р е м а 20. *Если автономная система* (1.1) *частично устойчива по Перрону, по Ляпунову или верхнепредельно, то не только она сама, но и любое ее сужение обладает частичной устойчивостью сразу всех трех типов.*

§ 6. Доказательства теорем

Докажем все сформулированные выше теоремы небольшими группами, состоящими из нескольких (иногда из одной) теорем и упорядоченными по наименьшему номеру в группе.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1–4 получается путем непосредственного логического анализа определений 1–5 с учетом того, что требования (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) влекут за собой соответственно требования (1.2), (1.6), (1.3) и (1.2), причем устойчивость по Ляпунову заложена в почти глобальной устойчивости по Ляпунову прямо по определению 5. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 5 и 6. Пусть для данного $\delta > 0$ автономная система (1.1) удовлетворяет предпосылке теоремы 6.

Тогда, коль скоро ни одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (1.4) с заменой ε на δ, для каждого решения $x \in S^\delta(f)$ можно подобрать такие числа $T(x)$, $\varepsilon(x) > 0$, что

$$|x(T(x))| > \delta = |x(0)| \geqslant \inf_{0\leqslant t\leqslant T(x)} |x(t)| > \varepsilon(x). \tag{6.1}$$

В силу непрерывной зависимости решений от начальных значений (в смысле равномерной на отрезке $[0, T(x)]$ топологии), для некоторой окрестности $U(x)$ точки $x(0)$ оба строгих неравенства в цепочке (6.1) будут выполнены также и для всех решений $u \in S^\delta(f)$ с начальными условиями $u(0) \in U(x)$. Выбрав из получившегося покрытия компактной сферы радиуса δ (с центром в нуле) конечное подпокрытие окрестностями $U(x_1), \ldots, U(x_N)$ и положив

$$T \equiv \max\{T(x_1), \ldots, T(x_N)\}, \quad \varepsilon \equiv \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_N)\} \in (0, \delta),$$

получим все заключения теоремы 6:

а) для каждого решения $x \in S^\delta(f) \cap U(x_j)$ при некотором j выполнено условие $x(0) \in U(x_j)$, а с ним и оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t)| \geqslant \sup_{t\in[0,T(x_j)]} |x(t)| \geqslant |x(T(x_j))| > \delta;$$

б) если хотя бы одно решение $x \in S_*(f) \setminus S_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (3.1), то для некоторого $t_1 \geqslant 0$ подберем соответствующее ему *наибольшее* (а значит, положительное) значение $t_0 < t_1$, удовлетворяющее (так как функция $x(t + t_0)$ будет решением той же автономной системы (1.1)) соотношениям

$$|x(0)| > \delta = |x(t_0)| = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)| > \varepsilon \geqslant |x(t_1)|,$$

а в результате при некотором j будет выполнено условие $x(t_0) \in U(x_j)$, а с ним и две цепочки

$$|x(t_0 + T(x_j))| > \delta = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|, \qquad \inf_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+T(x_j)} |x(t)| > \varepsilon(x_j) \geqslant \varepsilon \geqslant |x(t_1)|,$$

первая из которых влечет за собой оценку $t_1 < t_0 + T(x_j)$, а вторая — противоречащую ей оценку $t_0 + T(x_j) < t_1$;

в) для любого решения $x \in S_*(f)$ не выполнено условие (1.4), поэтому при некотором $t_1 \geqslant 0$ имеем $|x(t_1)| > \delta$, откуда, в силу предыдущего пункта, получаем

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| \geqslant \inf_{t\geqslant 0} |x(t_0+t)| > \varepsilon.$$

Теперь для доказательства теоремы 5 остается лишь заметить следующее:

1) если система (1.1) обладает полной неустойчивостью по Ляпунову (самым слабым из шести свойств, перечисленных в п. 1), то для некоторого $\delta > 0$ выполнена предпосылка теоремы 6, а значит, для некоторого $\varepsilon > 0$ верно последнее заключение той же теоремы, из которого вытекает тотальная неустойчивость по Перрону (самое сильное из тех же шести свойств);

2) логическая эквивалентность шести свойств из п. 1 теоремы 5 влечет за собой логическую эквивалентность их отрицаний — именно она и утверждается в п. 2 той же теоремы. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Для любой одномерной автономной системы (1.1):

1) использование определений 1–5 приводит для одноименных свойств всех трех типов сразу к одинаковому результату, поскольку для каждых $\delta, \varepsilon > 0$ (где без ограничения общности считаем $\delta \leqslant \varepsilon$) каждое решение $x \in S_\delta(f)$ является монотонной функцией, поэтому оно либо определено не при всех $t \in \mathbb{R}_+$, и тогда не удовлетворяет ни одному из требований (1.2)–(1.6) вообще, либо имеет предел при $t \to \infty$, и тогда соответствующие друг другу требования для свойств разных типов сразу все выполнены или сразу все не выполнены;

2) если какое-либо из свойств (1.3)–(1.5) выполнено для какого-то одного решения $x \in S_*(f)$, то оно же выполнено и для всех решений, начинающихся ближе к нулю (с той же стороны), а значит, из почти глобальной устойчивости вытекает глобальная устойчивость того же типа, и наоборот;

3) аналогично, если какое-либо из свойств (1.2), (1.4) или (1.6) не выполнено для какого-то одного решения $x \in S_*(f)$, то оно же не выполнено и для всех решений, начинающихся дальше от нуля (с той же стороны), а значит, как из полной, так и из почти тотальной неустойчивости вытекает тотальная неустойчивость того же типа, и наоборот. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8. Для любой линейной автономной системы верны следующие утверждения, относящиеся сразу ко всем типам свойств и вытекающие асимптотического поведения всех ее решений, которое однозначно распознается по действительным частям $\alpha_i \equiv \operatorname{Re}\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ попарно различных собственных значений λ_i оператора A, задающего эту систему, и наибольшим порядкам r_i его жордановых клеток, отвечающих чисто мнимым из них [4, гл. II, § 8], а именно, система (3.2):

а) устойчива, если и только если все α_i неположительны, а все r_i нулевых из них равны 1;

б) асимптотически, а также глобально и почти глобально устойчива, если и только если все α_i отрицательны;

в) вполне, а также тотально неустойчива, если и только если все α_i положительны.

г) почти тотально неустойчива, если и только если все α_i неотрицательны, причем хотя бы одно из них положительно или хотя бы одно из r_i больше 1;

д) неустойчива, асимптотически неустойчива, частично устойчива, если и только если соответствующее условие из пп. *а*–*в* не выполнено. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 9. Сочетания свойств для отдельных пунктов из формулировки этой теоремы реализуют следующие конкретные системы:

а) для пп. 1, 3 и 7 — линейные одномерные системы $\dot{x} = -x$, $\dot{x} = 0$ и $\dot{x} = x$ соответственно;

б) для пп. 5 и 6 — линейная двумерная диагональная система с числами 0 и 1 на диагонали.

в) для пп. 2 и 5 — одномерные системы $\dot{x} = x(x-1)$ и $\dot{x} = -x^2$ соответственно;

г) для п. 4 — двумерная система $\dot{x} = x_1^2 \cdot x$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 10 и 12. Рассмотрим две автономные системы на плоскости

$$\dot{x} = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)x_1 \\ -x_1 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = |x|^2 \cdot g(x - x_0), \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Первая из них задает стандартный устойчивый предельный цикл, представленный единичной окружностью с центром (неподвижной точкой) в начале координат.

2. Вторая система получается из первой сдвигом на 1 по оси абсцисс и умножением полученной правой части на гладкую скалярную функцию $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, восстанавливающую прежнюю нулевую неподвижную точку. Таким образом, вторая система имеет две неподвижные точки $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $(1,0)^{\mathrm{T}}$ и фазовую кривую, заполняющую сдвинутую окружность, а все остальные ее фазовые кривые с ростом времени наматываются (с непостоянной угловой скоростью) на эту окружность, как на устойчивый предельный цикл. Следовательно, эта система асимптотически и даже *почти* (но только из-за наличия одной ненулевой особой точки) глобально устойчива по Перрону, но неустойчива и даже почти (из-за той же точки и упомянутой выше сдвинутой единичной окружности) тотально неустойчива и по Ляпунову, и верхнепредельно, поскольку для почти всех ее решений верхний предел в левой части равенства (4.1) равен 2. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 11, 14 и 18. Прежде всего, пример системы из [5, § 18] удовлетворяет теореме 11, поскольку нуль для всех фазовых кривых служит этой системы единственной ω-предельной точкой (откуда следует и перроновская, и верхнепредельная глобальная устойчивость), а хотя бы для одной (на самом деле там их бесконечно много) фиксированной фазовой кривой, заполняющей окружность с неподвижным нулем на ней, — еще и единственной α-предельной точкой, исключающей для этой системы ляпуновскую устойчивость.

Далее, в любую окрестность нуля целиком помещается некоторая дуга указанной выше окружности, выходящая (асимптотически) из нуля. Если конец этой дуги выколоть из фазовой плоскости системы, то любое ее решение, начинающееся на этой дуге произвольно близко к нулю, окажется определенным не на всей числовой полуоси, что исключает для полученной системы устойчивость любого из трех типов и завершает доказательство теоремы 18.

Наконец, для доказательства теоремы 14 достаточно некоторую ненулевую точку x_0 указанной окружности не выколоть, а обездвижить путем умножения правой части системы на гладкую скалярную функцию $|x - x_0|^2$. Тогда у полученной системы, при отсутствии устойчивости любого из трех типов, прежняя глобальная устойчивость (перроновская и верхнепредельная) сохранится только с поправкой *почти* и с множеством вырождения, совпадающим с начальной дугой окружности до обездвиженной точки включительно. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 13. Рассмотрим три двумерные автономные системы вида (1.1) каждая

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_1 - \ln x_2 \\ x_2(x_1 + \ln x_2) \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = h(x) \equiv x_2^2 \cdot g(x).$$

1. Первая из этих систем задает неустойчивую особую точку типа *фокус*.

2. Вторая система получается из первой посредством подстановки $y_1 = x_1$ и $y_2 = \ln x_2$, переводящей всю прежнюю фазовую плоскость в *фиксированную полуплоскость* с положительной ординатой, а начальную неподвижную точку — в точку $x_0 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. При

этом каждая из остальных фазовых траекторий полученной системы неограничена, а ее ω-предельным множеством служит вся граница указанной полуплоскости — *ось абсцисс*, на которой правая часть g пока не определена.

3. Правая часть h третьей системы получается из второй умножением на гладкую функцию x_2^2, что доопределяет ее во все точки оси абсцисс нулевыми значениями (делая эти точки неподвижными), причем еще и с нулевыми производными

$$h|_{x_2=0} = h'|_{x_2=0} = 0. \tag{6.2}$$

При этом все остальные фазовые кривые третьей системы, лежащие в указанной полуплоскости и отличные от неподвижной точки x_0, остаются неизменными (на них лишь меняется модуль скорости движения), поэтому для соответствующих им решений $x \in S_*(h)$ выполняются условия (1.3) и (4.1).

4. Если теперь в последней системе перейти к полярным координатам со значениями полярного угла $\varphi \in [0, \pi]$, а затем механически удвоить этот угол, то фазовая область полученной (искомой) системы займет уже всю плоскость, а гладкость ее правой части f в точках склейки (где $2\varphi = 0, 2\pi$) будет обеспечена условиями (6.2). При этом полученные неподвижные точки не испортят перроновской устойчивости, но заполнят множество вырождения особых свойств (почти тотальной перроновской устойчивости, а также почти тотальной ляпуновской и верхнепредельной неустойчивости), образуемое точкой $(-1, 0)^{\mathrm{T}}$ оси абсцисс и ее положительной полуосью, а для всех остальных решений $x \in S_*(f)$ сохранятся те же условия (1.3) и (4.1). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 15. Если система (1.1) обладает глобальной устойчивостью какого-либо типа, то при выкалывании любой ненулевой (автоматически нестационарной) точки фазовой области проходившая ранее через нее фазовая кривая прервется. Тогда решение, начинающееся на предшествующей части этой кривой, будет определено не на всей числовой оси, что исключит глобальную устойчивость. Аналогично, при удалении любой кривой, трансверсальной к векторному полю этой системы, любая имевшаяся у системы прежде почти глобальная устойчивость непременно нарушится, так как множество ее вырождения разрастется до целой области, состоящей из предшествующих этой кривой точек. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 16, 19 и 20. При сужении системы (1.1) на произвольную фиксированную фазовую подобласть, содержащую некоторую r-окрестность нуля, имеем:

а) если сама система обладала каким-либо основным свойством устойчивости по Ляпунову, то ее сужение будет обладать тем же свойством, поскольку при его проверке применительно к сужению системы достаточно лишь наложить дополнительное условие $\varepsilon, \delta \leqslant r$, которое никак не ограничивает общности;

б) если сама система обладала ляпуновской устойчивостью, то это свойство для суженной системы сохранится (см. п. а выше), а значит, для некоторых $\varepsilon, \delta \leqslant r$ сразу все решения $x \in S_\delta(f)$ удовлетворят требованию (1.4) и, будучи определенными на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворят и всем выполнявшимся ранее требованиям (1.3) и (1.5), что сохранит все свойства перроновской или верхнепредельной асимптотической устойчивости, какие только имелись ранее, а значит, и обоснует справедливость теоремы 19;

в) если сама система обладала частичной устойчивостью какого-либо типа, то согласно теореме 5 она обладала и конкретно ляпуновской частичной устойчивостью, каковое свойство для любого сужения системы также сохранится (см. п. а выше) и по той же теореме 5 повлечет за собой частичную устойчивость остальных двух типов, подтвердив тем самым теорему 20;

г) если сама система обладала каким-либо свойством неустойчивости, то ее сужение будет обладать тем же свойством (этот факт и завершает доказательство теоремы 16), поскольку теперь при проверке этого свойства решение $x \in S_*(f)$, не удовлетворявшее какому-либо из требований (1.2)–(1.6), по-прежнему не будет ему удовлетворять, если область определения этого решения сохранится прежней, а тем более — если она уменьшится. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 17. Пусть система (1.1) неустойчива по Ляпунову. Тогда фиксируем значение $\varepsilon > 0$, при котором для каждого $\delta > 0$ найдется решение $x \in S_\delta(f)$, не удовлетворяющее требованию (1.4). Пусть теперь фазовая подобласть $G' \subset G$ содержится в ε-окрестности нуля и содержит некоторую r-окрестность нуля. Тогда сужение на нее данной системы неустойчиво и по Перрону, и верхнепредельно, поскольку для каждого $\delta \in (0, r)$ некоторое решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (1.4), а значит, соответствующее решение $x' \in S_\delta(f_{G'})$ с тем же начальным значением определено уже не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. □

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Z. 1930. Vol. 31. No. 1. P. 748–766 (in German).
8. Сергеев И. Н. Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. https://doi.org/10.1134/S0374064118060122
9. Сергеев И. Н. Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1561–1562. https://doi.org/10.1134/S0374064118110146
10. Сергеев И. Н. Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1571–1572. https://doi.org/10.1134/S0374064118110146
11. Сергеев И. Н. Об исследовании перроновских и ляпуновских свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 897–899. https://doi.org/10.1134/S0374064119060165
12. Бондарев А. А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899. https://doi.org/10.1134/S0374064119060165
13. Сергеев И. Н. О зависимости и независимости перроновских и ляпуновских свойств устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1572–1573. https://doi.org/10.1134/S0374064119110128
14. Сергеев И. Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831. https://doi.org/10.1134/S0374064120060138
15. Сергеев И. Н. Определение верхнепредельной устойчивости и ее связь с устойчивостью по Ляпунову и по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. https://doi.org/10.1134/S0374064120110138
16. Сергеев И. Н. Устойчивость по Перрону и ее исследование по первому приближению // Доклады Академии наук. 2019. Т. 486. № 1. С. 20–23. https://doi.org/10.31857/S0869-5652486120-23
17. Сергеев И. Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. https://doi.org/10.1134/S0374064119050054

18. Сергеев И. Н. Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1338–1346. https://doi.org/10.1134/S0374064119100042
19. Сергеев И. Н. Исследование свойств перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 84–93. https://doi.org/10.1134/S0374064120010100
20. Сергеев И. Н. Устойчивость по Перрону и упрощенные центральные показатели Винограда–Миллионщикова // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления — конф. Пятницкого: тез. докл. XIV Междунар. конф. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 59.
21. Сергеев И. Н. Устойчивость решений дифференциальных систем по Ляпунову и по Перрону // Современные проблемы математики и механики: тез. докл. междунар. конф., посв. 80-летию акад. РАН В. А. Садовничего. М.: МАКС Пресс, 2019. С. 358–361.
22. Сергеев И. Н. Исследование перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Еругинские чтения — 2019: тез. докл. XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям. Ч. 1. Минск: ИМ НАН Беларуси, 2019. С. 51–52.
23. Сергеев И. Н. Об устойчивости решений по Перрону и по Ляпунову // Еругинские чтения — 2019: тез. докл. XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям. Ч. 1. Минск: ИМ НАН Беларуси, 2019. С. 52–57.
24. Сергеев И. Н. Перроновские и ляпуновские свойства устойчивости и их исследование по первому приближению // Осенние математические чтения в Адыгее: тез. докл. III Междунар. науч. конф. Майкоп: Изд-во АГУ, 2019. С. 83–86.
25. Sergeev I. N. The definition and properties of Perron stability of differential system // QUALITDE–2019: abstracts of International workshop on the qualitative theory of differential equations. Tbilisi, Georgia: A. Razmadze Math. Inst. of I. Javakhishvili Tbilisi St. University, 2019. P. 162–166.
26. Сергеев И. Н. Неразличимость некоторых ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости дифференциальных систем // Теория управления и математическое моделирование: тез. докл. Всероссийской конференции с междунар. участием, посвящённая памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. УдГУ. Ижевск, 2020. С. 118–120.
27. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 2008.

Поступила в редакцию 26.08.2020

Сергеев Игорь Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: igniserg@gmail.com

Цитирование: И. Н. Сергеев. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 63–78.

I. N. Sergeev

Lyapunov, Perron and upper-limit stability properties of autonomous differential systems

Keywords: differential equation, autonomous system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability.

MSC2010: 93D05

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-06

For a singular point of an autonomous differential system, the natural concepts of its Perron and upper-limit stability are defined, reminiscent of Lyapunov stability. Numerous varieties of them are introduced: from asymptotic and global stability to complete and total instability. Their logical connections with each other are investigated: cases of their coincidence are revealed and examples of their possible differences are given. The invariance of most of these properties with respect to the narrowing of the phase region of the system is established.

REFERENCES

1. Lyapunov A. M. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* (General problem of motion stability), Moscow–Leningrad: GITTL, 1950.
2. Nemytskii V. V., Stepanov V. V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: Gostekhizdat, 1949.
3. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problem of stability), Moscow: Nauka, 1966.
4. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967.
5. Filippov A. F. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of differential equations), Moscow: Editorial URSS, 2004.
6. Izobov N. A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* (Introduction to the theory of Lyapunov exponents), Minsk: Belarusian State University, 2006.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Math. Z.*, 1930, vol. 31, no. 1, pp. 748–766 (in German).
8. Sergeev I. N. Determination of Perron stability and its relationship with Lyapunov stability, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 855–856 (in Russian).
9. Sergeev I. N. On the study of the Perron stability of one-dimensional and autonomous differential systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1561–1562 (in Russian).
10. Sergeev I. N. Investigation of Perron stability of linear differential systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1571–1572 (in Russian).
11. Sergeev I. N. On study of the Perron and Lyapunov stability properties in the first approximation, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 897–899 (in Russian).
12. Bondarev A. A. One example of an unstable system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2019, vol. 55, no. 6, p. 899 (in Russian).
13. Sergeev I. N. On the dependence and independence of the Perron and Lyapunov stability properties on the phase region of the system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2019, vol. 55, no. 11, pp. 1572–1573 (in Russian).
14. Sergeev I. N. Some features of the Perron and Lyapunov stability properties of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 830–831 (in Russian).
15. Sergeev I. N. Determination of upper-limit stability and its relationship with Lyapunov and Perron stability, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1556–1557 (in Russian).
16. Sergeev I. N. Perron stability and its study at the first approximation, *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 252–254. https://doi.org/10.1134/S1064562419030037

17. Sergeev I. N. Definition and some properties of Perron stability, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 620–630. https://doi.org/10.1134/S0012266119050045
18. Sergeev I. N. Dependence and independence of the Perron and Lyapunov stability properties on the system phase domain, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1294–1303. https://doi.org/10.1134/S0012266119100045
19. Sergeev I. N. Study the Perron and Lyapunov stability properties by the first approximation, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 83–92. https://doi.org/10.1134/S0012266120010097
20. Sergeev I. N. Perron stability and simplified Vinograd–Millionshchikov central exponents, *Ustoichivost' i kolebaniya nelineinykh sistem upravleniya — konferentsiya Pyatnitskogo: tez. dokl. XIV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Stability and oscillations of nonlinear control systems — Pyatnitskiy's conference: abstracts of XIV International scientific conference), Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2018, p. 59 (in Russian).
21. Sergeev I. N. Lyapunov and Perron stability of solutions of differential systems, *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki: tez. dokl. Mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 80-letiyu akademika Rossiiskoi akademii nauk V. A. Sadovnichego* (Modern problems of mathematics and mechanics: abstracts of International conference dedicated to the 80th anniversary of Academician of the Russian Academy of Sciences V. A. Sadovnichy), Moscow: MAKS Press, 2019, pp. 358–361.
22. Sergeev I. N. Study of the Perron and Lyapunov stability in the first approximation, *Eruginskie chteniya – 2019: tez. dokl. XIX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsialnym uravneniyam. Ch. 1* (Erugin readings — 2019: abstracts of XIX International scientific conference on differential equations, part 1), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2019, pp. 51–52 (in Russian).
23. Sergeev I. N. On the Perron and Lyapunov stability of solutions, *Eruginskie chteniya – 2019: tez. dokl. XIX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsialnym uravneniyam. Ch. 1* (Erugin readings — 2019: abstracts of XIX International scientific conference on differential equations, part 1), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2019, pp. 52–57 (in Russian).
24. Sergeev I. N. Perron and Lyapunov stability properties and their investigation by the first approximation, *Osennie matemticheskie chteniya v Adygee: tez. dokl. III Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Autumn mathematical readings in Adygea: abstracts of III International scientific conference), Maikop: Adyghe State University, 2019, pp. 83–86 (in Russian).
25. Sergeev I. N. The definition and properties of Perron stability of differential system, *QUALITDE–2019: abstracts of International workshop on the qualitative theory of differential equations*, Tbilisi, Georgia: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019, pp. 162–166.
26. Sergeev I. N. Indistinguishability of some Lyapunov, Perron, and upper-limit stability properties of differential systems, *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie: tez. dokl. Vserossiiskaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem, posvyashennaya pamyati professora N. V. Azbeleva i professora E. L. Tonkova* (Control theory and mathematical modelling: abstracts of All-Russian conference with international participation dedicated to prof. N. V. Azbelev and prof. E. L. Tonkov), Udmurt State University, Izhevsk, 2020, pp. 118–120 (in Russian).
27. Oxtoby J. C. *Measure and category*, New York: Springer-Verlag, 1980.

Received 26.08.2020

Sergeev Igor Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: igniserg@gmail.com

Citation: I. N. Sergeev. Lyapunov, Perron and upper-limit stability properties of autonomous differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 63–78.