Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 56. С. 138–184

УДК 517.9

© *А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается дифференциальная игра (ДИ) сближения–уклонения, а также ее релаксации, конструируемые с учетом соображений приоритетности в вопросах реализации наведения на целевое множество (ЦМ) и соблюдения фазовых ограничений (ФО). Относительно ЦМ предполагается замкнутость в естественной топологии пространства позиций, а относительно множества, определяющего ФО, постулируется замкнутость сечений, отвечающих фиксации моментов времени. Для такой постановки с использованием метода программных итераций (МПИ) установлен вариант альтернативы в некоторых естественных классах стратегий игроков (аналог альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина). Рассматривается схема релаксации игровой задачи сближения для общего случая нелинейной ДИ с незамкнутым, вообще говоря, множеством, определяющим ФО. При построении релаксаций учитываются соображения, связанные с приоритетностью в «степени» осуществления наведения на ЦМ и соблюдения ФО (исследуется случай «несимметричного» ослабления условий окончания игры). Вводится функция позиции, значения которой (с «поправкой» на приоритетность) играют всякий раз роль аналога наименьшего размера окрестностей ЦМ и множества, задающего ФО, при которых еще возможно гарантированное решение релаксированной задачи игрока, заинтересованного в сближении с ЦМ при соблюдении ФО. Показано, что значение данной функции (при фиксации позиции игры) является ценой ДИ на минимакс–максимин функционала качества, который характеризует как «степень» сближения с ЦМ, так и «степень» соблюдения исходных ФО.

Ключевые слова: альтернатива, дифференциальная игра, квазистратегия, метод программных итераций, релаксация задачи сближения.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-10

Введение

Предметом исследования в статье являются дифференциальная игра (ДИ) сближения-уклонения и некоторые связанные с ней ДИ со специальными функционалами качества. Исходная ДИ на конечном промежутке времени задается парой множеств в пространстве позиций, одно из которых является целевым множеством (ЦМ) игрока I, а второе формирует его фазовые ограничения (ФО) посредством системы сечений, соответствующих каждое фиксированному моменту времени. Итак, игрок I заинтересован в приведении траекторий на ЦМ при соблюдении ФО. Цель игрока II противоположна. В случае когда оба множества-параметра замкнуты в обычной топологии покоординатной сходимости, а система удовлетворяет традиционным условиям (см. [1, 2]), Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным была установлена теорема об альтернативе [1, 2], касающаяся разрешимости ДИ в естественных классах позиционных стратегий. Эта теорема послужила основой строгой математической теории. Отметим принципиальный результат А. В. Кряжимского, распространившего утверждение упомянутой теоремы на случай управляемой системы, не удовлетворяющей традиционному условию Липшица по фазовой переменной (см. [3]).

В настоящей работе рассматривается следующий, несколько более общий вариант ДИ сближения–уклонения: относительно множества, формирующего ФО, не предполагается замкнутость в естественной топологии пространства позиций; предполагается лишь замкнутость всех сечений упомянутого множества (добавляются по мере надобности также некоторые эффективно проверяемые условия технического характера, естественные для задач управления). Итак, рассматривается случай весьма нерегулярной ДИ. Для данного случая оказывается, однако, справедливым вариант альтернативы, причем соответствующее (альтернативное) разбиение пространства позиций может быть найдено с помощью надлежащей модификации известного [4–10] метода программных итераций (МПИ).

Если позиция игры не принадлежит множеству (успешной) разрешимости задачи игрока I, а потому в силу упомянутой альтернативы игрок II гарантирует решение своей задачи, представляет все же интерес вопрос о наименьшем размере окрестностей ЦМ и множества, формирующего ФО, для которых, при упомянутом ослаблении условий окончания игры сближения, игрок I еще гарантирует решение своей задачи (см. [11, 12]). Итак, представляет интерес наиболее экономная релаксация задачи сближения, изучению которой посвящена настоящая статья, являющаяся логическим продолжением работ [11, 12].

В связи с исследованиями по теории ДИ отметим монографии [2, 13–20]; имеется большое число журнальных статей, среди которых отметим сейчас [21–29] (в частности, отметим использование неупреждающих стратегий в [26–29]). Напомним, что в [19, гл. III, IV] подведен определенный итог ранних исследований по МПИ. Среди недавних работ выделим [10–12, 30, 31]. Особо отметим связь конструкций на основе МПИ и аппаратом квазистратегий (неупреждающих стратегий). Последние реализуются ниже в виде мультифункций, действующих в пространствах мер; само условие неупреждаемости формулируется при этом в терминах соответствующих подпространств измеримых пространств (ИП). Необходимость в применении обобщенных управлений (ОУ), определяемых здесь в виде стратегических мер, и преобразований упомянутых ОУ с соблюдением условия неупреждаемости связано с тем, что далее рассматривается нелинейная конфликтно-управляемая система общего вида. В связи с общими вопросами применения ОУ см. [2, 19, 32, 33].

Автор посвящает настоящее исследование светлой памяти Евгения Леонидовича Тонкова, выдающегося ученого, прекрасного педагога, простого и сердечного человека.

§ 1. Общие сведения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Любым двум объектам x и y сопоставляем их неупорядоченную пару $\{x; y\}$ (итак, $\{x; y\}$ — множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов). Для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z: $z \in \{z\}$. Если a и b — объекты, то $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$ есть [34, с. 67] упорядоченная пара (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для всякой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы этой УП соответственно; они однозначно определяются условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Если H — множество, то $\mathcal{P}(H)$ — семейство всех подмножеств (п/м) H, а $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ — семейство всех непустых п/м H. Произвольным семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$$

данного семейства на упомянутое множество. Множеству $\mathbb{M}$ и (непустому) семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляется семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})), \tag{1.1}$$

двойственное к $\mathcal{M}$; в (1.1) в качестве $\mathcal{M}$ часто используются топология, либо семейство замкнутых множеств топологического пространства (ТП).

Отметим известные соглашения [35, гл. 1], касающиеся операций над множествами. Если a, b и c — объекты, то в виде $(a,b,c) \triangleq ((a,b),c)$ имеем их (упорядоченный) триплет. Если x, y, p и q — объекты, то $(x,y,p,q) \triangleq ((x,y,p),q)$. Для любых трех множеств A, B и C, как обычно, $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Для любых четырех множеств X, Y, Z и S имеем $X \times Y \times Z \times S \triangleq (X \times Y \times Z) \times S$.

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B. Для множеств A и B, $\mathbf{f} \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ полагаем, что $\mathbf{f}^1(C) \triangleq \triangleq \{\mathbf{f}(x)\colon x \in C\}$ (образ C), а $(\mathbf{f}|C) \in B^C$ — обычное сужение $\mathbf{f}$ на C; $(\mathbf{f}|C)(x) \triangleq \mathbf{f}(x)$ $\forall x \in C$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\} = [0,\infty[$ (промежутки в $\mathbb{R}$ обозначаем только квадратными скобками), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = = \{0;1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$. При обозначении промежутков $\mathbb{R}$ допускается случай, когда промежуток является пустым множеством; так, при $h \in \mathbb{R}$ в виде $[h,h[$ имеем $\varnothing$: $[h,h[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | (h \leqslant \xi) \& (\xi < h)\} = \varnothing$. Пусть $\overrightarrow{s,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | s \leqslant k\}$ $\forall s \in \mathbb{N}_0$. Если $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$, то $\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | (p \leqslant k) \& (k \leqslant q)\}$; ясно, что $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{R}_+$ — неотрицательные вещественные числа — не являются множествами. С учетом этого для всякого множества H и числа $m \in \mathbb{N}$ используем вместо $H^{\overline{1,m}}$ более традиционное H^m для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,m}$ в H (т. е. кортежей «длины» m). Из общих определений следует для всякого семейства $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ есть множество всех последовательностей в $\mathcal{H}$; если $(H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{H}$ — множество, то, как обычно,

$$((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{H}) \Longleftrightarrow ((\mathbb{H} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i) \& (H_{j+1} \subset H_j \ \forall j \in \mathbb{N})).$$

Если S — непустое множество, то $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$ есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S (в качестве S может, конечно, использоваться семейство).

Измеримые пространства и меры. Если E — множество, то через $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ обозначаем семейство всех σ-алгебр п/м E; при $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ в виде $(E, \mathcal{E})$ имеем стандартное измеримое пространство (ИП). Если же $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma_E^0(\mathfrak{E})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathfrak{E}$; $\sigma_E^0(\mathfrak{E}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$. Для множеств X и $Y \in \mathcal{P}(X)$, а также семейства $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ имеем равенство $\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^0(\mathcal{X})|_Y$; при этом

$$(Y \in \sigma_X^0(\mathcal{X})) \Longleftrightarrow (\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma_X^0(\mathcal{X}) | \Sigma \subset Y\}). \tag{1.2}$$

Если (X, τ) есть ТП, то σ-алгебру $\sigma_X^0(\tau)$ и множества из этой σ-алгебры называют борелевскими; данная конструкция используется ниже только в случае, когда (X, τ) — компакт в конечномерном арифметическом пространстве с обычной топологией покоординатной сходимости.

Для множества E и $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных счетно-аддитивных мер на σ-алгебре $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E} = \sigma_E^0(\tau)$, где τ — топология на E, то меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ называем борелевскими; в случае метризуемости ТП (E, τ) все такие меры регулярны (см. [36, гл. 1]).

§ 2. Содержательная постановка задачи

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассматриваем $\mathbb{R}^n$ в качестве фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t,x,u,v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{2.1}$$

функционирующей на промежутках $[t,\vartheta_0]$, где $t \in T$ при $T \triangleq [t_0,\vartheta_0]$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0$. В (2.1) P и Q — непустые конечномерные компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где (здесь и ниже) $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$;

$$f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

есть непрерывная (по совокупности переменных) функция. Предполагается, что вектор $u \in P$ (вектор $v \in Q$) есть управляющий параметр игрока I (игрока II). Реализации управлений игроков сейчас полагаем простейшими (релейными): при $t \in T$ рассматриваем множество $\mathcal{U}_t$ (множество $\mathcal{V}_t$) всех кусочно-постоянных, непрерывных справа и непрерывных слева в точке ϑ_0 функций из $P^{[t,\vartheta_0]}$ (из $Q^{[t,\vartheta_0]}$). Полагаем сейчас, что позиции $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и управлениям $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t,\ v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ сопоставляется единственная траектория $\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}(\cdot,t,x,u(\cdot),v(\cdot)) \in C_n([t,\vartheta_0])$, где $C_n([t,\vartheta_0])$ есть (здесь и ниже) множество всех непрерывных отображений из $[t,\vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n,\ C_n([t,\vartheta_0]) \subset (\mathbb{R}^n)^{[t,\vartheta_0]}$. Упомянутая траектория стартует из позиции (t,x). В дальнейшем условия на систему (2.1), (2.2) будут уточнены. Каждой позиции $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ сопоставляем непустые множества $\mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t_*,x_*\rangle$ возможных способов формирования реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно (ниже используются только варианты $\mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle = \mathfrak{U}[t_*]$ и $\mathfrak{V}\langle t_*,x_*\rangle = \mathfrak{V}[t_*]$, но сейчас сохраняем упомянутое более общее толкование). При $\mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle$ (при $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t_*,x_*\rangle$) имеем непустой пучок $\mathfrak{X}_I(t_*,x_*,\mathbb{U})$ (непустой пучок $\mathfrak{X}_{II}(t_*,x_*,\mathbb{V})$) траекторий, возможных при использовании $\mathbb{U}$ (при использовании $\mathbb{V}$) и стартующих из позиции (t_*,x_*). Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то возникают следующие две (M,N)-задачи:

1') найти множество всех позиций $(t_*,x_*) \in N$ таких, что $\exists \mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle$:

$$\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_I(t_*,x_*,\mathbb{U})\ \exists \vartheta \in [t_*,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,x(\vartheta)) \in M)\&((t,x(t)) \in N\ \forall t \in [t_*,\vartheta[); \tag{2.3}$$

2') найти множество всех позиций $(t^*,x^*) \in N$ таких, что $\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t^*,x^*\rangle$:

$$\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_{II}(t^*,x^*,\mathbb{V})\ \forall \vartheta \in [t^*,\vartheta_0]\ \ ((\vartheta,x(\vartheta)) \in M) \Longrightarrow (\exists t \in [t^*,\vartheta[\colon (t,x(t)) \notin N). \tag{2.4}$$

Напомним, что в [1,2] задачи, подобные 1') и 2'), рассматривались для замкнутых множеств M и N при условии, что $\mathfrak{U}\langle t,x\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t,x\rangle$ являются множествами позиционных стратегий соответствующего типа, траектории определяются в виде равномерных пределов естественных пошаговых движений. В [37] в качестве возможных способов формирования реализаций управлений использовались квазистратегии (неупреждающие стратегии). У нас (2.3) и (2.4) определяют гарантированную реализацию (M,N)-сближения и (M,N)-уклонения соответственно в классах стратегий (способов формирования реализаций управлений) вышеупомянутого типа.

Если множества, определяемые в виде решений задач 1') и 2'), образуют разбиение N, будем говорить, что имеет место альтернатива (именно это свойство реализуется в [1,2,37]). Представляет интерес анализ изменений в решениях задач 1') и 2') при изменении параметров — множеств M и N. В частности, представляет интерес вопрос о релаксации, когда M и N будут заменяться надмножествами (имеется в виду релаксация задачи 1'), т. е. задачи игрока I).

§ 3. Обобщенные программные управления и стратегии игроков

Напомним, что $T = [t_0,\vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$; T есть объемлющий промежуток, а «рабочие» промежутки определяются в виде $[t,\vartheta_0]$, где $t \in T$. При $t \in T$ рассматриваем конечномерные компакты $[t,\vartheta_0]$, $Y_t \triangleq [t,\vartheta_0] \times P$, $Z_t \triangleq [t,\vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \triangleq [t,\vartheta_0] \times P \times Q$ в оснащении обычными топологиями покоординатной сходимости; σ-алгебры, порожденные этими топологиями, называем борелевскими. Итак, в виде

$\mathcal{T}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \vartheta_0]],\ \mathcal{K}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[Y_t],\ \mathcal{D}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[Z_t],\ \mathcal{C}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[\Omega_t]$ имеем σ-алгебры борелевских п/м упомянутых компактов;

$$([t, \vartheta_0], \mathcal{T}_t),\ (Y_t, \mathcal{K}_t),\ (Z_t, \mathcal{D}_t),\ (\Omega_t, \mathcal{C}_t)$$

суть стандартные ИП. При $I \in \mathcal{T}_t$ имеем цилиндры $I \times P \in \mathcal{K}_t,\ I \times Q \in \mathcal{D}_t$ и $I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$. Кроме того (используем соглашения § 1), при $K \in \mathcal{K}_t$ имеем $K \times Q \in \mathcal{C}_t$, а при $D \in \mathcal{D}_t$

$$D \underline{\times} P \overset{\triangle}{=} \{(\xi, u, v) \in \Omega_t | (\xi, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t.$$

С учетом (1.2) получаем при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_0]$, что

$$\begin{gathered}
\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_t|_{[\theta, \vartheta_0]} = \{I \in \mathcal{T}_t | I \subset [\theta, \vartheta_0]\}, \quad \mathcal{K}_\theta = \mathcal{K}_t|_{Y_\theta} = \{K \in \mathcal{K}_t | K \subset Y_\theta\}, \\
\mathcal{D}_\theta = \mathcal{D}_t|_{Z_\theta} = \{D \in \mathcal{D}_t | D \subset Z_\theta\}, \qquad \mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_t|_{\Omega_\theta} = \{C \in \mathcal{C}_t | C \subset \Omega_\theta\}, \\
\mathcal{D}_t^\theta \overset{\triangle}{=} \mathcal{D}_t|_{[t, \theta[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t | D \subset [t, \theta[\times Q\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \theta[\times Q], \\
\mathcal{C}_t^\theta \overset{\triangle}{=} \mathcal{C}_t|_{[t, \theta[\times P \times Q[} = \{C \in \mathcal{C}_t | C \subset [t, \theta[\times P \times Q[\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \theta[\times P \times Q].
\end{gathered}$$

Если $t \in T$, то через λ_t обозначаем сужение меры Лебега на $\mathcal{T}_t$,

$$\mathcal{H}_t \overset{\triangle}{=} \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] | \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I)\ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{R}_t \overset{\triangle}{=} \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] | \mu(I \times P) = \lambda_t(I)\ \forall I \in \mathcal{T}_t\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{E}_t \overset{\triangle}{=} \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] | \nu(I \times Q) = \lambda_t(I)\ \forall I \in \mathcal{T}_t\}. \tag{3.3}$$

Множество $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ допускает естественное погружение в $\mathcal{H}_t$ (3.1), множество $\mathcal{U}_t$ — в $\mathcal{R}_t$ (3.2), а множество $\mathcal{V}_t$ — в $\mathcal{E}_t$ (3.3); в этой связи см. [19, гл. IV, § 2] (более общие процедуры погружения с использованием измеримых управляющих функций см. в [32, гл. III, IV] и в [33]). Наряду с (3.1)–(3.3) полагаем при $t \in T$, что

$$\begin{gathered}
(\pi_t[\mu] \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t | \eta(K \times Q) = \mu(K)\ \forall K \in \mathcal{K}_t\}\ \forall \mu \in \mathcal{R}_t) \\
\&(\Pi_t(\nu) \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t | \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D)\ \forall D \in \mathcal{D}_t\}\ \forall \nu \in \mathcal{E}_t)
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Множества в (3.4) именуем μ- и ν-программой соответственно. Отметим один нужный в дальнейшем вариант управления-меры, т. е. обобщенного управления (ОУ). Для этого сначала заметим, что при $t \in T$ семейство $\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B} \overset{\triangle}{=} \{K \times B\colon K \in \mathcal{K}_t,\ B \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра борелевских п/м Q, есть полуалгебра п/м Ω_t, для которой $\mathcal{C}_t = \sigma^0_{\Omega_t}(\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B})$. Полагаем, что $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ при $v \in Q$ есть след на $\mathcal{B}$ меры Дирака, сосредоточенной в точке v (и определяемой первоначально на $\mathcal{P}(Q)$). Тогда при $t \in T,\ \mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ через $\mu \otimes v$ обозначаем единственную меру из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t]$, для которой $(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B)\ \forall K \in \mathcal{K}_t\ \forall B \in \mathcal{B}$; ясно, что $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$ отвечает совместному действию меры μ и константы v на систему (2.1).

Как обычно, через $C(\Omega_t),\ C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ обозначим множество всех непрерывных в/з функций на $\Omega_t,\ Y_t$ и Z_t соответственно. Оснащая эти множества поточечно определяемыми линейными операциями и нормами равномерной сходимости, получаем сепарабельные банаховы пространства; через $C^*(\Omega_t),\ C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ обозначаем пространства, топологически сопряженные к $C(\Omega_t),\ C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно (пространства линейных ограниченных функционалов). По теореме Рисса множества (3.1)–(3.3) отождествимы с п/м $C^*(\Omega_t),\ C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ соответственно и могут быть оснащены относительными *-слабыми топологиями, причем все множества (3.1)–(3.4) оказываются при таком оснащении метризуемыми компактами по теореме Алаоглу (учитывается сепарабельность пространств $C(\Omega_t),\ C(Y_t)$ и $C(Z_t)$; см. также [38, гл. V, § 5]). Как следствие метризуемости относительных *-слабых топологий на множествах (3.1)–(3.3) замкнутость соответствующих п/м (3.1)–(3.3) тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенциальной компактности (имеются в виде *-слабая замкнутость и *-слабая компактность). В этой связи см. также [19, гл. IV]. Таким образом, все нужные топологические свойства пространств (3.1)–(3.4) в упомянутом оснащении (относительными) *-слабыми топологиями допускают исчерпывающее описание в терминах сходящихся последовательностей, что и будет использоваться в дальнейшем. Для обозначения *-слабой сходимости ниже используется символ $\rightharpoonup$. Итак, полагая, что $\mathfrak{F}_t^*$ — семейство всех *-слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_t$, имеем, что

$$\mathfrak{F}_t^* = \{\mathbb{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t) | \forall (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}\ \forall \eta \in \mathcal{H}_t\ \ ((\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \longrightarrow (\eta \in \mathbb{F})\} \tag{3.5}$$

(множества — элементы $\mathfrak{F}_t^*$ — *-слабо компактны).

Введем в рассмотрение квазистратегии игрока I, фиксируя момент $t_* \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Итак, речь пойдет о квазистратегиях на промежутке $[t_*, \vartheta_0]$:

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{t_*} \triangleq \{\ \alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) |\ \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*}\ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*}\ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \\ ((\nu_1 | \mathcal{D}_{t_*}^{\theta}) = (\nu_2 | \mathcal{D}_{t_*}^{\theta})) \Longrightarrow (\{(\eta | \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) \colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta | \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) \colon \eta \in \alpha(\nu_2)\})\}\end{gathered} \tag{3.6}$$

есть множество всех квазистратегий игрока I на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Итак, данные квазистратегии суть мультифункции, а, точнее, элементы множества $\mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*})^{\mathcal{E}_{t_*}}$. С учетом (3.5) введем «усовершенствованные» квазистратегии — квазипрограммы, полагая, что

$$\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \triangleq \{\alpha \in \tilde{A}_{t_*} |\ \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}_{t_*}^*\} \tag{3.7}$$

(введено множество всех квазипрограмм на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$). Ясно, что

$$\Pi_{t_*}(\cdot) \triangleq (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi},$$

а потому множества (3.6), (3.7) непусты. Если $x_* \in \mathbb{R}^n$, то $\mathfrak{U}\langle t_*, x_* \rangle$ отождествляем с $\tilde{A}_{t_*}$.

Рассмотрим теперь стратегии-тройки игрока II, следуя [30, 31]. Всюду в дальнейшем полагаем $\mathfrak{V} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n}$, получая множество многозначных позиционных стратегий (см. [1, 2]). Если $t \in T$, то

$$\begin{gathered}G^*(t) \triangleq \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t,\vartheta_0])} | \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0])\ \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0])\ \forall \theta \in [t, \vartheta_0] \\ ((g_1 | [t, \theta]) = (g_2 | [t, \theta])) \Longrightarrow (g^*(g_1) \cap [t, \theta] = g^*(g_2) \cap [t, \theta])\};\end{gathered}$$

$\mathbb{G}_0^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$ (множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$). Наконец, полагаем, что при $t_* \in T$

$$\mathbb{G}_{t_*}^* \triangleq \prod_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbb{G}_0^*(t); \tag{3.8}$$

элементы множества (3.8) называем стратегиями (неупреждающей) коррекции на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Легко видеть, что (3.8) — непустое множество. Элементы произведения $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}$ называем стратегиями-тройками игрока II на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ (при $(V, \gamma, k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}$ значение k определяет число возможных переключений управления из $\mathcal{V}_{t_*}$). Ясно, что $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \neq \varnothing$.

§ 4. Обобщенные траектории; пучки траекторий

Рассмотрим сначала вопрос о сопоставлении позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и управлению-мере (т. е. ОУ) $\eta \in \mathcal{H}_t$ траектории системы (см. (2.1), (2.2)) на отрезке $[t, \vartheta_0]$. Здесь же будут введены весьма общие условия на систему, подобные [3]. Итак, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ рассматриваем интегральную воронку

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \stackrel{\triangle}{=} \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) | x(\theta) = x_* + \\ + \int\limits_{[t_*, \theta[\times P \times Q} f(t, x(t), u, v)\eta(d(t, u, v)) \ \ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]\}. \quad (4.1)$$

Как и в [3], предполагается, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ множество (4.1) одноэлементно, т. е.

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}, \quad (4.2)$$

где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть соответствующая обобщенная траектория (скользящий режим). Итак, у нас все интегральные воронки одноэлементны. Далее, полагая, что $\| \cdot \|$ есть евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, введем условие равномерной ограниченности, подобное [3]. Итак, пусть $\mathbb{B}_n(c) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leqslant c\} \ \forall c \in \mathbb{R}_+$. Полагаем далее, что $\forall a \in \mathbb{R}_+ \ \exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \ \ \forall t \in T \ \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t \ \forall \tau \in [t, \vartheta_0]. \quad (4.3)$$

Итак, относительно системы (2.1), (2.2) ниже предполагаются выполненными только условия (4.2), (4.3) (имеются, конечно, более частные случаи, допускающие непосредственную проверку; см. в этой связи традиционные условия в [1, 2, 15, 19]). Полезно отметить положения [10, (4.12), (4.13)]. Важную роль далее играет свойство непрерывности отображения

$$(\eta, x) \longmapsto \varphi(\cdot, t_*, x, \eta) \colon \mathcal{H}_{t_*} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow C_n([t_*, \vartheta_0]) \quad (4.4)$$

при $t_* \in T$, где $\mathcal{H}_{t_*}$ оснащено относительной *-слабой топологией, $\mathbb{R}^n$ — обычной $\| \cdot \|$-топологией, а $C_n([t_*, \vartheta_0])$ — топологией равномерной сходимости: если $\eta_* \in \mathcal{H}_{t_*}$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{H}_{t_*})^{\mathbb{N}}$ и $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, то

$$(((\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta_*) \& ((x_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow x_*)) \Longrightarrow ((\varphi(\cdot, t_*, x_j, \eta_j))_{j \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)). \quad (4.5)$$

Ясно, что (4.5) полностью определяет свойство непрерывности отображения (4.4). В качестве «прямого» следствия отметим (учитывая компактность множеств (3.4)), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \stackrel{\triangle}{=} \{ \ \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\} \quad (4.6)$$

есть непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости; мы используем (4.6) в последующих программных конструкциях, при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ имеем, что

$$\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \alpha(\nu)\} \subset \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu).$$

Если же $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, то

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \stackrel{\triangle}{=} \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \quad (4.7)$$

Пучки (4.7) используются в качестве аналогов $\mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$; при этом $\mathbb{U}$ заменяется квазистратегией из $\tilde{A}_{t_*}$ (в отличие от § 2 мы допускаем здесь воздействие на систему управлений-мер). Если $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то (4.7) — непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Подчеркнем, что траектории — элементы (4.7) — характеризуют возможности игрока I. Нам потребуется еще одно определение, связанное с ОУ игрока I: при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ в виде

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \overset{\triangle}{=} \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) \colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \tag{4.8}$$

имеем компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости.

В качестве аналогов $\mathfrak{X}_{II}(t_*, x_*, \mathbb{V})$ используем ниже пучки траекторий, порожденные стратегиями-тройками, используемыми в качестве $\mathbb{V}$; см. [30, 31]. Итак, если $(t_*, x_*) \in \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $m \in \mathbb{N}$, то определяем (непустой) пучок $\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m] \in \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0]))$ траекторий, порожденных стратегией-тройкой (V, β, m) и стартующих из (t_*, x_*); в этой связи напомним построения [30, раздел 7] и [31, (7.4)–(7.8)].

Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то определены следующие две (M, N)-задачи.

Задача I(M, N)**.** Найти множество всех позиций $(t_*, x_*) \in N$, для каждой из которых

$$\exists \alpha \in \tilde{A}_{t_*}\ \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((t, x(t)) \in N\ \forall t \in [t_*, \vartheta[).$$

Задача II(M, N)**.** Найти множество всех позиций $(t^*, x^*) \in N$, для каждой из которых

$$\exists (V, \beta, m) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}^*_{t^*} \times \mathbb{N}\ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; V; \beta; m]\ \forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]$$
$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \Longrightarrow (\exists t \in [t^*, \vartheta[\colon (t, x(t)) \notin N).$$

Обе постановки касаются построения множеств разрешимости в соответствующих задачах (M, N)-сближения и (M, N)-уклонения. Задачи I(M, N) и II(M, N) являются аналогами задач § 2 (см. (2.3), (2.4)).

§ 5. Окрестности множеств

Напомним, что $\mathbb{R}^n$ есть фазовое пространство системы (2.1), (2.2), $T = [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0$, $T \times \mathbb{R}^n$ — пространство позиций, оснащаемое далее метрикой

$$\rho \colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

определяемой условием: $\forall (t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n\ \forall (t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \overset{\triangle}{=} \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) \tag{5.1}$$

(наибольшее из двух чисел $|t_1 - t_2|$, $\|x_1 - x_2\|$). Метрическая топология на $T \times \mathbb{R}^n$, соответствующая метрике ρ (5.1), есть, конечно, обычная топология $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости (конечно, выбор именно метрики (5.1) необязателен). Тогда

$$\mathcal{F} \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n))$$

есть семейство замкнутых в традиционном смысле п/м $T \times \mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}' \overset{\triangle}{=} \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$.

Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\rho(z; H) \overset{\triangle}{=} \inf(\{\rho(z, h) \colon h \in H\}) \in \mathbb{R}_+$ есть обычное расстояние от позиции до множества. Для множества $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ определена равномерно непрерывная функция расстояния $\rho(\cdot; H) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ вида

$$z \longmapsto \rho(z; H) \colon T \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+;$$

сопоставляем H и числу $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ множество

$$S_0(H, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in T \times \mathbb{R}^n | \rho(z; H) \leqslant \varepsilon\} = \rho(\cdot; H)^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathcal{F}', \tag{5.2}$$

где при $\varepsilon > 0$ (5.2) есть замкнутая окрестность H, а $S_0(H, 0)$ — замыкание H в топологии $\mathbf{t}$. При $F \in \mathcal{F}'$ имеем равенство $S_0(F, 0) = F$.

Рассмотрим другое оснащение $T \times \mathbb{R}^n$, полагая, что $\tau_\partial \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(T)$, а $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$ (конечно, $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ — топология на $\mathbb{R}^n$, порожденная нормой $\|\cdot\|$). Через $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ обозначаем естественную (метризуемую) топологию на $T \times \mathbb{R}^n$, отвечающую стандартному произведению ТП (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$; см. [39, раздел 2.3]. Семейство

$$\mathfrak{F} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}] \tag{5.3}$$

(всех) множеств, замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, допускает простое описание в терминах сечений п/м $T \times \mathbb{R}^n$. Итак, если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то в виде

$$H\langle t \rangle \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | (t, x) \in H\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

имеем t-сечение H. Тогда, как легко видеть,

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) | F\langle t \rangle \in \mathbf{F} \ \forall t \in T\}, \tag{5.4}$$

где $\mathbf{F} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ (семейство всех замкнутых п/м $\mathbb{R}^n$). Итак, $\mathfrak{F}$ — семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, имеющих замкнутые сечения. При $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем, что

$$(\|\cdot\| - \inf)[x; S] \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\|x - s\| \colon s \in S\}).$$

Тогда для $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ в виде $(\|\cdot\| - \inf)[\cdot; S]$, т. е. в виде

$$x \longmapsto (\|\cdot\| - \inf)[x; S] \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

имеем функцию расстояния до S и при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ полагаем, что

$$B_n^0(S, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | \ (\|\cdot\| - \inf)[x; S] \leqslant \varepsilon\}; \tag{5.5}$$

ясно, что $B_n^0(S, \varepsilon) \in \mathbf{F}'$, где (здесь и ниже) $\mathbf{F}' \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$. Наконец, если $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\mathrm{Supp}(\Lambda) \stackrel{\triangle}{=} \{t \in T | \Lambda\langle t \rangle \neq \varnothing\}; \tag{5.6}$$

при $\xi \in \mathrm{Supp}(\Lambda)$ имеем $\Lambda\langle \xi \rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и определены множества $B_n^0(\Lambda\langle \xi \rangle, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. С учетом (5.5), (5.6) полагаем, что при $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon) = \{(t, x) \in \mathrm{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n | x \in B_n^0(H\langle t \rangle, \varepsilon)\}; \tag{5.7}$$

ясно, что $\mathbb{S}(H, \varepsilon) \in \mathfrak{F}$, при этом, конечно,

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon)\langle \tau \rangle = B_n^0(H\langle \tau \rangle, \varepsilon) \ \ \forall \tau \in \mathrm{Supp}(H). \tag{5.8}$$

Если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то истинна импликация

$$(H\langle t \rangle \neq \varnothing \ \ \forall t \in T) \Longrightarrow (\mathrm{Supp}(H) = T). \tag{5.9}$$

С учетом (5.6) и (5.9) полагаем, что

$$\mathcal{P}''(T\times\mathbb{R}^n)\triangleq\{\Lambda\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)|\Lambda\langle t\rangle\neq\varnothing\ \forall t\in T\}= \\ =\{\Lambda\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n)|\Lambda\langle t\rangle\neq\varnothing\ \forall t\in T\}. \quad (5.10)$$

При $\Lambda\in\mathcal{P}''(T\times\mathbb{R}^n)$ и $t\in T$ непременно $\Lambda\langle t\rangle\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ определено множество $B_n^0(\Lambda\langle t\rangle,\varepsilon)$. Из (5.7) и (5.10) вытекает, что при $H\in\mathcal{P}''(T\times\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{S}(H,\varepsilon)=\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n|x\in B_n^0(H\langle t\rangle,\varepsilon)\}. \quad (5.11)$$

Заметим, что при $S\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ функция $(\|\cdot\|-\inf)[\cdot;S]$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n$; более того (см. [40, (2.7.14)]) $\forall x_1\in\mathbb{R}^n\ \forall x_2\in\mathbb{R}^n$

$$|(\|\cdot\|-\inf)[x_1;S]-(\|\cdot\|-\inf)[x_2;S]|\leqslant\|x_1-x_2\|.$$

Напомним, что элементы $\mathbb{R}_+$ у нас не являются множествами (соглашение, принятое, чтобы избежать «двойных» толкований традиционных обозначений). Тогда, как обычно, при $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$

$$((\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\varepsilon)\iff(((\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow\varepsilon)\&(\varepsilon_{k+1}\leqslant\varepsilon_k\ \ \forall k\in\mathbb{N})). \quad (5.12)$$

Из (5.2) и (5.12) вытекает, что $\forall(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+$

$$((\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\varepsilon)\Longrightarrow((S_0(H,\varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow S_0(H,\varepsilon)\ \forall H\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n)). \quad (5.13)$$

Аналогичным свойством обладают множества (5.7): если $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, то (см. (5.8))

$$((\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\varepsilon)\Longrightarrow((\mathbb{S}(H,\varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\mathbb{S}(H,\varepsilon)\ \ \forall H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)). \quad (5.14)$$

Итак, имеем полезные свойства (5.13), (5.14), которые существенно используются при последующем исследовании релаксаций задачи сближения. Отметим, что (см. [10, (5.4)])

$$\mathcal{F}\subset\mathfrak{F}. \quad (5.15)$$

Полагаем также, что $\mathfrak{F}'\triangleq\mathfrak{F}\setminus\{\varnothing\}$. Итак, в виде $\mathcal{F}'$ и $\mathfrak{F}'$ имеем непустые семейства непустых п/м $T\times\mathbb{R}^n$.

§ 6. Метод программных итераций

В дальнейшем используем вариант метода программных итераций (МПИ), называемый итерациями стабильности. Введем операторы стабильности: при $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ оператор $\mathbb{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, определяем условием

$$\mathbb{A}[M](H)\triangleq\{(t,x)\in H|\forall v\in Q\ \exists\mathbf{x}(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t,x,v)\ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]: \\ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in M)\&((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in H\ \forall\xi\in[t,\vartheta[)\}\ \ \forall H\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n). \quad (6.1)$$

Общие свойства операторов (6.1) подробно обсуждаются в [30, 31], а сейчас отметим лишь некоторые. Так в силу (6.1) имеем совокупную изотонность: $\forall M_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ $\forall H_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\ \forall M_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\ \forall H_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$

$$((M_1\subset M_2)\&(H_1\subset H_2))\Longrightarrow(\mathbb{A}[M_1](H_1)\subset\mathbb{A}[M_2](H_2)). \quad (6.2)$$

Кроме того (см. [31, предложение 4.2]), имеем следующее свойство:

$$\mathbb{A}[M](F)\in\mathfrak{F}\ \ \forall M\in\mathcal{F}\ \forall F\in\mathfrak{F}. \quad (6.3)$$

Итак, при $M \in \mathcal{F}$ семейство $\mathfrak{F}$ является инвариантным подпространством оператора (6.1). Отметим аналог «совокупной» секвенциальной непрерывности: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом

$$((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M)\&((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F), \tag{6.4}$$

то $M \in \mathcal{F},\ F \in \mathfrak{F}$ и при этом

$$(\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F); \tag{6.5}$$

существенна импликация (6.4) $\Longrightarrow$ (6.5). Рассмотрим естественные итерационные процедуры на основе (6.1). Итак, при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ рассматриваем последовательность $(\mathcal{W}_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0}$ в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, для которой

$$(\mathcal{W}_0(M,N) \triangleq N)\&(\mathcal{W}_{s+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M,N))\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0); \tag{6.6}$$

полагаем также в рассматриваемом случае множеств M и N, что

$$\mathcal{W}(M,N) \triangleq \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M,N). \tag{6.7}$$

При этом (см. (6.3), [31, предложения 5.1,5.2]) реализуются свойства: если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то

$$(\mathcal{W}_k(M,N) \in \mathfrak{F}\ \forall k \in \mathbb{N}_0)\&(\mathcal{W}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M,N)) \in \mathfrak{F}). \tag{6.8}$$

Итак, в «разумных» случаях наши итерационные последовательности и их пределы реализуются в $\mathfrak{F}$. С учетом (6.5) легко проверяется (см. [31, предложение 5.3, следствие 5.2]), что при $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$

$$\begin{gathered}(((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M)\&((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N)) \Longrightarrow ((\mathcal{W}_s(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M,N) \\ \forall s \in \mathbb{N}_0)\&((\mathcal{W}(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M,N))).\end{gathered} \tag{6.9}$$

В силу (6.1), (6.6) и (6.7) имеем при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n),\ N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $s \in \mathbb{N}_0$, что

$$\mathcal{W}(M,N) \subset \mathcal{W}_{s+1}(M,N) \subset \mathcal{W}_s(M,N). \tag{6.10}$$

Свойства (6.8)–(6.10) используются в дальнейшем без дополнительных пояснений. Легко видеть, что при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$(M \cap N \subset \mathcal{W}_k(M,N)\ \forall k \in \mathbb{N}_0)\&(M \cap N \subset \mathcal{W}(M,N)).$$

Отметим очевидное следствие (6.2). Итак (см. [31, § 5]), $\forall M_1 \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\ \forall N_1 \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ $\forall M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \forall N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\begin{gathered}((M_1 \subset M_2)\&(N_1 \subset N_2)) \Longrightarrow ((\mathcal{W}_s(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}_s(M_2,N_2) \\ \forall s \in \mathbb{N}_0)\&(\mathcal{W}(M_1,N_1) \subset \mathcal{W}(M_2,N_2))).\end{gathered} \tag{6.11}$$

§ 7. Одна «несимметричная» альтернатива

Обсудим один из вариантов применения МПИ на основе (6.6). Всюду в дальнейшем фиксируем множества

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F}')\&(\mathbf{N} \in \mathfrak{F}'); \tag{7.1}$$

в (7.1) имеем соответственно ЦМ игрока I и множество, определяющее его ФО. Для множеств (7.1) определена (см. (6.6), (6.8)) итерационная последовательность

$$(\mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N}))_{k\in\mathbb{N}_0}\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathfrak{F}, \tag{7.2}$$

а также ее предел (см. (6.7), (6.8))

$$\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N}) \in \mathfrak{F}. \tag{7.3}$$

Отметим, что согласно [10, теорема 10.1] и свойствам [41, § 11]

$$\begin{gathered}\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n | \exists\alpha\in\tilde{A}_t\ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathbb{X}[t;x;\alpha]\ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]\colon \\ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\&((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in\mathbf{N}\ \forall\xi\in[t,\vartheta[)\} = \{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n| \\ \exists\alpha\in\tilde{A}_t^{\Pi}\ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathbb{X}[t;x;\alpha]\ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\&((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in\mathbf{N}\ \forall\xi\in[t,\vartheta[)\}\end{gathered} \tag{7.4}$$

З а м е ч а н и е 1. В связи с (7.4) и применением [10, теорема 10.1] отметим, что (в [10]) свойство, подобное (7.4), обосновано, строго говоря, для предела другой итерационной процедуры (см. [10, раздел 6]). Однако упомянутый предел (см. [10, (6.2)]) совпадает с (6.7) при $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathfrak{F}$. Данное свойство отмечено в [41, § 11] (см. также [19, гл. V, § 4] для случая $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathcal{F}$). В связи с положениями [41, § 11] отметим [41, лемма 10.1], имея в виду следующее простое рассуждение. Свойство неподвижной точки, отмеченное в (6.8), является по сути стабильностью в смысле Н. Н. Красовского (см. [14, § 39], а также [1, 2]). Для нас важна «стабильность по постоянным управлениям» из множества Q. Из этого свойства легко следует «стабильность по управлениям из множеств» $\mathcal{V}_t$, $t\in T$. Но при $t\in T$ управления из $\mathcal{V}_t$ образуют при погружении в $\mathcal{E}_t$ всюду плотное множество в (относительной) *-слабой топологии. Поэтому (см. [41, лемма 10.1]) мы получаем «стабильность по ОУ» из $\mathcal{E}_t$, т. е. свойство, определяемое в [10, предложение 6.1]. Это позволяет применить в (7.4) рассуждение [10, теорема 10.1]. Итак, (7.4) — множество успешной разрешимости задачи $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-наведения, т. е. решение задачи $\mathrm{I}(\mathbf{M},\mathbf{N})$.

Обратимся теперь к задаче $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-уклонения, используя положения [30, 31].

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Множество* $\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$ *есть решение задачи* $\mathrm{II}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, *то есть*

$$\begin{gathered}\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x)\in\mathbf{N}|\exists(V,\beta,m)\in\mathfrak{V}\times\mathbb{G}_t^*\times\mathbb{N}\ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m] \\ \forall\vartheta\in[t,\vartheta_0]\ \ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\Longrightarrow(\exists\xi\in[t,\vartheta[\colon(\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbf{N})\}.\end{gathered} \tag{7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество в правой части (7.5) обозначим через Ω. Требуется установить равенство $\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})=\Omega$. Пусть $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. Согласно (6.7), (6.10) имеем, что $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}_s(\mathbf{M},\mathbf{N})$ для некоторого $s\in\mathbb{N}$. Тогда в силу [30, теорема 9.2] $\exists(V,\beta,m)\in\mathfrak{V}\times\mathbb{G}_{t_*}^*\times\mathbb{N}\ \forall x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;m]\ \forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$

$$((\vartheta,x(\vartheta))\in\mathbf{M})\Longrightarrow(\exists t\in[t_*,\vartheta[\colon(t,x(t))\notin\mathbf{N}).$$

Поэтому $(t_*,x_*)\in\Omega$, чем завершается проверка свойства

$$\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})\subset\Omega. \tag{7.6}$$

Пусть $(t^*,x^*)\in\Omega$. Тогда $(t^*,x^*)\in\mathbf{N}$ и для некоторой стратегии-тройки $(\tilde{V},\tilde{\beta},r)\in\mathfrak{V}\times\mathbb{G}_{t^*}^*\times\mathbb{N}$ имеем $\forall\tilde{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t^*;x^*;\tilde{V};\tilde{\beta};r]\ \forall\vartheta\in[t^*,\vartheta_0]$

$$((\vartheta,\tilde{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\Longrightarrow(\exists t\in[t^*,\vartheta[\colon(t,\tilde{x}(t))\notin\mathbf{N}). \tag{7.7}$$

В частности, имеем, что существуют $V\in\mathfrak{V}$, $\beta\in\mathbb{G}_{t^*}^*$ и $k\in\overline{1,r}$ со свойством: при $\tilde{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t^*;x^*;V;\beta;k]$ и $\vartheta\in[t^*,\vartheta_0]$ истинна импликация (7.7) (достаточно полагать $V=\tilde{V}$, $\beta=\tilde{\beta}$ и $k=r$). В силу [30, теорема 9.2] $(t^*,x^*)\in\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}_r(\mathbf{M},\mathbf{N})$ и, тем более, $(t^*,x^*)\in\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. Итак, $\Omega\subset\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. С учетом (7.6) получаем требуемое равенство. □

Из (7.4) и предложения 7.1 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 7.1. *Если $(t,x)\in N$, то разрешима одна и только одна из следующих двух задач:*

1) $\exists \alpha\in\tilde{A}_t\ \forall \mathbf{x}(\cdot)\in\mathbb{X}[t;x;\alpha]\ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\&((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in\mathbf{N}\ \forall\xi\in[t,\vartheta[)$;

2) $\exists (V,\beta,m)\in\mathfrak{V}\times\mathbb{G}_t^*\times\mathbb{N}\ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m]\ \forall\vartheta\in[t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\Longrightarrow (\exists\xi\in[t,\vartheta[\colon (\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbf{N})$.

Итак (при $\mathbf{M}\in\mathcal{F}'$ и $\mathbf{N}\in\mathfrak{F}'$), имеет место альтернатива, определяемая теоремой 7.1; соответствующее альтернативное разбиение $\mathbf{N}$ определяется множествами $\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$ и $\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, доставляемыми конструктивной процедурой (6.6), (6.7) при $M=\mathbf{M}$ и $N=\mathbf{N}$, т. е. в реализации (7.2), (7.3). Кроме того, отметим, что в случае $(t_*,x_*)\in\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$ конструктивно определяется [10, (10.22), (10.23)] квазипрограмма игрока I, гарантирующая $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-наведение. Если же $(t^*,x^*)\in\mathbf{N}\setminus\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, то в [30, раздел 8] указана структура стратегии-тройки игрока II, гарантирующая $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-уклонение (имеется в виду стратегия «послойного» выталкивания траекторий из множеств-итераций). Отметим, наконец, свойство, определяемое в [30, следствие 9.1] и устанавливающее эквивалентность в вопросах разрешимости задач уклонения и строгого уклонения (уклонения по отношению к некоторым окрестностям множеств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$).

§ 8. Релаксация игровой задачи сближения (общие построения)

В настоящем параграфе мы начинаем исследование вопросов, связанных с ослаблением условий, определяющих окончание игры с точки зрения игрока I (данное исследование продолжает [11, 12]). Фиксируем в дальнейшем множества (7.1), полагая дополнительно, что

$$\mathbf{N}\in\mathcal{P}''(T\times\mathbb{R}^n). \tag{8.1}$$

Это означает с учетом (7.1), что $\mathbf{N}\in\mathfrak{F}'$ и при этом (см. (5.10))

$$\mathbf{N}\langle t\rangle\neq\varnothing\ \ \forall t\in T. \tag{8.2}$$

Фиксируем в последующем изложении параметр $\kappa\in\mathbb{R}_+,\ \kappa\neq 0$. Рассматриваем возможности игрока I в части реализации гарантированного наведения в условиях замены

$$\mathbf{M}\longrightarrow S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\ \mathbf{N}\longrightarrow\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon),$$

где $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ (тривиальный случай $\varepsilon=0$ допускается). Отметим далее одно простое свойство, учитывая то, что согласно (5.11) и (8.1) при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)=\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n|x\in B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\kappa\varepsilon)\}\in\mathfrak{F}. \tag{8.3}$$

Итак, при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ имеем $S_0(\mathbf{M},\varepsilon)\in\mathcal{F}'$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\in\mathfrak{F}'$.

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Справедливо равенство*

$$T\times\mathbb{R}^n=\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)). \tag{8.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение $\mathbf{N}\langle t_*\rangle\in\mathbf{F}'$,

$$(a_*\triangleq\rho((t_*,x_*);\mathbf{M})\in\mathbb{R}_+)\&(b_*\triangleq(\|\cdot\|-\inf)[x_*;\mathbf{N}\langle t_*\rangle]\in\mathbb{R}_+).$$

Ясно, что $(t_*,x_*)\in S_0(\mathbf{M},a_*)$ и, кроме того, $x_*\in B_n^0(\mathbf{N}\langle t_*\rangle,b_*)$. При этом согласно (5.8)

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},b_*)\langle t_*\rangle=B_n^0(\mathbf{N}\langle t_*\rangle,b_*),$$

а тогда $x_* \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, b_*)\langle t_* \rangle$ и в силу (5.3) $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, b_*)$. Итак,

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, a_*) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, b_*). \tag{8.5}$$

Имеем $a_*\kappa \in \mathbb{R}_+$ и $b^* \triangleq \sup(\{a_*\kappa; b_*\}) \in \mathbb{R}_+$; при этом $a_*\kappa \leqslant b^*$ и $b_* \leqslant b^*$. Введем в рассмотрение

$$\beta \triangleq \frac{b^*}{\kappa} \in \mathbb{R}_+; \tag{8.6}$$

тогда $a_* \leqslant \beta$ и $b_* \leqslant \kappa\beta$. При этом $\mathbb{S}(\mathbf{N}, b_*) \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta)$ в силу (5.5) и (5.11). Кроме того, (см. (8.6)) $S_0(\mathbf{M}, a_*) \subset S_0(\mathbf{M}, \beta)$. В итоге

$$S_0(\mathbf{M}, a_*) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, \beta) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta),$$

а тогда в силу (8.5) $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, \beta) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta)$. Но согласно (6.11)

$$S_0(\mathbf{M}, \beta) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \beta), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta)).$$

Тогда $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \beta), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\beta))$ и, тем более,

$$(t_*, x_*) \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено, что

$$T \times \mathbb{R}^n \subset \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \tag{8.7}$$

С другой стороны, имеем в силу (6.6), (6.7), что

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \subset T \times \mathbb{R}^n.$$

С учетом (8.7) получаем требуемое равенство (8.4). □

Если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, то согласно предложению 8.1

$$\Sigma_0(t, x|\kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ | (t, x) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+). \tag{8.8}$$

Далее, из (6.10) и предложения 8.1 получаем следующие равенства:

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.9}$$

Поэтому (см. (8.9)) имеем с очевидностью, что

$$\begin{gathered}\Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ | (t, x) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \\ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \; \forall k \in \mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{8.10}$$

Из (8.8) следует, конечно, что

$$\varepsilon_0(t, x|\kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0(t, x|\kappa)) \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{8.11}$$

Кроме того, из (8.10) вытекает, что определено

$$\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa)) \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \; \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.12}$$

Как обычно, получаем из (8.11) и (8.12), что

$$\begin{aligned}(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \triangleq (\varepsilon_0^{(k)}(t,x|\kappa))_{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]\ \forall k\in\mathbb{N}_0)\\ \&(\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \triangleq (\varepsilon_0(t,x|\kappa))_{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]).\end{aligned} \tag{8.13}$$

Из (6.10) и (8.10) вытекает с очевидностью следующее свойство:

$$\Sigma_0^{(k+1)}(t,x|\kappa) \subset \Sigma_0^{(k)}(t,x|\kappa)\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0\ \forall (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n. \tag{8.14}$$

С учетом (8.11), (8.12) и (8.14) получаем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(t,x|\kappa) \leqslant \varepsilon_0^{(k+1)}(t,x|\kappa)\ \forall k\in\mathbb{N}_0\ \forall (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n. \tag{8.15}$$

Всюду в дальнейшем через $\overset{\leq}{=}$ обозначаем обычную поточечную упорядоченность на $\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$: $\forall g_1\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]\ \forall g_2\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$

$$(g_1 \overset{\leq}{=} g_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (g_1(t,x) \leqslant g_2(t,x)\ \forall (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n). \tag{8.16}$$

Из (8.13), (8.15) и (8.16) вытекает очевидное свойство

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa)\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

П р е д л о ж е н и е 8.2. *Если* $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa). \tag{8.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$ и обозначим множество в правой части (8.17) через Ω. Из (6.10), (8.8) и (8.10) следует, что $\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa)\subset\Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$. Как следствие

$$\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa)\subset\Omega. \tag{8.18}$$

Пусть $\varepsilon_*\in\Omega$. Тогда (см. (8.10)) $\varepsilon_*\in\mathbb{R}_+$ и, кроме того, $\varepsilon_*\in\Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$ при $k\in\mathbb{N}_0$. В силу (8.10) $(t_*,x_*)\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon_*),\mathbb{S}(\mathbb{N},\kappa\varepsilon_*))$ при всех $k\in\mathbb{N}_0$. С учетом (6.7) получаем, что

$$(t_*,x_*)\in\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon_*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon_*)). \tag{8.19}$$

Из (8.8) и (8.19) вытекает, что $\varepsilon_*\in\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa)$. Итак, $\Omega\subset\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa)$, а потому (см. (8.18)) $\Sigma_0(t_*,x_*|\kappa)=\Omega$, что означает справедливость (8.17). □

Из предложения 8.2 вытекает, что (см. (8.11), (8.12))

$$\varepsilon_0^{(k)}(t,x|\kappa) \leqslant \varepsilon_0(t,x|\kappa)\ \forall (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{8.20}$$

Из (8.16) и (8.20) получаем, как следствие, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot|\kappa)\ \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

П р е д л о ж е н и е 8.3. *Если* $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$ *и* $k\in\mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)\in\Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$.

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения в [11, 12] и использует (5.13), (5.14) и (6.9).

С л е д с т в и е 8.1. *Если* $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$ *и* $k\in\mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$ *есть наименьший элемент множества* $\Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (8.12) и предложения 8.3.

П р е д л о ж е н и е 8.4. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$.

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения в [11, 12] и сводится к применению (5.13), (5.14) и (6.9).

С л е д с т в и е 8.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$ *есть наименьший элемент множества* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (8.12) и предложения 8.4. В силу (8.20) $\{\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t, x|\kappa)])$ $\forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Поэтому при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa) = \sup(\{\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\}) \in [0, \varepsilon_0(t, x|\kappa)].$$

П р е д л о ж е н и е 8.5. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество

$$\Sigma \overset{\triangle}{=} \{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\}.$$

При $\varepsilon^* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+$ имеем свойство $\Sigma \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon^*])$. Тогда

$$\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \sup(\Sigma) \in [0, \varepsilon^*]$$

и, в частности, $\varepsilon_* \leqslant \varepsilon^*$. На самом деле здесь имеет место равенство. Действительно, при $l \in \mathbb{N}_0$ имеем в силу (8.10) и предложения 8.3, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_l(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa))), \tag{8.21}$$

где $\varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa) \leqslant \varepsilon_*$, а потому (см. (5.2), (5.5), (5.7))

$$(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa)) \subset S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*))\&(\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa)) \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{8.22}$$

Как следствие (см. (6.11), (8.22)) получаем, что

$$\mathcal{W}_l(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0^{(l)}(t_*, x_*|\kappa))) \subset \mathcal{W}_l(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)),$$

а потому (см. (8.21)) $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_l(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Поскольку выбор l был произвольным, установлено, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

С учетом (6.7) имеем включение $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$, а тогда в силу (8.8) $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$ и согласно (8.11) $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_*$. В итоге $\varepsilon_* = \varepsilon^*$. $\square$

С л е д с т в и е 8.3. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *является точной верхней гранью множества*

$$\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\}$$

в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \overset{\leq}{=})$.

Доказательство очевидно. Отметим, что согласно (8.15) и предложению 8.5 при $(t, x) \in$ $\in T \times \mathbb{R}^n$

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa))_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon_0(t, x|\kappa) \tag{8.23}$$

(в (8.23) имеется в виду обычная монотонная сходимость числовой последовательности).

§ 9. Последовательность функций позиции

Функции (8.13) были определены в терминах множеств (8.8), (8.10), т. е. в терминах итерационных процедур вида (6.6). Ниже рассматривается способ непосредственного построения этих функций. В этих построениях потребуются некоторые простые представления, связанные с (8.8)–(8.13). Отметим сначала, что множества (8.8), (8.10) являются лучами.

П р е д л о ж е н и е 9.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa), \infty[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Из следствия 8.1 имеем, что $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \subset [\varepsilon_*, \infty[$, где $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$. Осталось установить противоположное вложение. Пусть $\bar{\varepsilon} \in [\varepsilon_*, \infty[$, т. е. $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$ и при этом $\varepsilon_* \leqslant \bar{\varepsilon}$. Тогда в силу (6.11) имеем, что

$$\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \subset \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \bar{\varepsilon}), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\bar{\varepsilon})). \tag{9.1}$$

Вместе с тем согласно следствию 8.1 $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$, а потому (см. (8.10)) $(t_*, x_*) \in \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Тогда в силу (9.1)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \bar{\varepsilon}), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\bar{\varepsilon})),$$

а потому (см. (8.10)) $\bar{\varepsilon} \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$. Итак, имеем, что $[\varepsilon_*, \infty[\subset \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$, а потому $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_*, \infty[$, откуда следует доказываемое утверждение. □

Совершенно аналогично устанавливается следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 9.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa), \infty[$.

П р е д л о ж е н и е 9.3. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то*

$$\begin{aligned}(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \\ = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))).\end{aligned} \tag{9.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $b \in \mathbb{R}_+$. Для доказательства первого положения в (9.2) фиксируем, кроме того, $k \in \mathbb{N}_0$. Из (8.10) вытекает, что при $(t, x) \in \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))$ непременно $b \in \Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa)$, а, стало быть (см. (8.12)), $\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa) \leqslant \leqslant b$; в итоге $(t, x) \in \varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b])$. Следовательно,

$$\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \subset \varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]). \tag{9.3}$$

Пусть $(t^*, x^*) \in \varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b])$, т. е. $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и при этом $\varepsilon_0^{(k)}(t^*, x^*|\kappa) \in \in [0, b]$, т. е. $\varepsilon_0^{(k)}(t^*, x^*|\kappa) \leqslant b$. Поэтому $b \in [\varepsilon_0^{(k)}(t^*, x^*|\kappa), \infty[$ и согласно предложению 9.1 $b \in \Sigma_0^{(k)}(t^*, x^*|\kappa)$, а потому (см. (8.10)) $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))$. Итак,

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \subset \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)),$$

а тогда с учетом (9.3) получаем равенство $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))$. Первое положение в (9.2) установлено. Доказательство второго положения аналогично. □

Напомним, что согласно (6.8) при $b \in \mathbb{R}_+$

$$(\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \in \mathfrak{F} \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \in \mathfrak{F}); \tag{9.4}$$

см. также (5.2) и (8.3). Поэтому из предложения 9.3 имеем (см. (9.4)), что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+ \ \forall k \in \mathbb{N}_0)\&(\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0,\tilde{b}]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall \tilde{b} \in \mathbb{R}_+). \tag{9.5}$$

Напомним (5.3). Тогда получаем в виде

$$\mathfrak{M} \overset{\triangle}{=} \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] | g^{-1}([0,h]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall h \in \mathbb{R}_+\} \tag{9.6}$$

множество всех полунепрерывных снизу в/з неотрицательных функций на ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Из (9.5) и (9.6) вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0)\&(\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}). \tag{9.7}$$

Для большей краткости в обозначениях полагаем далее, что

$$\Psi \overset{\triangle}{=} \rho(\cdot;\mathbf{M}) = (\rho(z;\mathbf{M}))_{z \in T \times \mathbb{R}^n};$$

тогда $\Psi \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ и при этом

$$\Psi(t,x) = \rho((t,x);\mathbf{M}) \ \ \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{9.8}$$

Функция Ψ непрерывна на $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ и, в частности, в силу (5.15)

$$\Psi^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F}' \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+. \tag{9.9}$$

Ниже используются обычные поточечные операции в $\mathbb{R}^{T \times \mathbb{R}^n}$. С учетом этого имеем, что

$$\zeta \overset{\triangle}{=} \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x;\mathbf{N}\langle t \rangle])_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$$

есть произведение скаляра $\frac{1}{\kappa}$ и в/з функции

$$(t,x) \longmapsto (\|\cdot\| - \inf)[x;\mathbf{N}\langle t \rangle] \colon T \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Итак, получаем, что $\zeta \colon T \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ и при этом

$$\zeta(t,x) = \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x;\mathbf{N}\langle t \rangle] \ \ \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{9.10}$$

П р е д л о ж е н и е 9.4. *Если $b \in \mathbb{R}_+$, то $\zeta^{-1}([0,b]) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$.*

Доказательство следует из определений. Отметим, что (см. построения из § 5 и предложение 9.4).

$$\zeta^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+. \tag{9.11}$$

По свойствам семейства $\mathfrak{F}$ (см. § 5) имеем из (9.9) и (9.11), что

$$\Psi^{-1}([0,b]) \cap \zeta^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+. \tag{9.12}$$

С учетом (9.12) получаем, что

$$\psi_\kappa \overset{\triangle}{=} (\sup(\{\Psi(z);\zeta(z)\}))_{z \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathfrak{M}. \tag{9.13}$$

Итак, $\psi_\kappa \colon T \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ есть функция, для которой

$$\psi_\kappa(t,x) = \sup(\{\Psi(t,x);\zeta(t,x)\}) \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \tag{9.14}$$

(в силу (9.14) ψ_κ есть точная верхняя грань в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \overset{\leq}{=})$ неупорядоченной пары $\{\Psi;\zeta\}$). Напомним теперь, что согласно следствию 8.3

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot|\kappa) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{9.15}$$

П р е д л о ж е н и е 9.5. *Справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa) = \zeta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (6.6) имеем свойство

$$\mathcal{W}_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{9.16}$$

При этом согласно предложению 9.1, (8.10) и (9.16) получаем, что $\forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_0^{(0)}(t, x|\kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ | (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} = [\varepsilon_0^{(0)}(t, x|\kappa), \infty[\ \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+). \tag{9.17}$$

В силу (8.12) имеем, в частности, что

$$\varepsilon_0^{(0)}(t, x|\kappa) = \inf(\Sigma_0^{(0)}(t, x|\kappa)) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{9.18}$$

Фиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, получая при $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+$ цепочку равенств (см. (9.17), (9.18))

$$\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ | (t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} = [\varepsilon_*, \infty[. \tag{9.19}$$

В частности, $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa)$, а потому с учетом (9.19) имеем включение

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \tag{9.20}$$

Из (8.3) и (9.20) получаем, что $x_* \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t_*\rangle, \kappa\varepsilon_*)$, где $\mathbf{N}\langle t_*\rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. С учетом (5.5) получаем, что

$$(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \leqslant \kappa\varepsilon_*.$$

Как следствие (см. (9.10)) имеем следующее очевидное неравенство:

$$\zeta(t_*, x_*) = \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \leqslant \varepsilon_*. \tag{9.21}$$

С другой стороны, из (5.5) имеем для $\delta_* \triangleq (\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \in \mathbb{R}_+$ свойство $x_* \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t_*\rangle, \delta_*)$. Согласно (5.11) и (8.1) $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \delta_*)$. С учетом (9.19) получаем, что

$$\frac{\delta_*}{\kappa} \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa)$$

и, как следствие, имеем следующее неравенство:

$$\varepsilon_* \leqslant \frac{\delta_*}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] = \zeta(t_*, x_*), \tag{9.22}$$

где учтено (9.10). Из (9.21) и (9.22) получаем цепочку равенств $\zeta(t_*, x_*) = \varepsilon_* = \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa)$. Поскольку выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, требуемое совпадение двух функций установлено. □

П р е д л о ж е н и е 9.6. *Функция* ψ_κ *мажорирует* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$: $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \psi_\kappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b_* \triangleq \Psi(t_*, x_*)$ и

$$c_* \triangleq (\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] = \kappa\zeta(t_*, x_*).$$

Тогда (см. (5.2), (9.8)) $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)$, а из (5.5) вытекает, что $x_* \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t_*\rangle, c_*)$. Как следствие получаем (см. (8.3)) включение $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*)$ и, в итоге,

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*). \tag{9.23}$$

Введем в рассмотрение следующие значения

$$a_* \triangleq \frac{1}{\kappa} c_* = \zeta(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+, \ d_* \triangleq \sup(\{a_*; b_*\}) \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда $S_0(\mathbf{M}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, d_*)$ и, кроме того, $c_* = \kappa a_* \leqslant \kappa d_*$, а потому $\mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*) \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)$. Из (9.23) имеем теперь включение

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, d_*) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*), \tag{9.24}$$

где $S_0(\mathbf{M}, d_*) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, d_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*))$ (см. (6.11)). Поэтому в силу (9.24)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, d_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)).$$

Тогда согласно (8.8) $d_* \in \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$, а потому (см. (8.11)) $\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \leqslant d_*$, где $d_* = \sup(\{\Psi(t_*, x_*); \zeta(t_*, x_*)\})$. С учетом (9.14) получаем равенство $d_* = \psi_\kappa(t_*, x_*)$, а потому $\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \leqslant \psi_\kappa(t_*, x_*)$. Поскольку позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, установлено, что $\varepsilon_0(t, x | \kappa) \leqslant \psi_\kappa(t, x) \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Иными словами, $\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa$ (см. (8.16)). $\square$

Из предложения 9.6 и следствия 8.3 вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{9.25}$$

Итак, мы получили (см. (9.25), предложение 9.6), что

$$\psi_\kappa \in \mathfrak{M} \colon (\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa). \tag{9.26}$$

Отметим здесь же, что (см. (9.15), следствие 8.3, предложение 9.5)

$$\zeta \stackrel{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot | \kappa). \tag{9.27}$$

Введем в рассмотрение следующее множество функций:

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} | g \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa\}; \tag{9.28}$$

ясно, что (см. (9.26), (9.28)) $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}_\psi$. Далее, из (9.7), (9.26) и (9.28) получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \tag{9.29}$$

§ 10. Вспомогательные функционалы качества

В настоящем параграфе вводится специальный тип платежных функционалов, для которых затем будут рассматриваться задачи на минимакс в классе квазистратегий. Сначала введем ряд вспомогательных понятий и одно дополнительное (и не ограничительное) условие на множество $\mathbf{N}$.

Условие 10.1. (квазиограниченность $\mathbf{N}$). Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ \colon \mathbb{B}_n(c) \cap \mathbf{N}\langle t \rangle \neq \varnothing \ \ \forall t \in T.$$

С учетом условия 10.1 фиксируем число $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+$ со свойством

$$\mathbb{B}_n(\mathbf{c}) \cap \mathbf{N}\langle t \rangle \neq \varnothing \ \ \forall t \in T. \tag{10.1}$$

Если $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то $t \longmapsto \|x(t)\| \colon [t_*, \vartheta_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ есть непрерывная функция, для которой определен максимум; если при этом $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, то при $y \in \mathbf{N}\langle \tau \rangle \cap \mathbb{B}_n(\mathbf{c})$

$$(\| \cdot \| - \inf)[x(\tau); \mathbf{N}\langle \tau \rangle] \leqslant \|x(\tau) - y\| \leqslant \|x(\tau)\| + \| - y\| = \|x(\tau\| + \|y\| \leqslant \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}.$$

С учетом (10.1) имеем поэтому при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, что

$$(\|\cdot\| - \inf)[x(\tau); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c} \;\; \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{10.2}$$

Здесь же отметим, что в силу непрерывности Ψ при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ функция

$$t \longmapsto \Psi(t, x(t)) \colon [t_*, \vartheta_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \tag{10.3}$$

непрерывна. Напомним (9.10). Тогда согласно (10.2) при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$\zeta(\tau, x(\tau)) = \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x(\tau); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \frac{1}{\kappa}[\max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}] \;\; \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{10.4}$$

Далее, полагаем, что при $t \in T$ отображение

$$\mathbb{I}_t \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{[t,\vartheta_0]} \tag{10.5}$$

определяется следующими условиями

$$(\mathbb{I}_t(t) \triangleq \{t\})\&(\mathbb{I}_t(\vartheta) \triangleq [t, \vartheta[\;\; \forall \vartheta \in]t, \vartheta_0]). \tag{10.6}$$

Получаем, что при $t_* \in T,\ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup(\{\Psi(\vartheta, x(\vartheta)); \sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta(t, x(t))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{10.7}$$

Тогда, как следствие, имеем при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$(\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta))_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \in \mathcal{R}_+[[t_*, \vartheta_0]]. \tag{10.8}$$

Легко видеть, что имеет место следующее свойство

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), t_*) = \psi_\kappa(t_*, x(t_*)) \;\; \forall t_* \in T\ \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]).$$

С учетом (10.8) полагаем, что при $t_* \in T$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \triangleq (\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta))_{x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])]. \tag{10.9}$$

Согласно (10.9) при $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \colon C_n([t_*, \vartheta_0]) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ таков, что $\forall x(\cdot) \in$ $\in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta). \tag{10.10}$$

Если $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$, то полагаем, что

$$\|x(\cdot)\|_t^{(\mathbf{C})} \triangleq \max_{\tau\in[t,\vartheta_0]} \|x(\tau)\|.$$

Разумеется, при $t \in T$ в виде отображения

$$x(\cdot) \longmapsto \|x(\cdot)\|_t^{(\mathbf{C})} \colon C_n([t, \vartheta_0]) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

обозначаемого кратко через $\|\cdot\|_t^{(\mathbf{C})}$, имеем обычную норму равномерной сходимости, порождающую топологию равномерной сходимости на $C_n([t, \vartheta_0])$ с поточечно определяемыми линейными операциями.

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Если $t_* \in T$, то семейство всех функционалов*

$$x(\cdot) \longmapsto \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \colon C_n([t_*, \vartheta_0]) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

при переборе $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ равностепенно равномерно непрерывно на $(C_n([t_*, \vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})})$: $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[\ \forall x_1(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])\ \forall x_2(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta) \Longrightarrow (|\omega(t_*, x_1(\cdot), \vartheta) - \omega(t_*, x_2(\cdot), \vartheta)| < \varepsilon\ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]).$$

Доказательство легко следует из свойства 1-липшицевости функции расстояния от точки до (непустого) множества в метрическом пространстве (см. [40, (2.7.14)]).

П р е д л о ж е н и е 10.2. *Если $t_* \in T$, то функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ (10.9) непрерывен на пространстве $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости: $\forall (x_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \in C_n([t_*, \vartheta_0])^{\mathbb{N}}$ $\forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$*

$$((x_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x(\cdot)) \Longrightarrow ((\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_i(\cdot)))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t_* \in T$. Выберем произвольно последовательность $(\mathbf{x}_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \in C_n([t_*, \vartheta_0])^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ со свойством

$$(\mathbf{x}_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbf{x}(\cdot). \tag{10.11}$$

В силу (10.11) имеем, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\|\mathbf{x}_j(\cdot) - \mathbf{x}(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta\ \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{10.12}$$

Пусть $\bar{\varepsilon} \in]0, \infty[$. Согласно предложению 10.1 для некоторого $\bar{\delta} \in]0, \infty[$ имеет место свойство: $\forall x'(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])\ \forall x''(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$(\|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \bar{\delta}) \Longrightarrow (|\omega_\kappa(t_*, x'(\cdot), \vartheta) - \omega_\kappa(t_*, x''(\cdot), \vartheta)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]). \tag{10.13}$$

С учетом (10.12) подберем $r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|\mathbf{x}_j(\cdot) - \mathbf{x}(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \bar{\delta}\ \ \forall j \in \overrightarrow{r, \infty}.$$

Пусть $l \in \overrightarrow{r, \infty}$. Тогда с учетом (10.13) получаем свойство

$$|\omega_\kappa(t_*, \mathbf{x}_l(\cdot), \vartheta) - \omega_\kappa(t_*, \mathbf{x}(\cdot), \vartheta)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Как следствие получаем (см. (10.10)) весьма очевидное неравенство

$$|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}_l(\cdot)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot))| \leqslant \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < \bar{\varepsilon}.$$

Поскольку $l \in \overrightarrow{r, \infty}$ выбиралось произвольно, требуемое свойство установлено:

$$(\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}_i(\cdot)))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)).$$

$\square$

§ 11. Минимакс в классе квазистратегий

Рассмотрим далее задачи на минимакс функционалов (10.9) в классах квазистратегий, имея в виду всякий раз случай фиксированной начальной позиции. Однако сначала напомним некоторые важные общие положения [10], связанные с решением задачи игрока I в классе квазистратегий. Напомним, что [10, (10.22)] при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$, $(t,x) \in N$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu | M, N\rangle \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \Pi_t(\nu) | \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0]:$$
$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in \mathcal{W}(M,N)\ \forall \xi \in [t, \vartheta[)\}$$

(учитываем замечание 1 в § 7). При этом, однако, в случае $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и $(t,x) \in \in \mathcal{W}(M,N)$

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \cdot | M, N\rangle \overset{\triangle}{=} (\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu | M, N\rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \tilde{A}^{\Pi}_t \tag{11.1}$$

(учитываем [10, предложение 10.3] и замечание 1 в § 7). Далее, напомним [10, (10.20)]:

$$\mathcal{S}_{M,N}(t,x) \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t | \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0]: \tag{11.2}$$
$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N\ \forall \xi \in [t, \vartheta[)\}\ \forall M \in \mathcal{F}\ \forall N \in \mathfrak{F}\ \forall (t,x) \in N.$$

Согласно [10, следствие 10.2] при $M \in \mathcal{F},\ N \in \mathfrak{F}$ и $(t,x) \in \mathcal{W}(M,N)$

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu | M, N\rangle \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x). \tag{11.3}$$

Итак, (11.1)–(11.3) определяют конкретный вариант квазипрограммы игрока I, гарантирующей реализацию (M,N)-сближения. В этой же связи напомним (7.4) и более общий вариант [10, теорема 10.1]: с учетом замечания 1 в § 7

$$\mathcal{W}(M,N) = \{(t,x) \in N | \exists \alpha \in \tilde{A}_t: \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\} = \{(t,x) \in N | \exists \alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_t:$$
$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\}\ \forall M \in \mathcal{F}\ \forall N \in \mathfrak{F}. \tag{11.4}$$

В силу (4.5) и предложения 10.2 имеем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ функционал

$$\eta \longmapsto \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \colon \mathcal{H}_{t_*} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \tag{11.5}$$

непрерывен; в силу *-слабой компактности $\mathcal{H}_{t_*}$ функционал (11.5) ограничен. Поэтому (см. (4.7)) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ определено (конечное) значение

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+ \tag{11.6}$$

(если $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то sup в (11.6) можно заменить на max). С учетом этого получаем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, что

$$\mathbf{v}(t_*, x_*) \overset{\triangle}{=} \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+ \tag{11.7}$$

(ниже будет показано, что в (11.7) inf можно заменить на min); ясно, что

$$\mathbf{v}(t_*, x_*) \leqslant \inf_{\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)). \tag{11.8}$$

Поскольку согласно (8.8) и предложению 8.4 при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa))), \tag{11.9}$$

определена (см. (11.1)) следующая квазипрограмма

$$\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*) \overset{\triangle}{=} \pi^{(W)}_{t_*, x_*}\langle \cdot | S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa))\rangle \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}. \tag{11.10}$$

П р е д л о ж е н и е 11.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда имеем (11.10) и при этом (см. (11.3), (11.9))

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)(\nu) \subset \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)}(t_*, x_*), \tag{11.11}$$

где $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \in \mathbb{R}_+$. В силу (4.7), (11.9) и (11.11)

$$\begin{gathered} \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)] \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \& ((t, x(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \end{gathered} \tag{11.12}$$

Поэтому (см. (5.2), (8.3), (9.8), (11.12)) имеем, что

$$\begin{gathered} \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)] \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant \varepsilon_*) \& ((\| \cdot \| - \inf)[x(t); \mathbf{N}\langle t \rangle] \leqslant \kappa\varepsilon_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \end{gathered} \tag{11.13}$$

С учетом (9.10) и (11.13) получаем очевидное следствие

$$\begin{gathered} \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)] \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant \varepsilon_*) \& (\zeta(t, x(t)) \leqslant \varepsilon_* \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \end{gathered}$$

Пусть $\bar{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]$. Тогда, в частности, $\bar{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и при этом для некоторого $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ реализуются свойства:

$$\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant \varepsilon_* \tag{11.14}$$

и, вместе с тем, имеет место система неравенств

$$\zeta(t, \bar{x}(t)) \leqslant \varepsilon_* \ \ \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[. \tag{11.15}$$

Тогда $(\bar{\vartheta} = t_*) \vee (\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0])$. Оба упомянутых случая рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала у нас $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда (см. (10.6)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$. По выбору $\bar{x}(\cdot)$ имеем равенство $\bar{x}(t_*) = x_*$. Тогда (см. (11.14))

$$\Psi(t_*, x_*) = \Psi(t_*, \bar{x}(t_*)) = \Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant \varepsilon_*. \tag{11.16}$$

Кроме того (см.(6.10),(11.9)), имеем свойство

$$(t_*, \bar{x}(t_*)) = (t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \tag{11.17}$$

Тогда с учетом (5.5), (8.3) и (11.17) получаем неравенство

$$\frac{1}{\kappa}(\| \cdot \| - \inf)[\bar{x}(t_*); \mathbf{N}\langle t_* \rangle] \leqslant \varepsilon_*. \tag{11.18}$$

Из (9.10), (11.18) вытекает в рассматриваемом случае, что

$$\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})} \zeta(t, \bar{x}(t)) \leqslant \varepsilon_*. \tag{11.19}$$

С учетом (10.7), (11.16) и (11.19) получаем теперь, что $\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$. Как следствие (см. (10.10)) $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ в случае 1). Итак, имеем импликацию

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \Longrightarrow (\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*). \tag{11.20}$$

2) Рассмотрим теперь случай $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \vartheta[$. При этом (см. (11.14), (11.15))

$$(\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant \varepsilon_*) \& (\zeta(t, \bar{x}(t)) \leqslant \varepsilon_* \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})). \tag{11.21}$$

Поэтому (см. (10.7), (11.21)) получаем неравенство $\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$ и, тем более, $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ и в случае 2). Итак,

$$(\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*). \tag{11.22}$$

Из (11.20) и (11.22) имеем, что $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор $\bar{x}(\cdot)$ был произвольным, получаем требуемое неравенство

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*.$$

Предложение доказано. □

Из (11.8), (11.10) и предложения 11.1 имеем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, что

$$\mathbf{v}(t_*, x_*) \leqslant \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa).$$

П р е д л о ж е н и е 11.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)[$ *и* $\bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}] \colon b \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{11.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*),\ b$ и $\bar{\alpha}$, упомянутые в условиях предложения. Тогда $b \in \mathbb{R}_+ \colon b < \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)$. Согласно (8.11) $b \notin \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$. Из (8.8) следует, что

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)). \tag{11.24}$$

Покажем, что справедливо (11.23). В самом деле, допустим противное: пусть

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) < b \ \ \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}]. \tag{11.25}$$

Поскольку $\mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}] \neq \varnothing$, выберем и зафиксируем $\bar{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}]$, получая, в частности, что $\bar{x}(t_*) = x_*$ (см. (4.1), (4.2), (4.7)). В силу (11.25) имеем неравенство

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) < b. \tag{11.26}$$

Тогда (см. (10.10), (11.26)) для некоторого $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \vartheta_*) < b. \tag{11.27}$$

Отдельно рассмотрим два возможных случая $(\vartheta_* = t_*) \vee (\vartheta_* \in]t_*, \vartheta_0])$.

1) Пусть $\vartheta_* = t_*$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*) = \{t_*\}$, а потому

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \vartheta_*) = \sup(\{\Psi(t_*, x_*); \zeta(t_*, x_*)\})$$

и, как следствие, $\zeta(t_*, x_*) < b$. С учетом (9.10) получаем (см. (5.5), (8.2), (8.3)), что в случае 1) $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$. Итак, истинна импликация

$$(\vartheta_* = t_*) \Longrightarrow ((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)). \tag{11.28}$$

2) Пусть $\vartheta_* \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*) = [t_*, \vartheta_*[\neq \varnothing$. При этом (см. (10.7), (11.27)) $t_* \in [t_*, \vartheta_*[$ и

$$\zeta(t_*, x_*) = \zeta(t_*, \bar{x}(t_*)) \leqslant \omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \vartheta_*) < b. \tag{11.29}$$

Как следствие и в данном случае 2) получаем (см. (5.5), (8.3), (9.10), (11.29)), что $(t_*, x_*) \in \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$. Итак, истинна импликация

$$(\vartheta_* \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow ((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)). \tag{11.30}$$

С учетом (11.24), (11.28) и (11.30) получаем во всех возможных случаях, что

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)). \tag{11.31}$$

Учтем (11.4), получая (см. (11.31)) следующее свойство

$$(\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \bar{\alpha}(\nu)) \setminus \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M},b),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b)}(t_*, x_*) \neq \varnothing. \tag{11.32}$$

С учетом этого выберем и зафиксируем ОУ $\hat{\eta}$ из множества в левой части (11.32). Тогда, в частности, $\hat{\eta} \in \mathcal{H}_{t_*}$. Далее, в силу (11.25) для

$$\hat{x}(\cdot) \triangleq \varphi(\cdot, t_*, x_*, \hat{\eta}) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}]$$

(см. (4.7)) имеем следующее неравенство $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\hat{x}(\cdot)) < b$. Поэтому (см. (10.10)) для некоторого $\hat{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\omega_\kappa(t_*, \hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) < b. \tag{11.33}$$

С учетом (5.2), (9.8) и (10.7) получаем поэтому, что $(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b)$. Далее, при $\hat{\vartheta} = t_*$ имеем, как легко видеть (см. (11.33)), что $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$, что приводит к противоречию с (11.24). Остается допустить, что $\hat{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$, а тогда в силу (10.6) $\mathbb{I}_{t_*}(\hat{\vartheta}) = [t_*, \hat{\vartheta}[$. Но в этом случае из (11.33) легко извлекается свойство

$$\hat{\eta} \in \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M},b),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b)}(t_*, x_*)$$

(см. (11.2), (11.31))), что невозможно по выбору $\hat{\eta}$. Полученное при условии (11.25) противоречие показывает, что само (11.25) невозможно и, следовательно, верно (11.23). □

С л е д с т в и е 11.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ *и* $\bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}$, *то*

$$b \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

Доказательство очевидно. Из последнего следствия вытекает следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 11.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \leqslant \mathbf{v}(t_*, x_*)$.

Т е о р е м а 11.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \mathbf{v}(t_*, x_*) = \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

Отметим простейшие следствия, фиксируя позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ до конца настоящего параграфа. Прежде всего, из (11.10) следует, что $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$, а потому (см. (11.7) и теорему 11.1) на самом деле

$$\mathbf{v}(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{11.34}$$

С другой стороны, из (11.10) и теоремы 11.1 следует, что

$$\mathbf{v}(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{11.35}$$

Из (11.34) и (11.35) вытекает эквивалентность квазистратегий и квазипрограмм в минимаксной задаче настоящего параграфа.

§ 12. Вспомогательный программный оператор на пространстве функций

В этом параграфе вводится специальный оператор, действующий из $\mathfrak{M}_\psi$ в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ и играющий далее важную роль в построении итерационной процедуры в множестве $\mathfrak{M}_\psi$. Напомним (9.13).

П р е д л о ж е н и е 12.1. *Если* $t_* \in T$ *и* $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, *то функция*

$$\tau \longmapsto \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \colon [t_*, \vartheta_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ограничена, т. е. $\exists c \in \mathbb{R}_+ \colon \psi(\tau, x(\tau)) \leqslant c \ \ \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]$.

Доказательство следует из определений (см. также (10.1), (10.4)). Как следствие имеем при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, что

$$\sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)) \in \mathbb{R}_+;$$

кроме того, если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то в силу (9.28) имеем, что

$$g(\tau, x(\tau)) \leqslant \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)) \ \ \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{12.1}$$

С учетом этого при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $t \in T$ полагаем, что функционал

$$\mathfrak{H}[g; t] \in \mathcal{R}_+[C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]]$$

определяется следующим правилом: при $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$\mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \overset{\triangle}{=} \sup(\{\sup_{\tau \in \mathbb{I}_t(\vartheta)} g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta))\}). \tag{12.2}$$

В силу (9.13) при $t \in T, \ x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant \sup_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)). \tag{12.3}$$

Из (12.1), (12.2) и (12.3) получаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi, \ t \in T, \ x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$0 \leqslant \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau))$$

(учитываем, что согласно (10.5) $\mathbb{I}_t(\vartheta) \subset [t, \vartheta_0]$). В связи с (12.2) имеет смысл выделить при $g \in \mathfrak{M}_\psi, \ t \in T$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$ для отдельного рассмотрения функционал

$$x(\cdot) \longmapsto \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \colon C_n([t, \vartheta_0]) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

обозначаемый кратко через $\mathfrak{H}[g; t](\cdot, \vartheta)$.

П р е д л о ж е н и е 12.2. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ t_* \in T,\ \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ *и* $b \in \mathbb{R}_+$, *то множество Лебега*

$$\mathfrak{H}[g; t_*](\cdot, \vartheta)^{-1}([0, b]) = \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) | \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leqslant b\} \qquad (12.4)$$

замкнуто в топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0]) : \forall (x_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \in \in \mathfrak{H}[g; t_*](\cdot, \vartheta)^{-1}([0, b])^{\mathbb{N}}\ \ \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$((x_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x(\cdot)) \Longrightarrow (x(\cdot) \in \mathfrak{H}[g; t_*](\cdot, \vartheta)^{-1}([0, b])).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $g,\ t_*, \vartheta$ и b в соответствии с условиями предложения и полагаем для краткости, что $\mathbb{Y} \triangleq \mathfrak{H}[g; t_*](\cdot, \vartheta)^{-1}([0, b])$. Тогда $\mathbb{Y} \in \mathcal{P}(C_n([t_*, \vartheta_0]))$. Выберем произвольно

$$((y_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}) \& (y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$$

со следующим свойством сходимости:

$$(y_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows y(\cdot). \qquad (12.5)$$

Тогда (см. (12.5)) имеем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\|y_j(t) - y(t)\| < \varepsilon\ \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \qquad (12.6)$$

Из (5.1) и (12.6) вытекает сходимость последовательности позиций:

$$(\rho((\vartheta, y_i(\vartheta)); (\vartheta, y(\vartheta))))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0. \qquad (12.7)$$

Из (9.8) и (12.7) получаем, как следствие, свойство

$$(\Psi(\vartheta, y_i(\vartheta)))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \Psi(\vartheta, y(\vartheta)). \qquad (12.8)$$

По выбору $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ имеем систему неравенств

$$\mathfrak{H}[g; t_*](y_j(\cdot), \vartheta) \leqslant b\ \ \forall j \in \mathbb{N}. \qquad (12.9)$$

С учетом (12.2) и 12.9) получаем, в частности, что $\Psi(\vartheta, y_j(\vartheta)) \leqslant b\ \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Поэтому (см. (12.8))

$$\Psi(\vartheta, y(\vartheta)) \leqslant b. \qquad (12.10)$$

Кроме того, из (12.2) и (12.9) вытекает следующее свойство:

$$\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, y_j(\tau)) \leqslant b\ \ \forall j \in \mathbb{N}. \qquad (12.11)$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, y(\tau)) \leqslant b. \qquad (12.12)$$

В самом деле, допустим противное: пусть

$$\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, y(\tau)) > b. \qquad (12.13)$$

Тогда для некоторого $t^* \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)$ реализуется неравенство

$$g(t^*, y(t^*)) > b. \qquad (12.14)$$

В силу (12.6) имеем, однако, следующее свойство сходимости:

$$(y_i(t^*))_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow y(t^*). \tag{12.15}$$

Вместе с тем согласно (12.11) справедливы неравенства

$$g(t^*, y_j(t^*)) \leqslant b \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $g \in \mathfrak{M}$, получаем, в частности, что $g^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F}$, а тогда (см. (5.4))

$$g^{-1}([0,b])\langle t^*\rangle = \{x \in \mathbb{R}^n | (t^*, x) \in g^{-1}([0,b])\} \in \mathbf{F}. \tag{12.16}$$

При этом, как легко видеть, $y_j(t^*) \in g^{-1}([0,b])\langle t^*\rangle \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. В силу (12.15) и (12.16) имеем поэтому включение $y(t^*) \in g^{-1}([0,b])\langle t^*\rangle$, а потому $(t^*, y(t^*)) \in g^{-1}([0,b])$ вопреки (12.14). Полученное при условии (12.13) противоречие показывет, что само (12.13) невозможно и, стало быть, верно (12.12). Из (12.2), (12.10) и (12.12) получаем, что $\mathfrak{H}[g;t_*](y(\cdot),\vartheta) \leqslant b$. Тогда (см. (12.4)) $y(\cdot) \in \mathbb{Y}$. Замкнутость множества $\mathbb{Y}$ установлена. □

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$, то полагаем, что

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v] \overset{\triangle}{=} (\mathfrak{H}[g;t_*] | \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]) \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]]; \tag{12.17}$$

ясно, что при $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](x(\cdot),\vartheta) = \sup(\{\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta))\}). \tag{12.18}$$

При $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ v \in Q$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем ϑ-сечение функционала (12.17):

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](\cdot,\vartheta) \overset{\triangle}{=} (\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](x(\cdot),\vartheta))_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)].$$

Отметим, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ v \in Q,\ \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](\cdot,\vartheta)^{-1}([0,b]) = \mathfrak{H}[g;t_*](\cdot,\vartheta)^{-1}([0,b]) \cap \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v).$$

С л е д с т в и е 12.1. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то $\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](\cdot,\vartheta)^{-1}([0,b])$ есть множество, компактное в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости.*

Доказательство получаем из предложения 12.2 с учетом компактности множеств (4.8). Справедливо следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 12.3. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ t_* \in T,\ x_* \in \mathbb{R}^n,\ v \in Q$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, то $\exists \bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$:*

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](\bar{x}(\cdot),\vartheta) = \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](x(\cdot),\vartheta). \tag{12.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Число в правой части (12.19) обозначим через $\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+$. Если $b \in]\mathbf{a}, \infty[$, то

$$\tilde{\mathfrak{X}}_b \overset{\triangle}{=} \mathbf{h}[g;t_*;x_*;v](\cdot,\vartheta)^{-1}([0,b]) \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)); \tag{12.20}$$

согласно следствию 12.1 данное множество компактно в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Как следствие множества $\tilde{\mathfrak{X}}_b,\ b \in]\mathbf{a}, \infty[$, замкнуты в $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$ с топологией, индуцированной из $C_n([t_*, \vartheta_0])$. Упомянутая индуцированная (относительная) топология превращает $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$ в непустой компакт, в котором все множества (12.20) непусты и замкнуты. Итак, в виде

$$\mathbf{X} \overset{\triangle}{=} \{\tilde{\mathfrak{X}}_b \colon b \in]\mathbf{a}, \infty[\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v))) \tag{12.21}$$

имеем непустое семейство непустых замкнутых п/м компакта. По свойствам операции взятия прообраза имеем также свойство

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{X}_i \neq \varnothing \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall (\mathbb{X}_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathbf{X}^k.$$

Итак, (12.21) есть центрированное семейство замкнутых п/м компакта (центрированная система замкнутых множеств), а потому

$$\bigcap_{b\in]\mathbf{a},\infty[} \tilde{\mathfrak{X}}_b = \bigcap_{\mathbb{X}\in\mathbf{X}} \mathbb{X} \neq \varnothing. \tag{12.22}$$

Для траектории $\bar{x}(\cdot)$ из множества (12.22) получаем равенство $\mathbf{a} = \mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](\bar{x}(\cdot), \vartheta)$. $\square$

С учетом предложения 12.3 получаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определено значение

$$\min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Кроме того, имеем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$, что

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Вернемся к (12.1). Заметим, что согласно (9.14) $\Psi(t,x) \leqslant \psi_\kappa(t,x)$ при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$. С учетом этого получаем при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, что

$$\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant \sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)).$$

С учетом (10.5), (12.1) и (12.2) получаем теперь, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$\mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{\xi\in[t,\vartheta_0]} \psi_\kappa(\xi, x(\xi)). \tag{12.23}$$

Из (12.23) следует, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)).$$

Напомним (10.1). В силу непрерывности функции (10.3) она достигает максимума на промежутке $[t_*, \vartheta_0]$, где $t_* \in T$. Итак, при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ определено (конечное) значение

$$\max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \Psi(t, x(t)) \in \mathbb{R}_+.$$

С учетом этого и условия равномерной ограниченности (см. § 4) легко устанавливается с использованием (10.4) следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 12.4. *Если* $t_* \in T$ *и* $x_* \in \mathbb{R}^n$, *то* $\exists \mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \mathbf{b} \ \ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \ \forall v \in Q \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Как следствие получаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$ для некоторого $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \mathbf{b} \ \ \forall v \in Q.$$

Поэтому при $g \in \mathfrak{M}_\psi,\ t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$\sup_{v \in Q} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \tag{12.24}$$

С учетом (12.24) корректно следующее определение оператора

$$\Gamma\colon \mathfrak{M}_\psi \longrightarrow \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]; \tag{12.25}$$

а именно, полагаем, что $\forall g \in \mathfrak{M}_\psi$

$$\Gamma(g) \stackrel{\triangle}{=} (\sup_{v \in Q} \inf_{\vartheta \in [t, \vartheta_0]} \min_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v)} \mathbf{h}[g; t; x; v](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n}.$$

Итак, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ функция $\Gamma(g) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ такова, что

$$\Gamma(g)(t, x) = \sup_{v \in Q} \inf_{\vartheta \in [t, \vartheta_0]} \min_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v)} \mathbf{h}[g; t; x; v](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{12.26}$$

Мы именуем далее отображение (12.25)–(12.26) программным оператором. Данный оператор рассматриваем как средство реализации последовательности, определяемой в (8.13), и ее предела.

§ 13. Итерации в пространстве функций

Ниже рассматривается вопрос о «прямой» реализации последовательности

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k \in \mathbb{N}_0}\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathfrak{M}_\psi,$$

а также предельной (см. предложение 8.5) функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$; см. в этой связи (9.29). Важную роль будет играть здесь оператор Γ (12.25)–(12.26). Отметим прежде всего, что в силу (9.29) и (12.25) при $k \in \mathbb{N}_0$

$$(\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n])\&(\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]). \tag{13.1}$$

Мы ставим своей целью установить совпадение функций (13.1). Однако, сначала отметим некоторые простые вспомогательные положения.

П р е д л о ж е н и е 13.1. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то $g \stackrel{\leq}{=} \Gamma(g)$.*

Доказательство отличается от аналогичного утверждения в [11, 12] лишь несущественными деталями и по этой причине опущено в данном изложении.

П р е д л о ж е н и е 13.2. *Оператор Γ является изотонным: $\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi\ \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi$*

$$(g_1 \stackrel{\leq}{=} g_2) \Longrightarrow (\Gamma(g_1) \stackrel{\leq}{=} \Gamma(g_2)).$$

Доказательство следует фактически из определения Γ.

Т е о р е м а 13.1. *Если $k \in \mathbb{N}_0$, то справедливо равенство $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$, $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$ и $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. В частности, имеем (13.1). Сравним функции (13.1). Для этого выберем произвольно и зафиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда

$$(a_* \stackrel{\triangle}{=} \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+)\&(b_* \stackrel{\triangle}{=} \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \tag{13.2}$$

В силу предложения 8.3 и (13.2) $a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa)$. С учетом (8.8) получаем

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{13.3}$$

В силу (6.10) имеем, в частности, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{13.4}$$

Таким образом, реализуется следующее включение:

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*).$$

Кроме того, из (6.6) и (13.3) вытекает свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))). \tag{13.5}$$

Поэтому в силу (6.1) получаем (см. (13.5)), что $\forall v \in Q\ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]:$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \& ((t, x(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))\ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{13.6}$$

Пусть $\bar{v} \in Q$. Тогда в силу (13.6) для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \bar{v})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \& ((t, \bar{x}(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))\ \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \tag{13.7}$$

В силу (5.2), (9.8) и (13.7) получаем, что

$$\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant a_*. \tag{13.8}$$

Отметим, что $(\bar{\vartheta} = t_*) \vee (\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0])$. Оба этих случая рассматриваются отдельно.

1) Пусть $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда в силу (13.8) имеем

$$\Psi(t_*, x_*) = \Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant a_*. \tag{13.9}$$

При этом согласно (10.6) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$ и согласно (13.4) получаем, что

$$(\tau, \bar{x}(\tau)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))\ \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}). \tag{13.10}$$

С учетом (8.10) имеем теперь, что $a_* \in \Sigma_0^{(k)}(\tau, \bar{x}(\tau)|\kappa)\ \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$. Согласно (8.12)

$$\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar{x}(\tau)|\kappa) \leqslant a_*\ \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}). \tag{13.11}$$

С учетом (12.18), (13.9) и (13.11) получаем в рассматриваемом случае 1), неравенство $\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*$. Получили импликацию

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \Longrightarrow (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{13.12}$$

2) Пусть $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда $t_* < \bar{\vartheta}$ и $[t_*, \bar{\vartheta}[\neq \varnothing$. При этом согласно (10.6) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \bar{\vartheta}[$. Из (13.7) снова получаем (13.10). Как следствие реализуется (13.11) и с учетом (13.8) в случае 2) снова получаем

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*. \tag{13.13}$$

Установлена импликация

$$(\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{13.14}$$

Из (13.12) и (13.14) получаем неравенство (13.13) во всех возможных случаях. Следовательно,

$$\min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,\bar{v})} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;\bar{v}](x(\cdot),\bar{\vartheta}) \leqslant a_*.$$

Поскольку $\bar{v}$ выбиралось произвольно, установлено, что

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;v](x(\cdot),\vartheta) \leqslant a_* \ \ \forall v\in Q. \tag{13.15}$$

Из (12.26) и (13.15) получаем, что

$$b_* = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*,x_*) \leqslant a_*.$$

Проверим противоположное неравенство. В силу предложения 13.1 $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$. В частности,

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa) \leqslant b_*.$$

В силу предложения 9.1 $b_*\in\Sigma_0^{(k)}(t_*,x_*|\kappa)$. Это означает, что (см. (8.10))

$$(t_*,x_*)\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},b_*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b_*)). \tag{13.16}$$

В силу (12.26) и (13.2) имеем следующее свойство: $\forall v\in Q$

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;v](x(\cdot),\vartheta) \leqslant b_*. \tag{13.17}$$

Выберем произвольно $b^*\in]b_*,\infty[$. Тогда $b^*\in\mathbb{R}_+$ и при этом $b_*<b^*$. Фиксируем $v^*\in Q$. В силу (13.17) получаем, что для некоторых $\vartheta^*\in[t_*,\vartheta_0]$ и $x^*(\cdot)\in\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v^*)$

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;v^*](x^*(\cdot),\vartheta^*) < b^*. \tag{13.18}$$

Из (12.18) и (13.18) следует, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\tau,x^*(\tau)|\kappa) < b^* \ \forall\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*))\&(\Psi(\vartheta^*,x^*(\vartheta^*)) < b^*). \tag{13.19}$$

С учетом (6.11) и (13.16) получаем следующее включение:

$$(t_*,x_*)\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)). \tag{13.20}$$

При этом $(\vartheta^*=t_*)\vee(\vartheta^*\in]t_*,\vartheta_0])$. Данные два случая рассматриваем отдельно.

1') Пусть $\vartheta^*=t_*$. Тогда получаем (см. (10.6)) равенство $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)=\{t_*\}$. При этом $[t_*,\vartheta^*[=\varnothing$. Поэтому тривиальным образом имеем, что

$$(t,x^*(t))\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)) \ \forall t\in[t_*,\vartheta^*[.$$

Из (13.19) легко извлекается свойство $(\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*)$. Итак, получили в случае 1'), что

$$((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\&((t,x^*(t))\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)) \ \forall t\in[t_*,\vartheta^*[). \tag{13.21}$$

Следовательно, истинна (см. (13.21)) следующая импликация

$$\begin{aligned}(\vartheta^*=t_*)\Longrightarrow(((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\&((t,x^*(t))\in\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\\ \forall t\in[t_*,\vartheta^*[)).\end{aligned} \tag{13.22}$$

2’) Пусть теперь $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда в силу (10.6) $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) = [t_*, \vartheta^*[$. Согласно (13.19) $\varepsilon_0^{(k)}(\tau, x^*(\tau)|\kappa) < b^* \ \forall \tau \in [t_*, \vartheta^*[$. С учетом предложения 9.1 получаем, что

$$b^* \in \Sigma_0^{(k)}(\tau, x^*(\tau)|\kappa) \ \ \forall \tau \in [t_*, \vartheta^*[.$$

В силу (8.10) имеем, что

$$(\tau, x^*(\tau)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b^*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b^*)) \ \forall \tau \in [t_*, \vartheta^*[.$$

Поскольку (см. (13.19)) $(\vartheta^*, x^*(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, b^*)$, получаем (13.21) и в случае 2’). Следовательно, истинна импликация

$$\begin{gathered}(\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (((\vartheta^*, x^*(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, b^*))\\ \&((t, x^*(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b^*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b^*)) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta^*[)).\end{gathered} \tag{13.23}$$

Из (13.22) и (13.23) получаем, что (13.21) имеет место во всех возможных случаях. Поскольку выбор v^* был произвольным, установлено, что $\forall v \in Q \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, b^*))\&((t, x(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b^*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b^*)) \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{13.24}$$

Из (6.1), (13.20) и (13.24) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, b^*)](\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b^*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b^*))). \tag{13.25}$$

Поэтому (см. (6.6), (13.25)) получаем следующее свойство:

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b^*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b^*)).$$

Это означает, что (см. (8.10)) $b^* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa)$ и, как следствие (см.(8.12)),

$$a_* \leqslant b^*.$$

Поскольку выбор b^* был произвольным, установлено, что $a_* \leqslant b \ \ \forall b \in]b_*, \infty[$. Но в этом случае $a_* \leqslant b_*$. В итоге $a_* = b_*$, а тогда

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено требуемое равенство

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)).$$

□

Таким образом, имеем (см. предложение 9.5, теорему 13.1) следующую итерационную процедуру в множестве $\mathfrak{M}_\psi$ (9.28):

$$(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa) = \zeta)\&(\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0). \tag{13.26}$$

§ 14. Свойство неподвижной точки

В (13.26) мы имеем представление последовательности, определяемой в (9.29), в терминах итерационной процедуры на основе оператора Г. Логично поставить вопрос и о представлении предела данной последовательности, т.е. вопрос о представлении функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$. В этой связи отметим, что согласно (9.29) определена функция $\Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))$.

Т е о р е м а 14.1. *Функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ является неподвижной точкой оператора Γ:*

$$\varepsilon_0(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$ (см. (9.29)), то согласно предложению 13.1

$$\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \overset{\leqq}{=} \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa)). \tag{14.1}$$

Выберем произвольно и зафиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+ \tag{14.2}$$

и, вместе с тем, имеем

$$b_* \overset{\triangle}{=} \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+. \tag{14.3}$$

Из (14.1)–(14.3) имеем с очевидностью неравенство

$$a_* \leqslant b_*. \tag{14.4}$$

Проверим справедливость противоположного неравенства. В силу предложения 8.4

$$a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa), \tag{14.5}$$

а тогда (см. (8.8), (14.5)) имеем свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{14.6}$$

В силу (6.8) это означает, что справедливо свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))). \tag{14.7}$$

Из (6.1) и (14.7) вытекает, что $\forall v \in Q\ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*))\&((t, x(t)) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))\ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{14.8}$$

Поэтому (см. (5.2), (8.8), (14.8)) имеем, что $\forall v \in Q\ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$(\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant a_*)\&(a_* \in \Sigma_0(t, x(t)|\kappa)\ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{14.9}$$

Как следствие из (8.11) и (14.9) получаем, что $\forall v \in Q\ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$(\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant a_*)\&(\varepsilon_0(t, x(t)|\kappa) \leqslant a_*\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{14.10}$$

Выберем произвольно $\bar{v} \in Q$. Тогда в силу (14.10) для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \bar{v})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$(\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant a_*)\&(\varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa) \leqslant a_*\ \ \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \tag{14.11}$$

Как и прежде, рассматриваем отдельно случаи $\bar{\vartheta} = t_*$ и $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$.

1) Пусть $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$. Из (8.8) и (14.6) имеем свойство

$$a_* = \varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa)\ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta});$$

$$(\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})} \varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa) = a_*)\&(\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant a_*). \tag{14.12}$$

Как следствие в случае 1) получаем из (12.18) и (14.12) следующее неравенство

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*. \tag{14.13}$$

Итак (см. (14.13)), установлена импликация

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \Longrightarrow (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{14.14}$$

2) Пусть $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (10.6)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \bar{\vartheta}[$. С учетом (14.11) получаем, что

$$(\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leqslant a_*) \& (\varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa) \leqslant a_* \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})). \tag{14.15}$$

С учетом (12.18) и (14.15) имеем неравенство (14.13) и в случае 2). Итак, истинна импликация

$$(\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{14.16}$$

Из (14.14) и (14.16) получаем, что неравенство (14.13) выполнено во всех возможных случаях. Тогда, как следствие,

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \bar{v})} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{v}](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*. \tag{14.17}$$

Поскольку выбор $\bar{v}$ был произвольным, установлено (см. (14.17)), что

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_* \ \ \forall v \in Q. \tag{14.18}$$

Из (12.26), (14.3) и (14.18), следует, что $b_* = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \leqslant a_*$. В силу (14.4) получаем равенство $a_* = b_*$. С учетом (14.2) и (14.3) имеем теперь, что $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*)$. Поскольку выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, теорема доказана. □

Введем в рассмотрение следующее множество

$$\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi | (g = \Gamma(g)) \& (\zeta \stackrel{\leq}{=} g)\}. \tag{14.19}$$

Т е о р е м а 14.2. *Функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ есть $\stackrel{\leq}{=}$-наименьший элемент множества* (14.19):

$$(\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}) \& (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \stackrel{\leq}{=} g \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}).$$

Доказательство теоремы подобно доказательству аналогичного положения в [11, 12] и по этой причине опущено в настоящем изложении. Отметим,что согласно (9.27)–(9.29)

$$(\zeta \stackrel{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot|\kappa)) \& (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa).$$

П р е д л о ж е н и е 14.1. *Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то*

$$(\frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_* \rangle] \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \leqslant \sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_* \rangle]\}).$$

Доказательство очевидно. Отметим простое следствие.

С л е д с т в и е 14.1. *Если позиция $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ такова, что*

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_* \rangle], \tag{14.20}$$

то справедливо равенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_* \rangle].$$

Итак, для позиции (t_*, x_*) со свойством (14.20) значение функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ для данной позиции определяется расстоянием от x_* до множества $\mathbf{N}\langle t_* \rangle$.

§ 15. Связь с решением задачи уклонения

Рассмотрим вопрос об уклонении (задача игрока II) по отношению к окрестностям множеств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Для этого отметим, что согласно (5.2), (7.1) и (8.3) при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F}')\&(\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \in \mathfrak{F}').$$

Поэтому в задаче, где (при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$) $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$ играет роль ЦМ игрока I, а $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)$ — роль множества, определяющего ФО, вполне применимы методы [30, 31]) (см., в частности, [30, (6.1)]). Из [30, теорема 9.2] вытекает, что при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered}\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \{(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) | \exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^*\ \exists k \in \overline{1, s} \\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; k]\ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0] \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\}\end{gathered} \tag{15.1}$$

(отметим здесь же полезное свойство, указанное в [30, следствие 9.1]). Здесь же отметим, что в силу (6.7), (6.10) при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \tag{15.2}$$

(учитываем, что $\mathcal{W}_1(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \subset \mathcal{W}_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)$). Тогда при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))). \tag{15.3}$$

Из (15.1)–(15.3) получаем, что $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\ \exists V \in \mathfrak{V}$ $\exists \beta \in \mathbb{G}_t^*\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; k]\ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists \xi \in [t, \vartheta[\colon (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \tag{15.4}$$

Заметим, что (см. § 4) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ V \in \mathfrak{V},\ \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*,\ k \in \mathbb{N}$ и $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ имеем в силу (10.10)

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ V \in \mathfrak{V},\ \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$ стратегии-тройке (V, β, k) сопоставляется

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

П р е д л о ж е н и е 15.1. *Если* $t_* \in T,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ *и* $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ *обладают свойством*

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)\colon (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

то справедливо неравенство $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon$.

Доказательство следует из определений. Также вполне очевидно следующее положение.

С л е д с т в и е 15.1. *Если* $t_* \in T,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *и* $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ *таковы, что*

$$\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\ \ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Longrightarrow (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)\colon (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

то справедливо неравенство $\varepsilon \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))$.

П р е д л о ж е н и е 15.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$, *то* $\exists V \in \mathfrak{V}$ $\exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$. Тогда

$$\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+ \colon \varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa). \tag{15.5}$$

Поэтому в силу (8.11) и (15.5) имеем свойство

$$\varepsilon_* \notin \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa), \tag{15.6}$$

а тогда согласно (8.8), (15.5) и (15.6) получаем, что

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.7}$$

С учетом (15.7) получаем, что непременно

$$((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \vee ((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))). \tag{15.8}$$

Оба случая, упомянутых в (15.8), рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала $(t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$. Тогда получаем, что

$$(t_*, x_*) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \tag{15.9}$$

Поэтому (см. (8.3), (15.9)) реализуется свойство

$$x_* \notin B^0_n(\mathbf{N}\langle t_*\rangle, \kappa\varepsilon_*).$$

Тогда согласно (5.5) $\kappa\varepsilon_* < (\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle]$, откуда вытекает (см. (9.10)) неравенство

$$\varepsilon_* < \zeta(t_*, x_*). \tag{15.10}$$

Тогда $\varepsilon_* < \zeta(t_*, \varphi(t_*, t_*, x_*, \eta)$ $\forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}$. Выберем произвольно $\hat{V} \in \mathfrak{V}$ и $\hat{\beta} \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ (выбор осуществляется из непустых множеств). Тогда $\hat{V}(t_*, x_*) \in \mathcal{P}'(Q)$. С учетом этого выберем произвольно

$$\hat{v} \in \hat{V}(t_*, x_*). \tag{15.11}$$

Тогда $\hat{v} \in Q$, а потому (см. (4.8))

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v}) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes \hat{v}) \colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \tag{15.12}$$

Из (15.10) и (15.12) получаем следующее свойство:

$$\varepsilon_* < \zeta(t_*, x(t_*)) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v}) \tag{15.13}$$

(напомним, что $x(t_*) = x_*$ при $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v})$). При этом (см. [30, (7.7)]) по выбору $\hat{v}$ имеем, что

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v}) \subset \mathfrak{X}[t_*; x_*; \hat{V}; \hat{\beta}; 1].$$

В силу (10.6) $t_* \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)$ $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$. Поэтому согласно (15.13) $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v})$ $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\varepsilon_* < \zeta(t_*, x(t_*)) \leqslant \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta(t, x(t)) \leqslant \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta). \tag{15.14}$$

Из (10.10), (15.12) и (15.14) получаем, как следствие, что

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) = \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \;\; \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v}). \tag{15.15}$$

Поскольку выбор $\hat{v}$ (15.11) был произвольным, установлено (см. (15.15)), что

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \; \forall v \in \hat{V}(t_*, x_*) \; \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v).$$

Но в этом случае согласно [30, (7.7)] получаем следующее утверждение:

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \; \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \hat{V}; \hat{\beta}; 1]. \tag{15.16}$$

Из (15.16) получаем, в частности, что в случае 1) $\exists V \in \mathfrak{V} \; \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^* \; \exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \; \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k].$$

Итак, установлена следующая импликация:

$$\begin{aligned} ((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \Longrightarrow (\exists V \in \mathfrak{V} \; \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^* \; \exists k \in \mathbb{N} \colon \varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \\ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]). \end{aligned} \tag{15.17}$$

2) Пусть теперь $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Тогда согласно (15.4) $\exists V \in \mathfrak{V} \; \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^* \; \exists k \in \mathbb{N} \; \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \; \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Longrightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[\colon (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.18}$$

Пусть (см. (15.18)) $V^* \in \mathfrak{V}$, $\beta^* \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $r \in \mathbb{N}$ таковы, что для любых $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ истинна импликация (15.18). Выберем произвольно $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$. Тогда, в частности, $y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и при этом (см. [30, (7.6)]) $y(t_*) = x_*$. С учетом (15.18) получаем, что $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, y(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Longrightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[\colon (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.19}$$

В силу (10.7) получаем следующие равенства

$$\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\Psi(\vartheta, y(\vartheta)); \sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta(t, y(t))\}) \in \mathbb{R}_+ \; \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{15.20}$$

При этом согласно (10.10) имеет место (см. (15.20)) равенство

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(y(\cdot)) = \inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta). \tag{15.21}$$

Пусть $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$. Тогда $(\vartheta^* = t_*) \vee (\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0])$.

a) Пусть $\vartheta^* = t_*$. Тогда $[t_*, \vartheta^*[= \varnothing$. Поэтому в силу (15.19) имеем, что $(\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*)$, откуда легко следует (см. (15.20)), что $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$. Итак, получили импликацию

$$(\vartheta^* = t_*) \Longrightarrow (\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)). \tag{15.22}$$

b) Пусть $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (15.19)) имеем дизъюнкцию

$$((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \vee (\exists t \in [t_*, \vartheta^*[\colon (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.23}$$

В силу (10.6) $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) = [t_*, \vartheta^*[$. Тогда (см. (15.23)) имеем импликацию

$$((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Longrightarrow (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) \colon (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.24}$$

При этом $t_* \in T,\ \varepsilon_* \in \mathbb{R}_+,\ y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$. С учетом предложения 15.1 имеем импликацию

$$\begin{aligned}(((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Longrightarrow (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)\colon (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)).\end{aligned} \tag{15.25}$$

Из (15.24) и (15.25) получаем, что $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$ и в случае b). Итак, установлена импликация

$$(\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)). \tag{15.26}$$

Из (15.22) и (15.26) получаем требуемое строгое неравенство во всех возможных случаях. Поскольку ϑ^* выбиралось произвольно, установлено, что

$$\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{15.27}$$

Из (10.10), (15.21) и (15.27) получаем, что $\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(y(\cdot))$. Тем самым установлено, что

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]. \tag{15.28}$$

Из (15.28) следует, что и в случае 2) $\exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*\ \exists k \in \mathbb{N}\colon$

$$\varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k].$$

Итак, истинна следующая импликация:

$$\begin{aligned}((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))) \Longrightarrow (\exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \\ \varepsilon_* \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]).\end{aligned} \tag{15.29}$$

Из (15.17) и (15.29) вытекает требуемое утверждение. □

С л е д с т в и е 15.2. *При* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ *непременно* $\exists (V, \beta, k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}\colon$

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

Доказательство очевидным образом следует из предложения 15.2.

П р е д л о ж е н и е 15.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ V \in \mathfrak{V},\ \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]\colon \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n,\ V \in \mathfrak{V},\ \beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$. Тогда $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и согласно предложению 8.4 $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$. В силу (8.8)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.30}$$

С учетом (6.10) и (15.30) получаем, в частности, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{15.31}$$

Тогда (см. (15.31), [31, предложение 7.5]) для некоторых $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ реализуются свойства

$$((\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*))\&((t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)\ \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \tag{15.32}$$

Тогда (см. § 4) $y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и согласно [31, (7.6)] $y(t_*) = x_*$. При этом $(\bar{\vartheta} = t_*) \vee$ $\vee\, (\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0])$. Рассмотрим оба возможных случая.

1) Пусть $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда $(\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) = (t_*, x_*)$, а потому $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$, откуда следует, что

$$\Psi(t_*, x_*) = \Psi(\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) \leqslant \varepsilon_*. \tag{15.33}$$

Далее, из (10.6) получаем равенство $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$. Из (6.6), (6.10) и (15.30) вытекает, что $(t_*, y(t_*)) = (t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$. Поэтому (см. (5.5), (8.3))

$$(\|\cdot\| - \inf)[y(t_*); \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \leqslant \kappa\varepsilon_*. \tag{15.34}$$

Иными словами, из (15.34) вытекает (см. (9.10)) следующее неравенство:

$$\zeta(t_*, y(t_*)) \leqslant \varepsilon_*. \tag{15.35}$$

Как следствие в рассматриваемом случае имеет место (см. (15.35)) оценка

$$\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})} \zeta(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_*. \tag{15.36}$$

Из (10.7), (15.33) и (15.36) вытекает, что в случае 1) $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$. Итак, установлена импликация

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \Longrightarrow (\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*). \tag{15.37}$$

2) Пусть теперь $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (10.6)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \bar{\vartheta}[\neq \varnothing$. Из (15.32) вытекает, что $(t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$ $\forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$. Последнее означает, что $\zeta(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_*$ $\forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$. Кроме того, из (5.2), (9.8) и (15.32) следует, что $\Psi(\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) \leqslant \varepsilon_*$. В итоге $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$ и в случае 2). Итак,

$$(\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]) \Longrightarrow (\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*). \tag{15.38}$$

Из (15.37) и (15.38) получаем требуемое неравенство $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$ во всех возможных случаях. Тем более (см. (10.10)) $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(y(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$. По выбору $y(\cdot)$ имеем требуемое утверждение. $\square$

С л е д с т в и е 15.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa).$$

Доказательство очевидно. Напомним, что (см. [31, § 7]) $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \neq \varnothing$ при $t_* \in T$. С учетом следствия 15.3 при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)].$$

Т е о р е м а 15.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией следствий 15.2 и 15.3. Из (11.34), (11.35), теорем 11.1 и 15.1 вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \ \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))$$
$$= \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \ \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot));$$

итак, $\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)$ — цена игры на минимакс–максимин функционала $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$.

§ 16. Заключение

В настоящей статье ДИ сближения–уклонения рассматривается как некоторый первоначальный объект исследования (при этом для несколько более общих условий относительно множества, задающего ФО, устанавливается один естественный аналог теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина). Мы конструируем ослабленные аналоги условий окончания игры сближения путем замены исходных ЦМ и множества, определяющего ФО, окрестностями, размеры которых выбираются с учетом приоритетов в вопросах достижения ЦМ и соблюдения ФО. Среди всевозможных вариантов упомянутого ослабления условий мы стремимся выбрать оптимальный с точки зрения игрока I, соблюдая, однако, требование гарантированной разрешимости задачи этого игрока. В результате каждой позиции сопоставляется (с поправкой на приоритетность) аналог наименьшего размера окрестностей ЦМ и множества, задающего ФО, для которого игрок I еще располагает возможностью гарантированной реализации наведения на соответствующую окрестность ЦМ при ослабленных должным образом ФО. Возникает функция позиции, значения которой оказываются всякий раз ценой игры с некоторым весьма естественным функционалом качества. Кроме того, данная функция оказывается неподвижной точкой программного оператора. Последний определяет, кроме того, итерационную процедуру на пространстве функций позиции. Таким образом, реализуется некоторый новый вариант МПИ, в котором задействован упомянутый программный оператор. С другой стороны, введение самой итерационной последовательности функций и их предела осуществляется посредством итераций стабильности, т. е. посредством варианта МПИ на пространстве множеств, элементами которых являются позиции игры. Представляется, что в этих построениях проявляется существо МПИ как средства конструктивной реализации новых теоретических положений, связанных с ДИ, и новых представлений, касающихся вопросов структуры упомянутых ДИ.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18–01–00410.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Кряжимский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782. http://mi.mathnet.ru/dan41626
4. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275. http://mi.mathnet.ru/dan39354
5. Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76. http://mi.mathnet.ru/dan39693
6. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Матем. сб. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 394–420. http://mi.mathnet.ru/msb2757
7. Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
8. Ухоботов В. И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
9. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 455–467. http://mi.mathnet.ru/izv1773
10. Ченцов А. Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321
11. Ченцов А. Г., Хачай Д. М. Релаксация дифференциальной игры сближения-уклонения и методы итераций // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 4. С. 246–269. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-246-269

12. Chentsov A., Khachay D. Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game // Advanced control techniques in complex engineering systems: Theory and applications. Cham: Springer, 2019. P. 129–161. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21927-7_7
13. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
14. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
15. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
16. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under lack of information. Basel: Birkhäuser, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2568-3
17. Лукоянов Н. Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
18. Chikrii A. A. Conflict-controlled processes. Boston–London–Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013.
19. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
20. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
21. Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 3. С. 552–555. http://mi.mathnet.ru/dan37142
22. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения, I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
23. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
24. Fleming W. H. The convergence problem for differential games // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1961. Vol. 3. Issue 1. P. 102–116. https://doi.org/10.1016/0022-247X(61)90009-9
25. Fridman A. Differential games. New York: Wiley–Interscience, 1971.
26. Roxin E. Axiomatic approach in differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. No. 3. P. 153–163. https://doi.org/10.1007/BF00929440
27. Elliott R. J., Kalton N. J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12. Issue 3. P. 504–523. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90022-8
28. Ryll-Nardzewski C. A theory of pursuit and evasion // Advances in game theory. Vol. 52. Princeton University Press, 1964. P. 113–127.
29. Elliott R. J., Kalton N. J. The existence of value in differential games // Memoirs of the AMS. No. 126. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1972. https://bookstore.ams.org/memo-1-126/
30. Ченцов А. Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
31. Ченцов А. Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 17–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-02
32. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
33. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977.
34. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
35. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
36. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
37. Ченцов А. Г. Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1801–1808. http://mi.mathnet.ru/de4097

38. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
39. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
40. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
41. Ченцов А. Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 1933–79 / Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова. Свердловск, 1979. 103 с.

Поступила в редакцию 02.10.2020

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 138–184.

A. G. Chentsov
Some questions of differential game theory with phase constraints

Keywords: alternative, differential game, quasistrategy, program iteration method, relaxation of approach problem.

MSC2010: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-10

Differential game (DG) of guidance-evasion is considered; moreover, its relaxations constructed with due account for priority considerations in the implementation of target set (TS) guidance and phase constraints (PC) validity are considered. We suppose that TS is closed in a natural topology of position space. With respect to the set that defines PC, it is postulated that the sections corresponding to time fixing are closed. For this setting, with the use of program iteration method (PIM), a variant of alternative for some natural (asymmetric) classes of strategies is established. A scheme of relaxation for the game guidance problem with nonclosed (in general case) set defining PC is considered. Under relaxation construction, reasons connected with priority in the implementation of guidance to TS and PC validity are taken into account (the case of asymmetric weakening of conditions of game ending is investigated). A position function is introduced, values of which (with priority correction) play the role of an analogue of least size for neighborhoods of TS and set defining PC under which it is possible to get a guaranteed solution of a relaxed problem of a player interested in approaching with TS while observing PC. It is demonstrated that the value of given function (when fixing the position of the game) is a price of DG for minimax–maximin quality functional which characterizes both the “degree” of approaching with TS and the “degree” of observance of initial PC.

Funding. The study was funded by RFBR, project number 18–01–00410.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. An alternative for the game problem of convergence, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, issue 6, pp. 948–965. https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90158-9
2. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
3. Kryazimskii A. V. On the theory of positional differential games of convergence–evasion, *Sov. Math., Dokl.*, 1978, vol. 19, pp. 408–412. https://zbmath.org/?q=an:0399.90118
4. Chentsov A. G. The structure of a certain game-theoretic approach problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan39354
5. Chentsov A. G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77. https://zbmath.org/?q=an:0395.90105
6. Čencov A. G. On a game problem of converging at a given instant of time, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1976, vol. 28, issue 3, pp. 353–376. https://doi.org/10.1070/SM1976v028n03ABEH001657
7. Chistiakov S. V. On solving pursuit game problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 5, pp. 845–852. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90167-8
8. Ukhobotov V. I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 350–354. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90021-1
9. Čencov A. G. On the game problem of convergence at a given moment of time, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 426–437. https://doi.org/10.1070/IM1978v012n02ABEH001985
10. Chentsov A. G. The program iteration method in a game problem of guidance, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. https://doi.org/10.1134/S0081543817050066

11. Chentsov A. G., Khachai D. M. Relaxation of a differential game of approach-evasion and iterative methods, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 246–269 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-246-269
12. Chentsov A., Khachay D. Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game, *Advanced control techniques in complex engineering systems: Theory and applications*, Cham: Springer, 2019, pp. 129–161. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21927-7_7
13. Isaacs R. *Differential games. A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1965. https://zbmath.org/?q=an:0125.38001
14. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), Moscow: Nauka, 1970.
15. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control by dynamical system. The minimum problem of a guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985.
16. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. *Control under lack of information*, Basel: Birkhäuser, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2568-3
17. Lukoyanov N. Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* (Functional equations of Hamilton–Jacobi and control problems with hereditary information), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2011.
18. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Boston–London–Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013.
19. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Guaranteed optimization in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
20. Subbotin A. I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991.
21. Subbotin A. I. Extremal strategies in differential games with perfect memory, *Sov. Math., Dokl.*, 1972, vol. 13, no. 3, pp. 1263–1267. https://zbmath.org/?q=an:0295.90046
22. Krasovskii N. N. Differential game of guidance–evasion, I, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1973, no. 2, pp. 3–18 (in Russian).
23. Krasovskii N. N. Differential game of guidance–evasion, II, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1973, no. 3, pp. 22–42 (in Russian).
24. Fleming W. H. The convergence problem for differential games, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1961, vol. 3, issue 1, pp. 102–116. https://doi.org/10.1016/0022-247X(61)90009-9
25. Fridman A. *Differential games*, New York: Wiley–Interscience, 1971.
26. Roxin E. Axiomatic approach in differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1969, vol. 3, no. 3, pp. 153–163. https://doi.org/10.1007/BF00929440
27. Elliott R. J., Kalton N. J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion, *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 12, issue 3, pp. 504–523. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90022-8
28. Ryll-Nardzewski C. A theory of pursuit and evasion, *Advances in game theory. Vol. 52*, Princeton University Press, 1964, pp. 113–127.
29. Elliott R. J., Kalton N. J. The existence of value in differential games, *Memoirs of the AMS. No. 126*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1972. https://bookstore.ams.org/memo-1-126/
30. Chentsov A. G. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
31. Chentsov A. G. Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 49, pp. 17–54 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-02
32. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972.
33. Gamkrelidze R. V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Tbilisi

University, 1977.
34. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, North-Holland, 1967.
35. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
36. Billingsley P. *Convergence of probability measures*, New York: John Wiley, 1968.
37. Chentsov A. G. On an alternative in a class of quasistrategies for a differential approach–evasion game, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 10, pp. 1801–1808 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4097
38. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience, 1958.
39. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986.
40. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
41. Chentsov A. G. The program iteration method for differential game of guidance–evasion, UPI, Sverdlovsk, 1979, 103 p. Deposited in VINITI, no. 1933-79 (in Russian).

Received 02.10.2020

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. Some questions of differential game theory with phase constraints, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 138–184.