

УДК 517.977.5

© Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин

## ИМПУЛЬСНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ

Рассматривается нелинейная задача управления движениями двухзвенного манипуляционного робота. Свободная механическая система имеет два первых интеграла, находящихся в инволюции. Используются методы классической механики для аналитического интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений. Находится траектория, соединяющая начальное и конечное положения двухзвенного манипуляционного робота в пространстве конфигураций. Импульсные управления в начальный момент времени сообщают необходимую энергию роботу для выхода на эту траекторию. Для гашения скоростей робота в конечном положении также используются импульсные управления. При компьютерной имитации предложенной процедуры перемещения робота обобщенные импульсные управления аппроксимируются прямоугольными импульсами.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, манипуляционный робот, уравнения Гамильтона–Якоби, первые интегралы, импульсное управление, быстрое действие, энергозатратность.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-02

### Введение

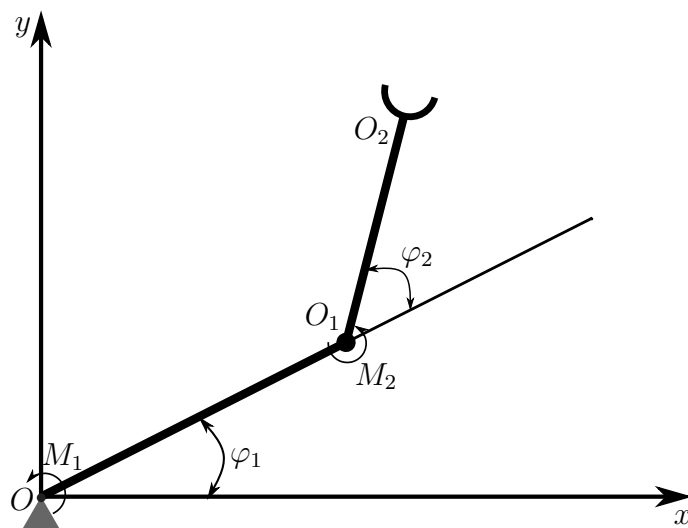
Двухзвенник является важной составной частью многозвенных манипуляторов антропоморфного типа. У таких манипуляторов линейные размеры двух основных звеньев руки (плеча и предплечья) значительно превосходят размеры остальных звеньев (элементов кисти). Основные звенья осуществляют транспортные движения, а звенья кисти придают грузу нужную ориентацию.

Рассматривается двухзвенный манипулятор, состоящий из двух абсолютно твердых тел, совершающих плоскопараллельное движение (рис. 1). Первое тело цилиндрическим шарниром  $O$  связано с неподвижным основанием, а второе тело цилиндрическим шарниром  $O_1$  связано с первым телом. На конце второго тела в точке  $O_2$  укреплен схват, в котором находится перемещаемый объект (груз). Будем предполагать, что линейные размеры схвата и груза много меньше длины звеньев манипулятора и при исследовании транспортных движений считать схват с грузом материальной точкой.

Манипулятор управляется при помощи двух независимых приводов, расположенных в шарнирах  $O$  и  $O_1$  соответственно. Главные моменты сил, создаваемых приводами, равны  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Пусть  $x$  и  $y$  — декартовы координаты схвата (груза). Закон движения схвата определяется формулами  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  схват находится в начальном положении  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  и имеет нулевые проекции скорости  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ . Требуется привести его в момент времени  $t = T_k$  в заданное конечное положение  $x(T_k) = x_T$ ,  $y(T_k) = y_T$  с нулевой скоростью  $\dot{x}(T_k) = 0$ ,  $\dot{y}(T_k) = 0$ .

Задача управления состоит в нахождении программных законов изменения управляющих моментов  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ , обеспечивающих приведение схвата манипулятора из начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия.

Основными требованиями функционирования роботов являются: время транспортной операции, энергозатраты и точность приведения в заданное конечное положение.



**Рис. 1.** Двухзвенный манипулятор

Различные методы планирования траектории движения манипуляторов описаны в монографии Е. П. Попова, А. Ф. Верещагина и С. Л. Зенкевича [1]. Вопросы разработки эффективных методов управления сложными механическими системами на основе математических моделей, отражающих основные особенности таких систем, рассмотрены в монографии Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевского и С. А. Решмина [2]. В книге [3] подробно изложены основные моменты моделирования и управления роботами. В статье [4] рассматривалась задача о возвращении схвата двухзвенного плоского манипулятора на базовую траекторию. Для решения задачи уравнения движения схвата были линеаризованы в окрестности траектории, что позволило решить поставленную задачу. В работе [5] рассмотрена возможность конструирования манипуляторов со специальными импульсными двигателями, позволяющими использовать свободные движения механизмов. При нахождении решения задачи оптимального быстродействия использовался метод принципа максимума Понтрягина [6].

Особый интерес для исследования представляет управление манипуляторами с упругими звеньями. Специальный метод выбора обобщенных координат и принцип максимума Понтрягина использованы в работе [7] для оптимального проектирования движения упругих мобильных манипуляторов. В работе [8] представлена адаптивная схема граничного управления для подавления упругих колебаний гибкого двухзвенного манипулятора, основанная на математической модели, описанной уравнениями в частных производных и позволяющей учесть динамику изгиба. Для двухзвенного манипулятора с гибкими шарнирами в статье [9] предложен метод оптимального проектирования, обеспечивающий оптимальную производительность помех. Контроллер для осуществления движения по заданной траектории и подавления вибраций гибкого звена предложен в статье [10]. Контроллер основан на применении принципа Гамильтона и математической модели, описываемой обыкновенными и частными дифференциальными уравнениями с учетом упругости звеньев манипулятора. В работе [11] предложен подход с обратным оптимальным управлением для стабилизации движения и отслеживания траектории нелинейной системы плоского манипулятора. Предлагаемый подход, основанный на управляющей функции Ляпунова, позволяет избежать решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Применение строгих математических методов осложняется существенной нелинейностью рассматриваемой математической модели. В классической механике разработаны оригинальные методы интегрирования нелинейных математических моделей, использующие симметрии дифференциальных уравнений, порождающих первые интегралы динамических

систем [12, 13]. В работах [14, 15] первые интегралы уравнений Лагранжа 2 рода использовались при нахождении импульсных управлений для манипуляционного робота с тремя степенями свободы. В настоящей работе первые интегралы канонических уравнений механики используются при нахождении импульсных управлений двухзвенным манипуляционным роботом.

## § 1. Траектории движений манипуляционного робота

При описании движения манипуляционного робота, изображенного на рис. 1, в качестве обобщенных координат удобно использовать углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Здесь  $\varphi_1$  — угол между осью  $Ox$  неподвижной системы координат и прямой  $OO_1$ , соединяющей цилиндрические шарниры, определяет движение первого звена манипулятора. Угол  $\varphi_2$  между прямой  $OO_1$  и  $O_1O_2$ , соединяющей второй шарнир со схватом, определяет относительное движение второго звена манипулятора относительно первого.

Элементарная работа сил на виртуальных перемещениях определяется формулой [16, с. 190]

$$\delta A = M_1 \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_2.$$

Следовательно, моменты  $M_1$  и  $M_2$  являются обобщенными силами.

Декартовы координаты схвата определяются формулами

$$x = L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2), \quad y = L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2),$$

где  $L_1 = |OO_1|$  — длина первого звена,  $L_2 = |O_1O_2|$  — длина второго звена. Будем полагать, что  $L_2 < L_1$ . Следовательно, рабочая зона манипулятора определяется неравенством

$$L_1 - L_2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L_1 + L_2.$$

При выборе в качестве обобщенных координат  $x$  и  $y$  выражения для обобщенных сил усложняются.

Для определения положения схвата будем использовать полярные координаты, позволяющие успешно использовать аналитические методы интегрирования:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

*Л е м м а 1.1. В полярных координатах обобщенные силы определяются формулами*

$$M_\varphi = M_1, \quad M_r = \frac{r^2(M_1 - 2M_2) - (L_1^2 - L_2^2)M_1}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}. \quad (1.1)$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Из треугольника  $\triangle OO_1O_2$  находим связи между старыми  $\varphi_1, \varphi_2$  и новыми обобщенными координатами  $r, \varphi$ . По теореме синусов имеем

$$\frac{\sin (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi)}{L_1} = \frac{\sin (\varphi - \varphi_1)}{L_2} = \frac{\sin \varphi_2}{r}.$$

Отсюда находим

$$\varphi = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_2}{L_1/L_2 + \cos \varphi_2},$$

$$r = L_2 \frac{\sin \varphi_2}{\sin \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_2}{L_1/L_2 + \cos \varphi_2}}.$$

Последняя формула преобразуется к виду

$$r = L_2 \sqrt{1 + \frac{L_1^2}{L_2^2} + 2 \frac{L_1}{L_2} \cos \varphi_2}.$$

Обратное преобразование от новых обобщенных координат к старым определяется формулами

$$\varphi_1 = \varphi - \tilde{\varphi}_1(r), \quad \varphi_2 = \varphi_2(r),$$

где  $\tilde{\varphi}_1(r)$  и  $\varphi_2(r)$  определяются следующим образом

$$\tilde{\varphi}_1(r) = \arctg \frac{\sqrt{4L_1^2 L_2^2 - (r^2 - (L_1^2 + L_2^2))^2}}{r^2 + L_1^2 - L_2^2},$$

$$\varphi_2(r) = \arcsin \frac{\sqrt{4L_1^2 L_2^2 - (r^2 - (L_1^2 + L_2^2))^2}}{2L_1 L_2}.$$

Элементарная работа сил на новых виртуальных перемещениях определяется формулами

$$\delta A = M_1 \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_2 = M_1 \delta \varphi + (\varphi_2'(r) M_2 - \tilde{\varphi}_1'(r) M_1) \delta r = M_\varphi \delta \varphi + M_r \delta r.$$

Вычисляя производные  $\varphi_2'(r)$ ,  $\tilde{\varphi}_1'(r)$ , находим новые обобщенные силы (1.1).  $\square$

Ограничимся рассмотрением безынерционного манипулятора, когда масса манипулятора много меньше массы перемещаемого груза. Предположение о малости массы манипулятора по сравнению с массой груза выполняется для некоторых исследовательских роботов. Будем считать, что звенья манипулятора безынерционны, а вся масса системы сосредоточена в точке  $O_2$  и равна массе груза  $m$ . Работа манипулятора выполняется в горизонтальной плоскости, поэтому потенциальная энергия робота постоянна.

Кинетическая энергия системы определяется формулами

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

а обобщенные импульсы — формулами

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}.$$

Находим функцию Гамильтона

$$H = H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = T|_{(\dot{r}, \dot{\varphi}) \rightarrow (p_r, p_\varphi)} = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2).$$

Система канонических уравнений Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{m} p_r, & \dot{\varphi} &= \frac{1}{mr^2} p_\varphi, \\ \dot{p}_r &= \frac{1}{mr^3} p_\varphi^2 + M_r, & \dot{p}_\varphi &= M_\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Управляемая система (1.2) существенно нелинейна. При ее исследовании будем использовать методы теории интегрирования гамильтоновых систем, применяя их к свободной гамильтоновой системе следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{m} p_r, & \dot{\varphi} &= \frac{1}{mr^2} p_\varphi, \\ \dot{p}_r &= \frac{1}{mr^3} p_\varphi^2, & \dot{p}_\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

**Л е м м а 1.2.** *Свободная гамильтонова система (1.3) имеет четыре независимых первых интеграла*

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2) = \alpha_1, \quad (1.4)$$

$$p_\varphi = \alpha_2, \quad (1.5)$$

$$\pm \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2/r^2}} = t + \beta_1, \quad (1.6)$$

$$\varphi \pm \int \frac{\alpha_2 dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2/r^2}} = \beta_2. \quad (1.7)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Гамильтонова система (1.3) имеет два независимых первых интеграла: интеграл энергии (1.4) и циклический интеграл (1.5). Эти интегралы находятся в инволюции и, согласно теореме Лиувилля [12, с. 238], система канонических уравнений (1.3) интегрируема.

Используем методику интегрирования гамильтоновых систем, описанную в [13, с. 131]. Разрешаем систему уравнений (1.4), (1.5) относительно обобщенных импульсов. Имеем

$$p_r = f_r(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}},$$

$$p_\varphi = f_\varphi(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2.$$

Линейная форма дифференциалов обобщенных координат

$$f_r(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) dr + f_\varphi(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) d\varphi$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2)$ , то есть

$$dW(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 d\varphi.$$

Находим

$$W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 \varphi. \quad (1.8)$$

Функция (1.8) является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби.

Используя теорему Якоби [13, с. 135], находим два дополнительных первых интеграла канонической системы уравнений (1.3).

$$\frac{\partial W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} = \beta_2.$$

Вычисляя производные, получим явные формы дополнительных первых интегралов (1.6), (1.7).  $\square$

**Т е о р е м а 1.1.** *Пусть заданы начальное положение  $r_0 \in [L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  и конечное положение  $r_T \in [L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ ,  $\varphi_T \in [0, \pi]$  такие, что  $r_0 \neq r_T$ ,  $\varphi_0 \neq \varphi_T$ . Тогда траектория, соединяющая начальное и конечное положение, определяется формулой*

$$|\arctg(rp + \sqrt{r^2 p^2 - 1}) - \arctg(r_0 p + \sqrt{r_0^2 p^2 - 1})| = \frac{1}{2} |\varphi - \varphi_0|, \quad (1.9)$$

где параметр  $p$  является решением уравнения

$$|\arctg(r_T p + \sqrt{r_T^2 p^2 - 1}) - \arctg(r_0 p + \sqrt{r_0^2 p^2 - 1})| = \frac{1}{2} |\varphi_T - \varphi_0|, \quad (1.10)$$

**Доказательство.** Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  система (1.3) имеет начальные обобщенные импульсы  $p_r(0) = p_r^0$ ,  $p_\varphi(0) = p_\varphi^0$ . С учетом начальных условий уточним вид функции (1.8). Имеем  $W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = \Phi(r, \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \varphi$ , где

$$\Phi(r, \alpha_1, \alpha_2) = \text{sign}(p_r^0) \int_{r_0}^r \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{z^2}} dz = \text{sign}(p_r^0) |\alpha_2| \int_{r_0 p}^{r p} \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} du,$$

$$p = \frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{|\alpha_2|}, \quad \alpha_2 = p_\varphi^0, \quad \alpha_1 = \frac{p^2 (p_\varphi^0)^2}{2m}.$$

Используя подстановку Эйлера [17, с. 57], вычисляем интеграл

$$\Psi(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} du = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctg(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

В результате находим функцию

$$\Phi(r, \alpha_1, \alpha_2) = \text{sign}(p_r^0) |p_\varphi^0| (\Psi(pr) - \Psi(pr_0)),$$

и первый интеграл (1.7) преобразуется к виду (1.9).

Уравнение (1.9) определяет траекторию движения груза в конфигурационном (координатном) пространстве. Траектория проходит через начальное положение груза. Для ее прохождения через конечное положение требуется выполнение условия (1.10).  $\square$

Первый интеграл (1.6) принимает следующий вид

$$|\sqrt{r^2 p^2 - 1} - \sqrt{r_0^2 p^2 - 1}| = \alpha t, \quad (1.11)$$

где  $\alpha = p^2 |p_\varphi^0| / m$ , а  $|p_\varphi^0|$  является свободным управляющим параметром. Из полученных выражений (1.9), (1.11) находим закон движения груза по траектории

$$r = r(t) = \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 + 2\alpha \text{sign}(r_T - r_0) \sqrt{r_0^2 p^2 - 1} t + r_0^2 p^2}}{p},$$

$$\varphi = \varphi(t) = \varphi_0 + 2|\arctg(r(t)p + \sqrt{r(t)^2 p^2 - 1}) - \arctg(r_0 p + \sqrt{r_0^2 p^2 - 1})| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0).$$

Формула (1.11) определяет закон движения груза по траектории в координатном пространстве. Если выполнено условие (1.10), то время движения груза до конечной точки определяется формулой

$$T_k = \frac{m|\sqrt{r_T^2 p^2 - 1} - \sqrt{r_0^2 p^2 - 1}|}{p^2 |p_\varphi^0|}.$$

## § 2. Оптимизация движений манипуляционного робота

Переходим к постановке задачи управления для системы канонических уравнений (1.2). Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  груз находится в начальном положении  $r(0) = r_0 \in [L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0 \in [0, \pi]$  и имеет нулевые обобщенные импульсы  $p_r(0) = 0$ ,  $p_\varphi(0) = 0$ . Требуется привести его в конечное положение  $r(T_k) = r_T \in [L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ ,  $\varphi(T_k) = \varphi_T \in [0, \pi]$  с нулевыми обобщенными импульсами  $p_r(T_k) = 0$ ,  $p_\varphi(T_k) = 0$ . Задача управления для системы (1.2) состоит в нахождении программных законов изменения управляющих моментов  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ , обеспечивающих приведение груза из заданного начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия.

При отсутствии управляющих моментов начальное и конечное состояние системы являются ее положениями равновесия. Поэтому без внешних воздействий невозможен переход системы из начального состояния в конечное. Покажем, что эти внешние воздействия на систему можно свести к сообщению ей некоторых обобщенных импульсов в начальный и конечный моменты времени. Рассмотрим множество программных управлений, определяемых формулами

$$\begin{aligned} M_1(t) &= S_1^0 \delta(t) + S_1^T \delta(T_k - t), \\ M_2(t) &= S_2^0 \delta(t) + S_2^T \delta(T_k - t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\delta(\cdot)$  — функция Дирака.

Качество манипуляционного робота определяется временем перехода из начального в конечное положение равновесия и энергозатратами этой операции. Выберем следующий показатель качества

$$J(M_1, M_2) = E(M_1, M_2) + kT_k(M_1, M_2), \quad (2.2)$$

где  $E(M_1, M_2)$  — энергия, необходимая для перехода из начального в конечное положение равновесия,  $T_k(M_1, M_2)$  — время этого перехода, положительное число  $k$  является заданным весовым коэффициентом.

В классе допустимых импульсных управлений (2.1) требуется найти оптимальные программные управления  $M_1^0(\cdot)$ ,  $M_2^0(\cdot)$ , для которых показатель качества (2.2) принимает минимальное значение.

**Т е о р е м а 2.1.** *В классе допустимых импульсных управлений (2.1) оптимальные управления, реализующие перевод системы (1.2) из начального в конечное положение равновесия определяется формулами*

$$\begin{aligned} M_1^0(t) &= |p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) (\delta(t) - \delta(T_k - t)), \\ M_2^0(t) &= \frac{|p_\varphi^0|}{2} \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) \left( \delta(t) (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_0^{-2}) - \delta(T_k - t) (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}) \right) + \\ &+ \frac{|p_\varphi^0|}{2} \text{sign}(r_T - r_0) \left( \delta(T_k - t) r_T \sqrt{(p^2 - r_T^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)} - \right. \\ &\left. - \delta(t) r_0 \sqrt{(p^2 - r_0^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)} \right), \end{aligned}$$

где значение параметра  $p_\varphi^0$  определяется формулой

$$|p_\varphi^0| = \left( \frac{km^2}{2p^4} \left| \sqrt{r_T^2 p^2 - 1} - \sqrt{r_0^2 p^2 - 1} \right| \right)^{1/3}. \quad (2.3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Найдем обобщенные импульсы необходимые в начальный момент времени для вывода манипулятора на построенную траекторию и гашения скорости в конечный момент времени. Имеем  $p_\varphi(+0) = p_\varphi^0$ ,  $p_\varphi(T_k - 0) = p_\varphi^0$ ,

$$p_r(+0) = \text{sign}(r_T - r_0) \sqrt{(p_\varphi^0)^2 (p^2 - r_0^{-2})} = \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_0^{-2}},$$

$$p_r(T_k - 0) = \text{sign}(r_T - r_0) \sqrt{(p_\varphi^0)^2 (p^2 - r_T^{-2})} = \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_T^{-2}}.$$

Импульсные управления при выводе на траекторию в начальный момент времени определяются формулами

$$M_1^0(t) = S_1^0 \delta(t), \quad M_2^0(t) = S_2^0 \delta(t).$$

Им соответствуют следующие уравнения системы (1.2)

$$\dot{p}_\varphi = S_1^0 \delta(t), \quad \dot{p}_r = \frac{1}{mr^3} p_\varphi^2 + \frac{r^2(S_1^0 - 2S_2^0)\delta(t) - (L_1^2 - L_2^2)S_1^0 \delta(t)}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}.$$

Отсюда получим

$$p_\varphi(+0) = S_1^0, \quad p_r(+0) = \frac{r_0^2(S_1^0 - 2S_2^0) - (L_1^2 - L_2^2)S_1^0}{r_0\sqrt{(r_0^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r_0^2)}}.$$

Из приведенных уравнений находим импульсы  $S_1^0, S_2^0$

$$\begin{aligned} S_1^0 &= |p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0), \\ S_2^0 &= \frac{1}{2} \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) |p_\varphi^0| (1 - (L_1^2 - L_2^2)r_0^{-2}) - \\ &- \frac{1}{2} \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_0 \sqrt{(p^2 - r_0^{-2})(1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2})((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)}. \end{aligned}$$

Импульсные управления при гашении скорости в конечный момент времени определяются формулами

$$M_1^T(t) = S_1^T \delta(T_k - t), \quad M_2^T(t) = S_2^T \delta(T_k - t).$$

Им соответствуют следующие уравнения системы (1.2)

$$\dot{p}_\varphi = S_1^T \delta(T_k - t), \quad \dot{p}_r = \frac{1}{mr^3} p_\varphi^2 + \frac{r^2(S_1^T - 2S_2^T)\delta(T_k - t) - (L_1^2 - L_2^2)S_1^T \delta(T_k - t)}{r\sqrt{(r^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r^2)}}.$$

Отсюда получим

$$p_\varphi(T_k - 0) = -S_1^T, \quad p_r(T_k - 0) = -\frac{r_T^2(S_1^T - 2S_2^T) - (L_1^2 - L_2^2)S_1^T}{r_T\sqrt{(r_T^2 - (L_1 - L_2)^2)((L_1 + L_2)^2 - r_T^2)}}.$$

Из приведенных уравнений находим импульсы  $S_1^T, S_2^T$

$$\begin{aligned} S_1^T &= -|p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0), \\ S_2^T &= -\frac{1}{2} \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) |p_\varphi^0| (1 - (L_1^2 - L_2^2)r_T^{-2}) + \\ &+ \frac{1}{2} \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_T \sqrt{(p^2 - r_T^{-2})(1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2})((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)}. \end{aligned}$$

Вычислим работы импульсных сил при выходе на траекторию в начальный момент времени и гашении скорости в конечный момент времени. При выходе на траекторию в начальный момент времени работа равняется [18, с. 153]

$$A_0 = \frac{1}{2} (S_1^0 \dot{\varphi}_1(+0) + S_2^0 \dot{\varphi}_2(+0))$$

Имеем  $\dot{\varphi}_1(+0) = \dot{\varphi}(+0) - \tilde{\varphi}'_1(r_0)$ ,  $\dot{\varphi}_2(+0) = \varphi'_2(r_0)\dot{r}(+0)$ , где

$$\tilde{\varphi}'_1(r_0) = -\frac{1 - (L_1^2 - L_2^2)r_0^{-2}}{r_0\sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2})((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)}},$$



$$\varphi_2'(r_0) = -\frac{2}{r_0 \sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)}}.$$

Из системы уравнений (1.2) находим

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(+0) &= \frac{1}{mr_0^2} p_\varphi(+0) = \frac{p_\varphi^0}{mr_0^2} = \frac{|p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0)}{mr_0^2}, \\ \dot{r}(+0) &= \frac{1}{m} p_r(+0) = \frac{\text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_0^{-2}}}{m}.\end{aligned}$$

Преобразованная формула работы выхода на траекторию имеет вид

$$A_0 = \frac{1}{2} S_1^0 \dot{\varphi}(+0) + \frac{1}{2} (S_2^0 \varphi_2'(r_0) - S_1^0 \tilde{\varphi}_1'(r_0)) \dot{r}(+0).$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (S_2^0 \varphi_2'(r_0) - S_1^0 \tilde{\varphi}_1'(r_0)) = \frac{S_1^0 (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_0^{-2}) - 2S_2^0}{2r_0 \sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)}},$$

где

$$\begin{aligned}S_1^0 (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_0^{-2}) - 2S_2^0 &= |p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_0^{-2}) - \\ &\quad - \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) |p_\varphi^0| (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_0^{-2}) + \\ &+ \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_0 \sqrt{(p^2 - r_0^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)} = \\ &= \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_0 \sqrt{(p^2 - r_0^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_0^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_0^{-2} - 1)}.\end{aligned}$$

Находим

$$\frac{1}{2} (S_2^0 \varphi_2'(r_0) - S_1^0 \tilde{\varphi}_1'(r_0)) = \frac{1}{2} \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_0^{-2}}.$$

Работа выхода на траекторию определяется формулой

$$A_0 = \frac{|p_\varphi^0|^2}{2mr_0^2} + \frac{|p_\varphi^0|^2 (p^2 - r_0^{-2})}{2m} = \frac{|p_\varphi^0|^2 p^2}{2m}.$$

При гашении скорости в конечный момент времени работа равняется [18, с. 153]

$$A_T = \frac{1}{2} (S_1^T \dot{\varphi}_1(T_k - 0) + S_2^T \dot{\varphi}_2(T_k - 0)).$$

Имеем  $\dot{\varphi}_1(T_k - 0) = \dot{\varphi}(T_k - 0) - \tilde{\varphi}_1'(r_T) \dot{r}(T_k - 0)$ ,  $\dot{\varphi}_2(T_k - 0) = \varphi_2'(r_T) \dot{r}(T_k - 0)$ , где

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1'(r_T) &= -\frac{1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}}{r_T \sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)}}, \\ \varphi_2'(r_T) &= -\frac{2}{r_T \sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)}}.\end{aligned}$$

Из системы уравнений (1.2) находим

$$\dot{\varphi}(T_k - 0) = \frac{1}{mr_T^2} p_\varphi(T_k - 0) = \frac{|p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0)}{mr_T^2},$$

$$\dot{r}(T_k - 0) = \frac{1}{m} p_r(T_k - 0) = \frac{\text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_T^{-2}}}{m}.$$

Продолжим вычисления работы при гашении скорости в конечный момент времени

$$A_T = \frac{1}{2} S_1^T \dot{\varphi}(T_k - 0) + \frac{1}{2} (S_2^T \varphi_2'(r_T) - S_1^T \tilde{\varphi}_1'(r_T)) \dot{r}(T_k - 0).$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (S_2^T \varphi_2'(r_T) - S_1^T \tilde{\varphi}_1'(r_T)) = \frac{S_1^T (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}) - 2S_2^T}{2r_T \sqrt{(1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)}},$$

где

$$\begin{aligned} S_1^T (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}) - 2S_2^T &= -|p_\varphi^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}) + \\ &+ \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) |p_\varphi^0| (1 - (L_1^2 - L_2^2) r_T^{-2}) - \\ &- \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_T \sqrt{(p^2 - r_T^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)} = \\ &= -\text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| r_T \sqrt{(p^2 - r_T^{-2}) (1 - (L_1 - L_2)^2 r_T^{-2}) ((L_1 + L_2)^2 r_T^{-2} - 1)}. \end{aligned}$$

Находим

$$\frac{1}{2} (S_2^T \varphi_2'(r_T) - S_1^T \tilde{\varphi}_1'(r_T)) = -\frac{1}{2} \text{sign}(r_T - r_0) |p_\varphi^0| \sqrt{p^2 - r_T^{-2}}.$$

Находим работу гашения скорости в конечный момент времени

$$A_T = -\frac{|p_\varphi^0|^2}{2mr_T^2} - \frac{|p_\varphi^0|^2 (p^2 - r_T^{-2})}{2m} = -\frac{|p_\varphi^0|^2 p^2}{2m}.$$

Энергия необходимая для выхода груза из начального положения равновесия на траекторию равняется  $|p_\varphi^0|^2 p^2 / 2m$ . Энергия необходимая для схода груза с траектории в конечном положении равновесия равняется  $|p_\varphi^0|^2 p^2 / 2m$ . Энергия необходимая для перехода груза из начального положения в конечное по траектории свободного движения равна

$$E = A_0 + |A_T| = \frac{|p_\varphi^0|^2 p^2}{m}.$$

Значения показателя качества на допустимых управлениях определяется формулой

$$J(M_1, M_2) = E(M_1, M_2) + kT_k(M_1, M_2) = \frac{|p_\varphi^0|^2 p^2}{m} + k \frac{m |\sqrt{r_T^2 p^2 - 1} - \sqrt{r_0^2 p^2 - 1}|}{p^2 |p_\varphi^0|}.$$

Минимальное значение показателя качества достигается при значении параметра, определяемого формулой (2.3).  $\square$

### §3. Численное моделирование

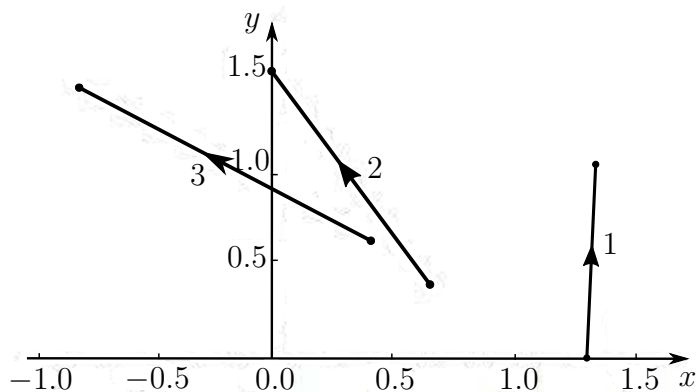
При численном моделировании системы (1.2) использовались следующие значения параметров системы:  $m = 1$ ,  $L_1 = 0,5$ ,  $L_2 = 1,2$ . Начальное положение определялось координатами  $r_0$ ,  $\varphi_0$ , а конечное положение координатами  $r_T$ ,  $\varphi_T$ . Для нахождения оптимальных импульсных управлений используются формулы, приведенные в формулировке теоремы 2.1. Идеальные импульсные управления аппроксимируются прямоугольными импульсами. Основные результаты представлены в таблице 1.

Соответствующим постановкам задач из таблицы соответствуют пронумерованные траектории движения механической системы на плоскости  $(x, y)$ , представленные на рис. 2.

**Таблица 1.** Результаты численного моделирования

№	$(r_0, \varphi_0)$	$(r_T, \varphi_T)$	$k$	$p_\varphi$	$T_k(M_1, M_2)$	$E(M_1, M_2)$	$J(M_1, M_2)$
1	(1,3 , 0)	(1,65 , $\pi/5$ )	0,25	3	0,42	5,332	5,437
				0,643 *	1,96	0,245	0,735
				0,6	2,101	0,213	0,739
2	(0,75 , $\pi/6$ )	(1,5 , $\pi/2$ )	1	1	0,974	1,778	2,752
				0,65 *	1,5	0,75	2,25
				0,5	1,949	0,444	2,393
3	(0,75 , $\pi/3$ )	(1,65 , $2\pi/3$ )	1,25	1	1,072	1,783	3,123
				0,722 *	1,486	0,928	2,785
				0,5	2,143	0,446	3,125

\* оптимальное управление для заданного весового коэффициента  $k$



**Рис. 2.** Проекция траекторий на плоскость  $(x, y)$

#### § 4. Заключение

В данной статье представлены импульсные управления, позволяющее приводить манипулятор из заданного начального положения равновесия в конечное положение равновесия. Предложено оптимальное значение импульса для минимизации критерия качества, учитывающего время работы манипулятора и энергозатратность выполняемой работы. Численные вычисления показывают эффективность предложенного метода импульсного управления. При замене идеальных импульсов прямоугольными переходим к релейным программным управлениям. Предложенный в работе метод планируется использовать для нахождения программных импульсных управлений для инерционного манипуляционного робота. В работе [6, с. 236] для описания движения груза безынерционного манипулятора в полярных координатах вместо канонических уравнений (1.2) использовались уравнения Лагранжа 2 рода. Для нахождения релейных программных управлений применялся принцип максимума Л. С. Понтрягина. При реализации этого подхода использовалась численная процедура последовательных приближений для принципа максимума, предложенная в работе И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько [19].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978.
2. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.

3. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot modeling and control. New York: Wiley, 2006.
4. Лутманов С. В., Куксенко Л. В., Попова Е. С. Задачи управления двухзвенным манипулятором с вращательными кинематическими парами // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 6 (часть 4). С. 886–891.
5. Сосоров Е. В. Методы расчета и проектирования манипуляционных систем с импульсными двигателями: автореферат дис. . . . канд. техн. наук. Улан-Удэ, 2003.
6. Черноушко Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
7. Korayem M. H., Rahimi H. N., Nikoobin A. Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints // *Appl. Math. Model.* 2012. Vol. 36. No. 7. P. 3229–3244. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.10.002>
8. Zhang L., Liu J. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model // *IET Control Theory Appl.* 2013. Vol. 7. No. 1. P. 43–51. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0593>
9. Yun J. N., Su J. B. Design of a disturbance observer for a two-link manipulator with flexible joints // *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* 2014. Vol. 22. No. 2. P. 809–815. <https://doi.org/10.1109/TCST.2013.2248733>
10. Cao F., Liu J. An adaptive iterative learning algorithm for boundary control of a coupled ODE–PDE two-link rigid-flexible manipulator // *J. Franklin Inst.* 2017. Vol. 354. No. 1. P. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.10.013>
11. Ornelas-Tellez F., Sanchez E. N., Loukianov A. G. Inverse optimal control for discrete-time nonlinear systems via passivation // *Optimal Control Appl. Methods.* 2014. Vol. 35. No. 1. P. 110–126. <https://doi.org/10.1002/oca.2062>
12. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
13. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.
14. Dolgii Yu. F., Sesekin A. N., Chupin I. A. Impulse control of the manipulation robot // *Ural Mathematical Journal.* 2019. Vol. 5. No. 2. P. 13–20. <https://doi.org/10.15826/umj.2019.2.002>
15. Chupin I. A., Dolgii Yu. F., Sesekin A. N. The controlling of robot with three degrees of freedom // *AIP Conference Proceedings.* 2020. Vol. 2312. Issue 1. Article ID 070030. <https://doi.org/10.1063/5.0032335>
16. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969.
18. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983.
19. Крылов И. А., Черноушко Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.

Поступила в редакцию 15.03.2021

Долгий Юрий Филиппович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6725-8370>

E-mail: [yurii.dolgii@imm.uran.ru](mailto:yurii.dolgii@imm.uran.ru)

Чупин Илья Алексеевич, аспирант, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9296-6667>

E-mail: [mr.tchupin@yandex.ru](mailto:mr.tchupin@yandex.ru)

**Цитирование:** Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин. Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2021. Т. 57. С. 77–90.

*Keywords:* optimal control, manipulation robot, Hamilton–Jacobi equations, first integrals, impulse control, speed, energy consumption.

MSC2020: 49N25, 49L12, 70H20

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-02

A nonlinear problem of controlling the movements of a two-link manipulation robot is considered. The free mechanical system has two first integrals in involution. Methods of classical mechanics are used for analytical integration of the system of nonlinear differential equations. A trajectory connecting the initial and final positions of the two-link manipulation robot in the configuration space is found. Impulse controls at the initial moment of time impart the necessary energy to the robot to enter this trajectory. Impulse controls are also used to damp the speeds of the robot at the end position. In a computer simulation of the proposed procedure for moving the robot, generalized impulse controls are approximated by rectangular impulses.

#### REFERENCES

1. Popov E. P., Vereshchagin A. F., Zenkevich S. L. *Manipulyatsionnye roboty: dinamika i algoritmy* (Manipulative robots: dynamics and algorithms), Moscow: Nauka, 1978.
2. Chernous'ko F. L., Anan'evskii I. M., Reshmin S. A. *Metody upravleniya nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* (Methods for control of nonlinear mechanical systems), Moscow: Fizmatlit, 2006.
3. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot modeling and control*, New York: Wiley, 2006.
4. Lutmanov S. V., Kyksenok L. V., Popova E. S. *Zadachi upravleniya dvukhzvennym manipulyatorom s vrashchatel'nymi kinematicheskimi parami* (Control problems for a two-link manipulator with rotary kinematic pairs), *Fundamentalnye Issledovaniya*, 2013, no. 6 (part 4), pp. 886–891 (in Russian).
5. Sosorov E. V. *Methods for calculating and designing manipulation systems with impulse motors*, Abstract of Cand. Sci. (Eng.) Dissertation, Ulan-Ude, 2003, 20 p. (In Russian).
6. Chernous'ko F. L., Bolotnik N. N., Gradetskii V. G. *Manipulyatsionnye roboty* (Manipulation robots), Moscow: Nauka, 1989.
7. Korayem M. H., Rahimi H. N., Nikoobin A. Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints, *Appl. Math. Model*, 2012, vol. 36, no. 7, pp. 3229–3244. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.10.002>
8. Zhang L., Liu J. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model, *IET Control Theory Appl.*, 2013, vol. 7, no. 1, pp. 43–51. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0593>
9. Yun J. N., Su J. B. Design of a disturbance observer for a two-link manipulator with flexible joints, *IEEE Trans. Control Syst. Techn.*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 809–815. <https://doi.org/10.1109/TCST.2013.2248733>
10. Cao F., Liu J. An adaptive iterative learning algorithm for boundary control of a coupled ODE–PDE two-link rigid-flexible manipulator, *J. Franklin Inst.*, 2017, vol. 354, no. 1, pp. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.10.013>
11. Ornelas-Tellez F., Sanchez E. N., Loukianov A. G. Inverse optimal control for discrete-time nonlinear systems via passivation, *Optimal Control Appl. Methods*, 2014, vol. 35, no. 1, pp. 110–126. <https://doi.org/10.1002/oca.2062>
12. Arnol'd V. I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* (Mathematical methods of classical mechanics), Moscow: Nauka, 1989.
13. Arkhangel'skii Yu. A. *Analiticheskaya dinamika tverdogo tela* (Analytic dynamics of solids), Moscow: Nauka, 1977.

14. Dolgii Yu. F., Sesekin A. N., Chupin I. A. Impulse control of the manipulation robot, *Ural Mathematical Journal*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 13–20. <https://doi.org/10.15826/umj.2019.2.002>
15. Chupin I. A., Dolgii Yu. F., Sesekin A. N. The controlling of robot with three degrees of freedom, *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2313, issue 1, article ID 070030. <https://doi.org/10.1063/5.0032335>
16. Lur'e A. I. *Analiticheskaya mekhanika* (Analytic mechanics), Moscow: Fizmatgiz, 1961.
17. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsia'lnogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* (A course of differential and integral calculus. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1969.
18. Routh E. J. *Dinamika sistemy tverdykh tel* (Dynamics of a system of rigid bodies), Moscow: Nauka, 1983.
19. Krylov I. A., Chernous'ko F. L. On a method of successive approximations for the solution of problems of optimal control, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 2, issue 6, pp. 1371–1382. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90353-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90353-7)

Received 15.03.2021

Dolgii Yurii Filippovich, Doctor Of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;

Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6725-8370>

E-mail: [yurii.dolgii@imm.uran.ru](mailto:yurii.dolgii@imm.uran.ru)

Chupin Il'ya Alekseevich, Post-Graduate Student, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9296-6667>

E-mail: [mr.tchupin@yandex.ru](mailto:mr.tchupin@yandex.ru)

**Citation:** Yu. F. Dolgii, I. A. Chupin. Impulse control of a two-link manipulation robot, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 77–90.