Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2021. Том 57. С. 104–127

УДК 519.833.2

© *В. И. Жуковский, Ю. С. Мухина, В. Э. Романова*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА N ЛИЦ, В КОТОРОЙ СУЩЕСТВУЕТ ПАРЕТОВСКОЕ РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ, НО ОТСУТСТВУЕТ РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ

Рассматривается дифференциальная позиционная линейно-квадратичная игра N лиц. Широкое распространение в теории бескоалиционных дифференциальных игр получило равновесие по Нэшу. Однако равновесие по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым, что является негативом при его практическом использовании. Избежать последствий такой неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Но такое совпадение — явление скорее экзотическое (по крайней мере нам известно лишь три случая такого совпадения). По этой причине предлагается рассмотреть равновесие угроз и контругроз. В статье установлены коэффициентные критерии, при выполнении которых в дифференциальной позиционной линейно-квадратичной игре N лиц существует такое паретовское равновесие угроз и контругроз и одновременно не существует ситуации равновесия по Нэшу, получен явный вид решения игры.

Ключевые слова: бескоалиционные игры в нормальной форме, равновесие по Нэшу, равновесие угроз и контругроз, максимум по Парето.

DOI: 10.20537/2226-3594-2021-57-04

§ 1. Формализация дифференциальной игры

Рассматривается дифференциальная позиционная линейно-квадратичная игра N лиц, заданная упорядоченной четверкой

$$\Gamma_N = \langle \mathbb{N}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathfrak{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$; фиксирован момент окончания игры $\vartheta = \mathrm{const} > 0$, время продолжительности игры $t \in [t_0, \vartheta]$, момент начала игры $t_0 \in [0, \vartheta)$; управляемая система $\mathbf{\Sigma}$ линейна

$$\mathbf{\Sigma} \div \dot{x} = A(t)x + \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$ (символом $\mathbb{R}^k, k \geqslant 1$, как обычно, обозначаем k-мерное действительное евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы по k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, со стандартными скалярными произведениями и евклидовой нормой $\|\cdot\|$); пара $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — позиция игры, (t_0, x_0) — начальная позиция; *стратегию* i-го игрока U_i отождествляем с линейной по x n-вектор-функцией $u_i(t, x)$ $(U_i \div u_i(t, x))$ такой, что $u_i(t, x) = Q_i(t)x$, где $Q_i(\cdot)$ — $n \times n$-матрица с непрерывными на $[0, \vartheta]$ элементами, множество таких матриц обозначаем $\mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]$, итак, выбор своей стратегии i-м игроком сводится к выбору непрерывной $n \times n$-матрицы $Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]$. Множество таких стратегий обозначаем через

$$\mathfrak{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]\}.$$

Используем далее *ситуацию* игры Γ_N — упорядоченный набор $U = (U_1, \ldots, U_N) \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{U}_i$ и Nn-вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$.

С течением времени игра «протекает» следующим образом: каждый из N игроков выбирает свою стратегию $U_i \in \mathfrak{U}_i$ (то есть использует «свою» матрицу $Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n \times n}[0, \vartheta]$ с целью возможно увеличить свою функцию выигрыша (см. далее)); в результате образуется *ситуация* игры $U = (U_1, U_2, \ldots, U_N) \div (Q_1(t)x, Q_2(t)x, \ldots, Q_N(t)x), U \in \mathfrak{U}$. Затем определяется решение $x(t)$ системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = [A(t) + \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} Q_i(t)]x,\ x(t_0) = x_0$, с непрерывными на $[t_0, \vartheta]$ коэффициентами. Эта система имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$, продолжимое на интервал игры $[t_0, \vartheta]$. По этому решению $x(t)$ определяем *реализацию* выбранной i-м игроком стратегии $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$, а также набор $u[t] = (u_1[t], u_2[t], \ldots, u_N[t])$. Заметим, что все эти $u_i[t]$ непрерывны на $[t_0, \vartheta]$, а значит и интегрируемы. *Функция выигрыша* i-го игрока задается квадратичным функционалом, определенным на паре непрерывных вектор-функций $(x(t), u[t]),\ t \in [t_0, \vartheta]$ в виде

$$J_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} u'_j[t] D_{ij} u_j[t]\, dt \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{1.2}$$

в котором, не ограничивая общности, считаем симметричными постоянные $n \times n$-матрицы C_i и D_{ij}; штрих сверху означает операцию транспонирования (x' — n-вектор-строка). В экономических моделях квадратичная форма $x'C_i x$ иногда оценивает затраты на производство, а интегральное слагаемое обычно характеризует инвестиции, вносимые в такое производство. Если $C_i < 0$ (квадратичная форма $x'C_i x$ определенно отрицательна), а $D_{ii} > 0$ (соответственно форма $u'_i[t]D_{ii}u_i[t]$ определенно положительна), то стремление i-го игрока увеличить свою функцию выигрыша $J_i(U, t_0, x_0)$ означает стремление i-м игроком увеличить инвестиции в свое производство с одновременным снижением затрат, при $D_{ij} < 0$ $(i \neq j)$ характерно стремление j-го уменьшить инвестиции. Широкое распространение в теории бескоалиционных дифференциальных игр получило решение вида равновесия по Нэшу.

По мнению корифеев математической теории игр, равновесию, как приемлемому решению дифференциальной игры, должно быть присуще свойство *устойчивости*: отклонение от него отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклонившегося. Решение, предложенное в [1, 2] Джоном Форбсом Нэшем (мл) (равновесие по Нэшу, обозначаем РН) полностью отвечает этому требованию. Однако «And in the sun there are the spots»: множество ситуаций равновесия по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым. Так в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1, 2\},\ \{X_i = [-1; 1]\}_{i=1,2},\ \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество X^e равновесных по Нэшу ситуаций будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = \text{const} \in [-1; 1]\},\ f_i(x^e) = \alpha^2\ (i \in 1, 2).$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-ой и 3-ей четверти координатного угла) во-первых, для $x^{(1)} = (0, 0) \in X^e$ и $x^{(2)} = (1, 1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1, 2)$ и поэтому множество X^e *внутренне неустойчиво*, во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ $(i = 1, 2)$ и поэтому множество X^e *внешне неустойчиво*. Внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу — негатив при его практическом использовании. В первом случае существует ситуация, которая доминирует РН (по всем игрокам), а во втором такая ситуация даже не является равновесной по

Нэшу. Избежать последствия внешней и внутренней неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Однако, такое совпадение — явление скорее экзотическое (по крайней мере нам известно лишь три случая [3, с. 92–93], [4] такого совпадения). Итак, чтобы избежать неприятностей, связанных с внешней и внутренней неустойчивостью, далее добавляем требование максимальности по Парето к определению равновесия угроз и контругроз, предложенному ниже. Однако, прежде всего, приведем общепринятое понятие решения — равновесие по Нэшу (РН) для игры Γ_N.

Определение 1.1. Пару $(U^e, J(U^e, t_0, x_0) = J^e) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^N$ называют *равновесием по Нэшу в игре* Γ_N, если при $\forall(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^N,\ x_0 \neq 0_n$ выполняются условия:

$$\max_{U_i \in \mathfrak{U}_i} J_i(U^e_{-i} \mid\mid U_i, t_0, x_0) = J_i(U^e, t_0, x_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Здесь и далее $(U^e \mid\mid U_i) = (U^e_1, U^e_2, \ldots, U^e_{i-1}, U_i, U^e_{i+1}, \ldots, U^e_N),\ 0_n$ – нулевой n-вектор, а $J = (J_1, J_2, \ldots, J_N) \in \mathbb{R}^N,\ -i = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N;\quad \mathfrak{U}_{-i} = \prod\limits_{\substack{j \in \mathbb{N}/\{i\} \\ j \neq i}}^{N} \mathfrak{U}_j.$

Заметим, что определение 1.1 из [5] отвечает эгоистическим стремлениям каждого игрока «обогатиться только самому». Добавление в понятие 1.1 ограничений $x_0 \neq 0_n$, $\forall(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^N$ связано с требованием петросяновской динамической устойчивости и тем, что они выполнимы, если мы находим равновесие с помощью метода динамического программирования.

Перейдем к равновесию угроз и контругроз (РУиК). Впервые в русскоязычной литературе оно появилось в книге [6] (см. также [7]). Дело в том, что исследованию позитивных и негативных свойств «царствующей» в экономике концепции равновесия по Нэшу (как решения бескоалиционной игры) посвящен непрекращающийся поток публикаций. В основном они связаны с неединственностью, и, как следствие, отсутствием эквивалентности, взаимозаменяемости, внешней неустойчивости, а также неустойчивостью к одновременному отклонению от таких решений двух и более игроков. Игра «дилемма заключенных» выявила также свойство «улучшаемости». Подробному анализу таких «отрицательных» свойств для дифференциальных позиционных игр посвящена книга В. И. Жуковского и Н. Т. Тынянского [8]. Вывод, к которому приводят авторы книги: либо использовать те ситуации равновесия по Нэшу, которые одновременно свободны от некоторых указанных недостатков, либо следует вводить новые решения бескоалиционной игры, которые, обладая достоинствами ситуации равновесия по Нэшу, позволяли бы избавиться от отдельных ее недостатков. Одной из таких возможностей для дифференциальных игр, связанной с концепцией угроз и контругроз, и посвящена настоящая статья. Используемые в ней понятия основываются на известной в классической теории игр концепции угроз и контругроз. Теоретическим основанием этой концепции стали работы Э. Й. Вилкаса [9, 10]. Термин «активное равновесие» предложил Э. Р. Смольяков [11] в 1983 г., понятие равновесия угроз и контругроз в дифференциальных играх было использовано впервые, по-видимому, в 1974 г. Э. М. Вайсбордом в [12], затем подхвачено первым автором настоящей статьи и упомянутой выше книге 1980 г., но применялась и применяется эта концепция в дифференциальных играх, по нашему мнению, недостаточно широко и крайне редко.

В заключение насколько слов об используемой терминологии. «Угроза — обещание принести какое-либо зло, неприятности». Угрозы — необязательно реальные действия, они могут заключаться в сообщении о возможности такого рода действий (запугивание!). Иногда для смягчения «агрессивного характера» слова «угроза» используют в некоторых публикациях (как синоним) «возражение», «санкция». Сообщение о действии игрока «обнуляющего» угрозу называют «контругрозой» (контрвозражением, контрсанкцией). Концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, появляется уже в начальных публикациях по матричной теории игр [6], но ограничиваются они либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми, но только двух лиц [13–20]. Игры с побочными платежами рассматриваются в статьях А. Н. Реттиевой [21–24]. Дифференциальные игры $N > 2$ участников без побочных платежей не затрагивались, что и явилось (не в последнюю очередь!) толчком к написанию этой работы.

§ 2. Вспомогательные сведения

Напомним, что для симметричной постоянной вещественной $n \times n$-матрицы $D > 0$ $(<)$ означает, что квадратичная форма $u_i' D u_i$ *определенно положительна* (*отрицательна*), то есть при $\forall u_i \in \mathbb{R}^n$ форма $u_i' D u_i$ принимает положительные значения и обращается в ноль тогда и только тогда, когда $u_i = 0_n$, поэтому справедлива эквиваленция $D > 0 \Leftrightarrow -D < 0$ ($-D$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на -1).

В работе воспользуемся свойствами корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$, где E_n — единичная $n \times n$-матрица. В следующих свойствах, не оговаривая особенно, считаем $n \times n$-матрицу D вещественной и симметричной ($D = D'$).

Свойство 2.1. *Если $D = D' > 0$, то все корни $\Delta(\lambda) = 0$ положительны. Для $\Lambda > 0$ наибольшего и $\lambda > 0$ наименьшего из них ($\Lambda \geqslant \lambda > 0$) будет выполнено*

$$0 \leqslant \lambda \|u_i\|^2 \leqslant u_i' D u_i \leqslant \Lambda \|u_i\|^2 \text{ при } \forall u_i \in \mathbb{R}^n, u_i \neq 0_n;$$

здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Свойство 2.2. *Если действительная симметричная $n{\times}n$-матрица $D_{ij} < 0$ и $-\Lambda_{ij}$ — наименьший, а $-\lambda_{ij}$ — наибольший корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ (тогда $-\Lambda_{ij} \leqslant -\lambda_{ij} < 0$), то*

$$-\Lambda_{ij} u_j' u_j \leqslant u_j' D_{ij} u_j \leqslant -\lambda_{ij} u_j' u_j \text{ при } \forall u_j \in \mathbb{R}^n, u_j \neq 0_n.$$

Следующие утверждения посвящаются оценкам наибольшего из корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$.

Свойство 2.3 (Теорема Гирша и Бендиксона [25]). *В условиях свойства* 2.1 (*то есть при* $D = D' > 0$)

$$0 < \Lambda < nM,$$

где M — максимум модулей элементов d_{ij} матрицы $D = (d_{ij})$.

Свойство 2.4 (теорема Паркера [26]). *При $D = D' > 0$ наибольший корень Λ характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ будет*

$$0 < \Lambda < \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |d_{ij}|.$$

Свойство 2.5 (Теорема Пароди [27]). *Пусть вещественная $n{\times}n$-матрица $D = D' = (d_{ij}) > 0$ такова, что*

$$d_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |d_{ij}| = P_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда $D > 0$ и если Λ — наибольшее характеристическое число уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то

$$\min_{i=1,\ldots,n} P_i \leqslant \Lambda \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} (P_i + |d_{ii}|).$$

§ 3. Максимальность по Парето в игре N лиц

Для этого игре Γ_N поставим в соответствие N-критериальную *динамическую задачу*

$$\Gamma_v = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathfrak{U}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,\ldots,N} \rangle,$$

здесь управляемая динамическая система $\mathbf{\Sigma}$ совпадает с (1.1), множество альтернатив $\mathfrak{U}$ совпадает с множеством ситуаций $\mathfrak{U} = \prod_{i=1}^{N} \mathfrak{U}_i$ игры Γ_N, N критериев $J_i(U, t_0, x_0)$ $(i \in \mathbb{N})$ определены в (1.2).

Цель ЛПР (лица, принимающего решение) в задаче Γ_v — выбор такой альтернативы (ситуации) $U^P \in \mathfrak{U}$, при которой все N критериев (1.2) принимали бы одновременно возможно *бóльшие* значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето.

О п р е д е л е н и е 3.1. Альтернатива (ситуация) $U^P = (U_1^P, U_2^P, \ldots, U_N^P) \in \mathfrak{U}$ называется *максимальной по Парето в задаче* Γ_v, если при $\forall U \in \mathfrak{U}$ и $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ несовместна система неравенств

$$J_i(U, t_0, x_0) \geqslant J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

из которых хотя бы одно строгое, при этом вектор

$$J^P = J^P[t_0, x_0] = (J_1^P, \ldots, J_N^P) = (J_1(U^P, t_0, x_0), \ldots, J_N(U^P, t_0, x_0))$$

называется *максимумом по Парето в задаче* Γ_v.

Отметим здесь два обстоятельства, которые сразу следуют из определения 3.1.

С в о й с т в о 3.1. *Справедлива импликация:*

$$J_i(\widetilde{U}, t_0, x_0) > J_i(U^P, t_0, x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J_j(\widetilde{U}, t_0, x_0) < J_j(U^P, t_0, x_0) \text{ для хотя бы одного } j = 1, 2, \ldots, N,\ j \neq i.$$

С в о й с т в о 3.2. *Если для положительных постоянных* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ *имеет место*

$$\max_{U \in \mathfrak{U}} \{J_1(U, t_0, x_0) + \alpha_2 J_2(U, t_0, x_0) + \ldots + \alpha_N J_N(U, t_0, x_0)\} = \mathrm{Idem}\,\{U \to U^P\}, \qquad (3.1)$$

то ситуация U^P — *максимальна по Парето в* Γ_v*; напомним, что* $\mathrm{Idem}\,\{U \to U^P\}$ *означает выражение в фигурных скобках из* (3.1)*, где* U *заменено на* U^P.

Перейдем к понятию равновесного решения игры Γ_N, где вектор $J = (J_1, \ldots, J_N)$ принадлежит $\mathbb{R}^N$.

Более громоздко чем РН выглядит понятие равновесия угроз и контругроз (РУиК). Пусть $U^P = (U_1^P, U_2^P, \ldots, U_N^P)$ — некоторая фиксированная максимальная по Парето ситуация игры Γ_N. Будем считать, что у первого игрока имеется *угроза на ситуацию* U^P, если у него существует такая стратегия $U_1^T \in \mathfrak{U}_1$, что

$$J_1(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0). \qquad (3.2)$$

Наличие угрозы не означает ее обязательное применение, а лишь «animus denuntiandi». Применение угрозы выгодно первому игроку, ибо при этом, согласно (3.2), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации U^P.

Будем считать, что в ответ на угрозу первого игрока U_1^T у второго имеется *«неполная» контругроза*, если у него существует стратегия $U_2^C \in \mathfrak{U}_2$, при которой

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) \leqslant J_1(U_1^P, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0), \qquad (3.3)$$

и у второго игрока имеется *«полная» контругроза*, если существует такая стратегия $U_2^C \in \mathfrak{U}_2$, что одновременно с неравенством (3.3) выполняется

$$J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^P, U_2^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0).$$

Аналогично формализуется контругроза (полная) всех остальных игроков (от третьего до N-го) в ответ на угрозу U_1^T.

При наличии «неполной» контругрозы, второй игрок за счет выбора своей стратегии U_2^C приводит, согласно (3.3), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации U^P (но может и уменьшиться!). Все происходит как по девизу Наполеона I «Order, contre-order, disorder» . Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы. В дополнение к этому, «полная» контругроза побуждает второго к применению U_2^C, ибо при этом в (полученной в результате угрозы и контругрозы) ситуации $(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \dots, U_N^P)$ выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации $(U_1^T, U_2^P, \dots, U_N^P)$.

Аналогично определяется угроза i-го игрока на ситуацию U^P и ответная контругроза (полная) одного из N оставшихся.

Естественно, если в ответ на каждую угрозу на U^P любого игрока у хотя бы одного из оставшихся имеется контругроза, то игроку не имеет смысла применять угрозу, так как в результате реакции (контругрозы) на эту угрозу другого игрока его выигрыш не увеличится (но может и уменьшиться!).

Определение 3.2. Ситуация $U^P = (U_1^P, \dots, U_N^P) \in \mathfrak{U}$ называется *активно равновесной в игре* Γ_N, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0_n,$

(1) U^P максимальна по Парето в Γ_v,

(2) в ответ на каждую угрозу $U_i^T \in \mathfrak{U}_i$ любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется неполная контругроза.

Определение 3.3. Пара $(U^P, J^P) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^N$ называется *равновесием угроз и контругроз в дифференциальной игре* Γ_N, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$,

(1) U^P максимальна по Парето в N-критериальной динамической задаче Γ_v,

(2) в ответ на каждую угрозу $U_i^T \in \mathfrak{U}_i$ любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется полная контругроза.

Из определений 3.2 и 3.3 следует, что любое равновесие угроз и контругроз является одновременно активным равновесием, а равновесие по Нэшу (в силу определения 1.1) не допускает угроз, причем только «самые хорошие» из них (одновременно максимальные по Парето) будут активно равновесными.

Приведенные здесь понятия угроз и контругроз основываются на известной [7] в классической теории игр концепции угроз и контругроз. На ее основе в [7, с. 109] определяются устойчивые коалиционные структуры, впервые, по-видимому, рассмотренные для дифференциальных коалиционных игр в [8]. Концепция «угроз и контругроз» для дифференциальных игр использована Э. М. Вайсбордом в 1974 г. в статье [12], развита В. И. Жуковским в [28, 29]. Теоретическим аспектам посвящены работы Э. Й. Вилкаса [9, 10]. Свой способ классификации решений бескоалиционной игры, включающий, как составную часть, равновесие угроз и контругроз, предложил Э. Р. Смольяков [11]. Им же был введен термин «активное равновесие» (на основе упомянутого определения неполной контругрозы). Понятие активного равновесия для позиционных, дифференциальных, бескоалиционных игр использовалось и в [16]. Способ доказательства существования активной равновесности был предложен первым автором настоящей статьи в [16] и затем успешно применен болгарскими математиками при установлении факта существования такого решения в дифференциальных позиционных играх двух лиц, описываемых уравнениями с частными производными [15, 20], стохастическими [18], в банаховом пространстве [19], уравнениями с постоянным запаздыванием [17].

Активно равновесным ситуациям и равновесиям угроз и контругроз присущи все позитивные свойства ситуации равновесия по Нэшу [13, с. 49]:

(a) они устойчивы к отклонению отдельного игрока;

(b) удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности;

(c) совпадают с седловой точкой в случае антагонистической игры.

Одновременно с тем неулучшаемые равновесия свободны от следующих недостатков [13, с. 58]:

(a) существуют в ряде случаев, когда равновесие по Нэшу отсутствует (например, как в игре Γ_N из настоящей статьи);

(b) в отличие от равновесия по Нэшу неулучшаемы и внутренне устойчивы (в силу паретовости);

(c) наличие в игре равновесия по Нэшу влечет существование некоторых видов неулучшаемых равновесий, выигрыши всех игроков при которых не меньше, чем при равновесии по Нэшу;

(d) наконец, лишь «самые хорошие» ситуации равновесия по Нэшу (которые одновременно максимальны по Парето) являются равновесиями угроз и контругроз. Однако лишь частные виды игр (см. [3,4]) обладают такими «самыми хорошими» равновесиями.

Заметим, что указанные свойства имеют место и для позиционных дифференциальных бескоалиционных игр, а в [13] использована математическая формализация стратегий игроков и порожденных ими движений динамической системы, предложенная Н. Н. Красовским в [30] для антагонистической дифференциальной позиционной игры.

§ 4. Максимальные по Парето ситуации и паретовские выигрыши

Прежде всего приведем вспомогательное утверждение (лемму 4.1).

Рассмотрим N-критериальную *статическую* задачу

$$\Gamma_S = \langle X = \mathbb{R}^{Nn}, \{f_i(u) = u_1' D_{i1} u_1 + \ldots + u_N' D_{iN} u_N\}_{i=1,\ldots,N} \rangle,$$

в которой ЛПР выбирает альтернативу (ситуацию) $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$ с целью достичь одновременно возможно больших значений всех N компонент векторного критерия $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_N(u))$. Аналогом определения 3.1 здесь будет: альтернатива u^P *максимальна по Парето в* Γ_S, если при $\forall u \in \mathbb{R}^{Nn}$ несовместна система неравенств $f_i(u) \geqslant f_i(u^P)$ $(i = 1, \ldots, N)$, из которых хотя бы одно строгое.

Ниже используем аналог свойства 3.2.

Лемма 4.1. *Если в задаче* Γ_S *симметричны* $n \times n$*-матрицы* D_{ij} *и положительные числа* Λ_{ii}, Λ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N,\ i \neq j)$ *таковы, что*

$$D_{ii} > 0, \quad D_{ij} < 0 \ (\text{при } i \neq j), \quad \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21},$$

то существуют положительные числа $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$*, определенные рекуррентным образом:*

$$\alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right), \ldots, \alpha_i^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1i} + \alpha_2^*\Lambda_{2i} + \ldots + \alpha_{i-1}^*\Lambda_{i-1,i}}{\Lambda_{ii}}\right), \ldots,$$
$$\alpha_N^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^*\Lambda_{2N} + \ldots + \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1,N}}{\Lambda_{NN}}\right),$$

при которых квадратичные формы $x' D_i x$ $(i = 1, \ldots, N)$ *в*

$$f(u) = f_1(u) + \alpha_2^* f_2(u) + \ldots + \alpha_N^* f_N(u) = u_1' D_1(\alpha^*) u_1 + \ldots + u_N' D_N(\alpha^*) u_N$$

становятся определенно отрицательными.

Здесь

$$D_i(\alpha^*) = D_{1i} + \alpha_2^* D_{2i} + \ldots + \alpha_N^* D_{Ni} \quad (i = 1, \ldots, N),$$

кроме того, Λ_{ii} *— наибольший корень характеристического уравнения*

$$\Delta_{ii}(\Lambda) = \det\left[D_{ii} - \Lambda E_n\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, N),$$

величина $-\Lambda_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N;\ i \neq j)$ *также наибольший* (*по абсолютной величине наименьший*) *корень уравнения*

$$\delta_{ij}(\Lambda) = \det\left[D_{ij} - \Lambda E_n\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Доказательство. В силу симметричности матриц D_{ii}, D_{ij} $(i = 1, \ldots, N; i \neq j)$, используемых в задаче Γ_S, корни характеристических уравнений $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ и $\delta_{ij}(\Lambda) = 0$ вещественны, причем в силу свойств 2.1 и 2.2 корни $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ положительны, корни $\delta_{ij}(\Lambda) = 0$ — отрицательны и выполнены оценки:

$$\begin{gathered} u_i' D_{ii} u_i \leqslant \Lambda_{ii} u_i' u_i \quad (i = 1, \ldots, N), \\ u_j' D_{ij} u_j \leqslant -\Lambda_{ij} u_j' u_j \quad (j = 1, \ldots, N; i \neq j), \end{gathered}$$

где Λ_{ii} — наибольший из n корней уравнения $\Delta_{ii}(\Lambda) = \det\left[D_{ii} - \Lambda E_n\right] = 0$, а $(-\Lambda_{ij})$ — наибольший из n корней уравнения $\delta_{ij}(\Lambda) = \det\left[D_{ij} - \Lambda E_n\right] = 0$. Поэтому

$$\begin{gathered} f(u) = f_1(u) + \alpha_2^* f_2(u) + \ldots + \alpha_N^* f_N(u) = \\ = u_1'[D_{11} + \alpha_2^* D_{21} + \ldots + \alpha_N^* D_{N1}]u_1 + \ldots + u_N'[D_{1N} + \alpha_2^* D_{2N} + \ldots + \alpha_N^* D_{NN}]u_N \leqslant \\ \leqslant [\Lambda_{11} + \alpha_2^*(-\Lambda_{21}) + \ldots + \alpha_N^*(-\Lambda_{N1})]u_1' u_1 + \ldots + \\ + [(-\Lambda_{1N}) + \alpha_2^*(-\Lambda_{2N}) + \ldots + \alpha_N^* \Lambda_{NN}]u_N' u_N. \end{gathered}$$

Таким образом, $f(u) < 0\ \forall u \in \mathbb{R}^{Nn}, u \neq 0_{Nn}$, если

$$\left\{ \begin{array}{c} \Lambda_{11} + \alpha_2^*(-\Lambda_{21}) + \ldots + \alpha_N^*(-\Lambda_{N1}) < 0, \\ (-\Lambda_{12}) + \alpha_2^* \Lambda_{22} + \ldots + \alpha_N^*(-\Lambda_{N2}) < 0, \\ \vdots \\ (-\Lambda_{1i}) + \alpha_2^*(-\Lambda_{2i}) + \ldots + \alpha_i^* \Lambda_{ii} + \ldots + \alpha_N^*(-\Lambda_{Ni}) < 0, \\ \vdots \\ (-\Lambda_{1N}) + \alpha_2^*(-\Lambda_{2N}) + \ldots + \alpha_N^* \Lambda_{NN} < 0. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Первые два неравенства из (4.1) имеют место (конечно, при $\alpha_j^* > 0,\ j = 3, \ldots, N$), если

$$0 < \frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} < \alpha_2^* < \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}},$$

то есть если $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}$. Возьмем $\alpha_2^* = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \dfrac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)$.

Аналогично выполняется i-е неравенство (для $\alpha_j^* > 0,\ j = i+1, \ldots, N$), если

$$\frac{(-\Lambda_{1,i-1})}{\Lambda_{i,i-1}} + \alpha_2^* \frac{(-\Lambda_{2,i-1})}{\Lambda_{i,i-1}} + \ldots + \alpha_{i-1}^* \frac{\Lambda_{i-1,i-1}}{\Lambda_{i,i-1}} < \alpha_i^* < \frac{\Lambda_{1i}}{\Lambda_{ii}} + \alpha_2^* \frac{\Lambda_{2i}}{\Lambda_{ii}} + \ldots + \alpha_{i-1}^* \frac{\Lambda_{i-1,i}}{\Lambda_{ii}}.$$

Выберем $\alpha_i^* = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Lambda_{1i} + \alpha_2^* \Lambda_{2i} + \ldots + \alpha_{i-1}^* \Lambda_{i-1,i}}{\Lambda_{ii}}\right) > 0$.

Последнее неравенство выполнено для

$$\frac{(-\Lambda_{1,N-1})}{\Lambda_{N,N-1}}+\alpha_2^*\frac{(-\Lambda_{2,N-1})}{\Lambda_{N,N-1}}+\ldots+\alpha_{N-1}^*\frac{\Lambda_{N-1,N-1}}{\Lambda_{N,N-1}}<\alpha_N^*<\frac{\Lambda_{1N}}{\Lambda_{NN}}+\alpha_2^*\frac{\Lambda_{2N}}{\Lambda_{NN}}+\ldots+\alpha_{N-1}^*\frac{\Lambda_{N-1,N}}{\Lambda_{NN}}.$$

Тогда $\alpha_N^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1N}+\alpha_2^*\Lambda_{2N}+\ldots+\alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1,N}}{\Lambda_{NN}}\right)>0.$ □

У т в е р ж д е н и е 4.1. *Если в дифференциальной игре* Γ_N

$$D_{ii}>0,\quad D_{ij}<0,\quad C_i<0\quad (i,j=1,\ldots,N; i\neq j),\qquad \Lambda_{11}\Lambda_{22}<\Lambda_{12}\Lambda_{21}, \tag{4.2}$$

то максимальная по Парето ситуация U^P *в* N*-критериальной задаче* Γ_v *будет*

$$\begin{gathered}U^P=(U_1^P,U_2^P,\ldots,U_N^P)\div(u_1^P(t,x),u_2^P(t,x),\ldots,u_N^P(t,x))=u^P(t,x)=\\=(Q_1^P(t)x,Q_2^P(t)x,\ldots,Q_N^P(t)x)=\\=(-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x,-D_2^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x,\ldots,-D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x),\end{gathered} \tag{4.3}$$

где $\Theta^P(\cdot)$ *— симметричная, непрерывная на* $[0,\vartheta]$ $n\times n$*-матрица*

$$\begin{gathered}\Theta^P(t)=[X^{-1}(t)]'\{C^{-1}(\alpha^*)+\\+\int_t^\vartheta X^{-1}(\tau)[D_1^{-1}(\alpha^*)+D_2^{-1}(\alpha^*)+\ldots+D_N^{-1}(\alpha^*)]X^{-1}(\tau)\,d\tau\}^{-1}X^{-1}(t),\end{gathered} \tag{4.4}$$

и постоянные симметричные $n\times n$*-матрицы*

$$D_i(\alpha^*)=D_{1i}+\alpha_2^*D_{2i}+\ldots+\alpha_N^*D_{Ni}\quad (i=1,\ldots,N); \tag{4.5}$$

положительные числа $\alpha_2^*,\ldots,\alpha_N^*$ *определены рекуррентным образом в лемме* 4.1; $X(t)$ *— фундаментальная матрица системы* $\dot{x}=A(t)x,\ X(\vartheta)=E_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем максимальную по Парето ситуацию U^P, применяя лемму 4.1 (конкретно, используя (4.2)) и метод динамического программирования (МДП) из [5, с. 112]. Само применение МДП, с учетом свойства 3.2, здесь сведется к осуществлению двух этапов. На *первом* для задачи Γ_N нужно найти $N-1$ положительных чисел $\alpha_2^*,\ldots,\alpha_N^*$, а также непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t,x)=x'\Theta(t)x$, $\Theta(t)=\Theta'(t)$ $\forall t\in[0,\vartheta]$ и n-вектор-функции $u_i(t,x,V)$ $(i\in\mathbb{N})$ такие, что $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta,x)=x'C(\alpha^*)x,\quad C(\alpha^*)=C_1+\alpha_2^*C_2+\ldots+\alpha_N^*C_N; \tag{4.6}$$

затем с помощью скалярной функции

$$W(t,x,u_1,\ldots,u_N,V)=\frac{\partial V}{\partial t}+\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'\big(A(t)x+u_1+\ldots+u_N\big)+u_1'D_1(\alpha^*)u_1+\ldots+u_N'D_N(\alpha^*)u_N$$

определить n-вектор-функции $u_i(t,x,V)$ $(i\in\mathbb{N})$, исходя из $\left(\frac{\partial V}{\partial x}=\mathrm{grad}_xV\right)$,

$$\max_{u_1,\ldots,u_N}W(t,x,u_1,\ldots,u_N,V)=\mathrm{Idem}\{u_i\to u_i(t,x,V)\}\quad (i=1,\ldots,N) \tag{4.7}$$

при любых $t\in[0,\vartheta],\ x\in\mathbb{R}^n,\ V\in\mathbb{R}$. Достаточные условия существования $u(t,x,V)$ в (4.7) сводятся к выполнению требований: при $\forall(t,x)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$ достаточно, чтобы

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial W}{\partial u_i}\right|_{u(t,x,V)}=\frac{\partial V}{\partial x}+2D_i(\alpha^*)u_i(t,x,V)=0_n\quad (i=1,\ldots,N),\\ \frac{\partial^2W}{\partial u_i^2}=2D_i(\alpha^*)<0\quad (i=1,\ldots,N),\end{gathered} \tag{4.8}$$

где $D_i(\alpha^*) < 0$ в силу леммы 4.1.

Из (4.8) получаем

$$u_i(t,x,V) = -\frac{1}{2}D_i^{-1}(\alpha^*)\frac{\partial V}{\partial x} \quad (i = 1,\ldots,N). \tag{4.9}$$

Тогда

$$W(t,x,u(t,x,V),V) = W[t,x,V] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' A(t)x -$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'\left(D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*)\right)\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Второй этап. Найдем решение вида $V = V^P(t,x) = x'\Theta^P(t)x,\ \Theta^P(t) = [\Theta^P(t)]'$ дифференциального уравнения с частными производными

$$W(t,x,V) = 0$$

с граничным условием ($C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + \ldots + \alpha_N^* C_N$)

$$V(\vartheta,x) = x'C(\alpha^*)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

то есть для $\forall t \in [0,\vartheta],\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ должно иметь место

$$W[t,x,V(t,x) = x'\Theta^P x] = 0, \quad V(\vartheta,x) = x'C(\alpha^*)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Оба эти требования выполнены, если симметричная $n\times n$-матрица $\Theta^P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати ($0_{n\times n}$ — нулевая $n\times n$-матрица)

$$\dot\Theta^P + A(t)\Theta^P(t) + \Theta^P(t)A(t) - \Theta^P(t)(D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t) = 0_{n\times n},$$
$$\Theta^P(\vartheta) = C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + \ldots + \alpha_N^* C_N.$$

Решение Θ^P полученного матричного уравнения имеет [5, с. 65] вид (4.4). Здесь учтена импликация

$$C_i < 0\ (i = 1,\ldots,N) \Rightarrow C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + \ldots + \alpha_N^* C_N < 0.$$

Наконец, из (4.9) приходим к справедливости (4.3). Таким образом, максимальная по Парето ситуация U^P в задаче Γ_v имеет вид (4.3)–(4.5). □

Перейдем к построению максимальных по Парето выигрышей $J^P = (J_1^P,\ldots,J_N^P) = (J_1(U^P,t_0,x_0),\ldots,J_N(U^P,t_0,x_0))$ с помощью метода динамического программирования.

У т в е р ж д е н и е 4.2. *Пусть выполнены требования* (4.2) (*из утверждения* 4.1) *и для дифференциальной игры* Γ_N *удалось найти* N *скалярных непрерывно дифференцируемых функций вида* $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$ $(i = 1,\ldots,N)$ *таких, что*

(1) $V_i(\vartheta,x) = x'C_i x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*

(2) *система из* N *уравнений с частными производными*

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' N(t)x + x'\Theta^P(t)M_i(t)\Theta^P(t)x = 0,$$
$$V_i(\vartheta,x) = x'C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1,\ldots,N) \tag{4.10}$$

имеет решение вида $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x,\ [\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$ $(i = 1,\ldots,N)$.

Тогда при любой начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ *имеет место*

$$J_i^P = J_i(U^P, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i(t_0)x_0 \ (i = 1, \ldots, N).$$

В (4.10) *непрерывные* $n \times n$*-матрицы*

$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t),$$
$$M_i(t) = \Theta^P(t)[D_1^{-1}(\alpha^*)D_{i1}D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*)D_{iN}D_N^{-1}(\alpha^*)]\Theta^P(t) \ (i = 1, \ldots, N),$$

$n \times n$*-матрицы* $\Theta^P(t)$ *и* $D_i(\alpha^*)$ *приведены в* (4.4)*,* (4.5)*, а симметричные* $n \times n$*-матрицы*

$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]'\{C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)\,d\tau\}Y^{-1}(t) \quad (i = 1, \ldots, N), \quad (4.11)$$

наконец, $Y(t)$ *— фундаментальная матрица решения однородной системы* $\dot{y} = N(t)y$*,* $Y(\vartheta) = E_n$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим скалярные функции

$$W_i[t, x, V_i] = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' N(t)x + [u_1^P(t, x)]'D_{i1}u_1^P(t, x) + \ldots + \\ + [u_N^P(t, x)]'D_{iN}u_N^P(t, x) \quad (i = 1, \ldots, N), \quad (4.12)$$

причем $u_i^P(t, x)$ — n-вектор-функции, определенные в (4.3).

Ищем решение $V_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, N)$ системы из N уравнений с частными производными

$$W_i[t, x, V_i] = 0, \quad V_i(\vartheta, x) = x'C_ix \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1 \ldots, N) \quad (4.13)$$

в виде квадратичной формы $V_i(t, x) = x'\Theta_i(t)x, \ [\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t) \ (i = 1, \ldots, N)$.

Установим два факта.

Во-первых, решению системы (4.12), (4.13) присуще свойство

$$V_i(t_0, x_0) = J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i = 1, \ldots, N), \quad (4.14)$$

где ситуация $U^P = (U_1^P, \ldots, U_N^P)$ имеет вид (4.3). Действительно, если U^P — ситуация из (4.3)–(4.5), то, согласно (4.12) и (4.13), решение $x^P(t)$ системы $\dot{x} = N(t)x, \ x(t_0) = x_0 \neq 0_n$ при $x = x^P(t)$ будет

$$0 = W_i[t, x^P(t), V_i(t, x^P(t))] = \frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial x}\right]' N(t)x^P(t) + \\ + \sum_{j=1}^N [u_j^P(t, x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t, x^P(t)) = \overline{W}_i[t] \quad \forall t \in [t_0, \vartheta] \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от t_0 до ϑ с учетом граничных условий из (4.13), приходим к

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta} \overline{W}_i[t]\,dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_i(t, x^P(t))}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^N [u_j^P(t, x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t, x^P(t))\,dt =$$
$$= V_i(\vartheta, x^P(\vartheta)) - V_i(t_0, x^P(t_0)) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^N [u_j^P(t, x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t, x^P(t))\,dt =$$
$$= x'(\vartheta)C_ix(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^N [u_j^P(t, x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t, x^P(t))\,dt - V_i(t_0, x^P(t_0)) =$$
$$= J_i(U^P, t_0, x_0) - V_i(t_0, x^P(t_0)) \ (i = 1, \ldots, N),$$

откуда следует справедливость равенства (4.14).

Во-вторых установим, что решение $V_i(t,x)$ $(i \in \mathbb{N})$ системы (4.13) имеет вид $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$, симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ представима в виде (4.11). В самом деле, подставив $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$ в (4.13), получаем справедливость (4.14), если только $\Theta_i(t)$ $(i = 1,\ldots,N)$ является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\dot{\Theta}_i + \Theta_i N + N\Theta_i + \Theta^P(t)M_i\Theta^P(t) = 0_{n\times n}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i \quad (i = 1,\ldots,N). \tag{4.15}$$

Подстановкой $\Theta_i(t)$ из (4.11) убедимся, что симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ из (4.11) в самом деле является решением (4.15), что и завершает доказательство утверждения 4.2.□

З а м е ч а н и е 1. Объединение утверждений 4.1 и 4.2 приводит к следующему итоговому результату, касающемуся явного вида максимального по Парето решения $(U^P, J^P) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^N$ игры Γ_N.

Пусть для дифференциальной игры Γ_N

(1) постоянные симметричные $n \times n$-матрицы

$$D_{ii} > 0, \quad D_{ij} < 0, \quad C_i < 0 \quad (i,j = 1,\ldots,N;\ i \neq j);$$

(2) $$[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}].$$

Тогда при $\forall (t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0_n$ будет

$$U^P \div u^P(t,x) = (-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, \ldots, -D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x),$$
$$J^P = (J_1^P, \ldots, J_N^P),\ J_i^P = x_0'\Theta_i(t_0)x_0\ (i = 1,\ldots,N),$$

а симметричные $n \times n$-матрицы $\Theta^P(t)$ и $\Theta_i(t)$ имеют вид:

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1}(\alpha^*) +$$
$$+ \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)[D_1^{-1}(\alpha^*) + D_2^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*)]X^{-1}(\tau)\,d\tau\}^{-1}X^{-1}(t),$$
$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]'\{C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)\,d\tau\}Y^{-1}(t) \quad (i = 1,\ldots,N),$$

$n \times n$-матрица $X(t)$ $(Y(t))$ — фундаментальная матрица решения системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ (соответственно, $\dot{y} = N(t)y,\ Y(\vartheta) = E_n$); матрицы

$$C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^*C_2 + \ldots + \alpha_N^*C_N,\ D_i(\alpha^*) = D_{1i} + \alpha_2^*D_{2i} + \ldots + \alpha_N^*D_{Ni},$$
$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t),$$
$$M_i(t) = \Theta^P(t)[D_1^{-1}(\alpha^*)D_{i1}D_1^{-1}(\alpha^*) + \ldots + D_N^{-1}(\alpha^*)D_{iN}D_N^{-1}(\alpha^*)]\Theta^P(t),$$

положительные числа $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$ определены рекуррентным образом

$$\alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right), \ldots, \alpha_i^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1i} + \alpha_2^*\Lambda_{2i} + \ldots + \alpha_{i-1}^*\Lambda_{i-1,i}}{\Lambda_{ii}}\right), \ldots,$$
$$\alpha_N^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^*\Lambda_{2N} + \ldots + \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1,N}}{\Lambda_{NN}}\right),$$

величина Λ_{ii} $(-\Lambda_{ij})$ — наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $\det[D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$) $(i,j = 1,\ldots,N;\ i \neq j)$.

§ 5. Леммы о мажорантах

Перейдем к утверждениям, которые

(1) позволяют сразу судить об отсутствии в дифференциальных играх вида Γ_N равновесия по Нэшу (конечно, при выполнении (4.2)),

(2) реализуют для Γ_N концепцию равновесия угроз и контругроз.

Причем эти сведения получаются на основании специальной знакоопределенности квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша (1.2)).

Не оговаривая особо, далее предполагаем выполненными ограничения (4.2) и поэтому существует максимальная по Парето в Γ_v ситуация:

$$U^P = (U_1^P, U_2^P, \dots, U_N^P) \div (u_1^P(t,x), u_2^P(t,x), \dots, u_N^P(t,x)) = u^P(t,x) =$$
$$= (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, \dots, Q_N^P(t)x) =$$
$$= (-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, \dots, -D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x).$$

Л е м м а 5.1. *Пусть в* (1.2) *при* $i = 1$ *матрица* $D_{11} > 0$, *тогда для максимальной по Парето в* Γ_N *ситуации* U^P *существует постоянная* $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ *такая, что при* $\forall\alpha \geqslant \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ *и стратегии первого игрока* $U_1^T \div \alpha x$ *будет*

$$J_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0)$$

для любых начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В утверждении 4.2 уже установлено существование функции Беллмана $V_1(t,x) = x'\Theta_1(t)x$, для которой

$$J_1(U^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0) = x_0'\Theta_1(t_0)x_0,$$

здесь непрерывная и симметричная на $[0, \vartheta)$ $n \times n$-матрица $\Theta_1(t)$ имеет вид (4.11) $(i = 1)$.

Рассмотрим теперь стратегию первого игрока $U_1^T \div u_1^T(t,x) = \alpha x$, величину числового параметра $\alpha > 0$ определим ниже. Вследствие симметричности матрицы D_{11} и дополнительно $D_{11} > 0$ имеет место

$$u_1' D_{11} u_1 \geqslant \lambda_1 \|u_1\|^2 = \lambda_1 u_1' u_1 \ \ \forall u_1 \in \mathbb{R}^n,$$

где λ_1 — наименьший корень характеристического уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$ [31].

Далее будем использовать симметричную $n \times n$-матрицу Θ^P из (4.4)–(4.6), а из (4.3) стратегии остальных игроков $(U_2^P \div Q_2^P(t)x, \dots, U_N^P \div Q_N^P(t)x)$. Затем рассмотрим скалярную функцию

$$W_1[t,x] = W_1\Bigg(t, x, u_1^T(t,x) = \alpha x, u_2^P(t,x) = Q_2^P(t)x,$$
$$u_3^P(t,x) = Q_3^P(t)x, \dots, u_N^P(t,x) = Q_N^P(t)x, V_1(t,x) = x'\Theta_1(t)x\Bigg) =$$
$$= \frac{\partial V_1(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1(t,x)}{\partial x}\right]'(A(t)x + u_1^T(t,x) + u_2^P(t,x) + \ldots + u_N^P(t,x)) +$$
$$+ [u_1^T(t,x)]'D_1(\alpha^*)u_1^T(t,x) + [u_2^P(t,x)]'D_2(\alpha^*)u_2^P(t,x) + \ldots + [u_N^P(t,x)]'D_N(\alpha^*)u_N^P(t,x) \geqslant$$
$$\geqslant x'\frac{d\Theta_1(t)}{dt}x + 2x'\Theta_1(t)[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)]x +$$
$$+ x'(\lambda_1\alpha^2 E_n)x + x'[Q_2^P(t)]'D_{12}Q_2^P(t)x + \ldots + x'[Q_N^P(t)]'D_{1N}Q_N^P(t)x =$$
$$= x'\Bigg\{\frac{d\Theta_1(t)}{dt} + \Theta_1(t)[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)] +$$
$$+ [A'(t) + \alpha E_n + (Q_2^P(t))' + \ldots + (Q_N^P(t))']\Theta_1(t) + \lambda_1\alpha^2 E_n +$$
$$+ [Q_2^P(t)]'D_{12}Q_2^P(t) + \ldots + [Q_N^P(t)]'D_{1N}Q_N^P(t)\Bigg\}x = x'M_1(t,\alpha)x.$$

Используемая здесь в фигурных скобках матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична и имеет следующий вид

$$M_1(t,\alpha) = \lambda_1\alpha^2 E_n + 2\alpha\Theta_1(t) + K_1(t),$$

где непрерывная и симметричная $n \times n$-матрица

$$K_1(t) = \dot{\Theta}_1(t) + \Theta_1(t)[A(t) + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)] + [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) + \ldots + \\ + [Q_N^P(t)]' D_{1N} Q_N^P(t) + [A'(t) + (Q_2^P(t))' + \ldots + (Q_N^P(t))']\Theta_1(t).$$

Элементы матриц $\Theta_1(t)$ и $K_1(t)$ непрерывны на $[0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены на компакте $[0,\vartheta]$. Множитель α^2 входит только в диагональные элементы матрицы $M_1(t,\alpha)$. Напомним, что $\lambda_1 > 0$ является наименьшим корнем характеристического уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$. Поэтому постоянную $\alpha = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ можно выбрать настолько большой, чтобы все ведущие миноры матрицы $M_1(t,\alpha)$ стали положительными при $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $\forall \alpha \geqslant \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ (для полноты изложения далее в конце этого раздела (перед замечанием 2) приводится доказательство этого факта). Тогда квадратичная форма $x' M_1(t,\alpha) x$ будет определенно положительной для всех $t \in [0,\vartheta]$ и постоянных $\alpha \geqslant \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$.

Перейдем к доказательству существования постоянной $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такой, что при всех $\alpha \geqslant \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ квадратичная форма $x' M_1(t,\alpha) x$ будет определенно положительной для $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $x \in \mathbb{R}^N$. Заметим, что $n \times n$-матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична. По критерию Сильвестра квадратичная форма $x' M_1(t,\alpha) x$ определенно положительна, если все ведущие (угловые) миноры Δ_r $(r = 1,\ldots,n)$ матрицы $M_1(t,\alpha)$ положительны. Миноры Δ_r расположены в первых r строках и первых r столбцах матрицы $M_1(t,\alpha)$, именно, $(r = 1,\ldots,n)$

$$\Delta_r(t,\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{11}(t) + k_{11}(t) & \ldots & \alpha l_{1r}(t) + k_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{r1}(t) + k_{r1}(t) & \ldots & \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{rr}(t) + k_{rr}(t) \end{vmatrix}$$

должны быть положительны при $\forall t \in [0,\vartheta]$, $\forall \alpha \geqslant \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$. Раскрывая определители $\Delta_r(t,\alpha)$ и располагая слагаемые по убыванию степени параметра α, получаем

$$\Delta_r(t,\alpha) = a_0\alpha^{2r} + a_1(t)\alpha^{2r-1} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t),$$

причем постоянная $a_0 = \lambda_1^r n^r > 0$, а остальные коэффициенты $a_1(t),\ldots,a_{2r}(t)$ непрерывны на компакте $[0,\vartheta]$ (и поэтому равномерно ограниченны). Заметим, что данная равномерная ограниченность приводит к существованию $\Omega_r = \mathrm{const} > 0$ такого, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \{a_p(t) \mid p = 0,1,\ldots,2r\} < \Omega_r.$$

Покажем ниже, что при

$$\alpha > \frac{\Omega_r}{|a_0|} + 1 = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$$

будет

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| < |a_0\alpha^{2r}|,$$

то есть знак многочлена при достаточно большом $|\alpha|$ определяется знаком его старшего члена. Действительно,

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1(t)|\alpha^{2r-1} + |a_2(t)|\alpha^{2r-2} \ldots + |a_{2r-1}(t)|\alpha + |a_{2r}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \Omega_r(\alpha^{2r-1} + \alpha^{2r-2} + \ldots + \alpha + 1) = \Omega_r \frac{\alpha^{2r}-1}{\alpha-1}.$$

Кроме того,

$$\left[\alpha > \frac{\Omega_r}{a_0} + 1\right] \Rightarrow \left[\Omega_r < a_0(\alpha-1)\right].$$

Поэтому, подставляя в предыдущее неравенство вместо Ω_r заведомо большую величину $a_0(\alpha-1)$, получаем

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| <$$
$$< a_0(\alpha-1)\frac{\alpha^{2r}-1}{\alpha-1} = a_0(\alpha^{2r}-1) < a_0\alpha^{2r}.$$

Итак, при $\forall\alpha \geqslant \Omega_r = \alpha^{(r)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ и $\forall t \in [0, \vartheta]$ имеет место

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| < a_0\alpha^{2r},$$

то есть при достаточно большом α знак многочлена $\Delta_r(t,\alpha)$ определяется знаком его старшего члена. Наконец, для каждого $r = 1, \ldots, n$ находим число $\Omega_r > 0$ и считаем $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) = \max\limits_{r=1,\ldots,n} \Omega_r$.

Тогда при $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ получаем

$$\widetilde{W}_1[t,x] = x' M_1(t, \alpha^{(1)}) x > 0 \quad \forall t \in [0,\vartheta], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}. \tag{5.1}$$

Обозначим через $\widetilde{x}(t)$ решение (при $t \in [0,\vartheta]$) векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + \alpha^{(1)}x + Q_2^P(t)x + \ldots + Q_N^P(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \neq 0_n.$$

Так как $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow (\widetilde{x}(t) \neq 0_n\ \forall t \in [0,\vartheta])$, то, согласно (5.1), будет

$$\widetilde{W}_1[t, \widetilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [0,\vartheta].$$

Интегрируя снова обе части последнего неравенства в пределах от t_0 до ϑ и учитывая граничное условие $\Theta_1(\vartheta) = C_1$, а также $u_1^T[t] = \alpha^{(1)}\widetilde{x}(t)$, получаем

$$0 < \int_{t_0}^{\vartheta} \widetilde{W}_1[t,\widetilde{x}(t)]\,dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t,x)}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial V_1(t,x)}{\partial x}\right]' \left[A(t)x + \alpha^{(1)}E_n x + Q_2^P(t)x + \ldots + Q_N^P(t)x\right] \right\}_{x=\widetilde{x}(t)} dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ (\alpha^{(1)})^2 x' D_{11} x + x'[Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) x + \ldots + x'[Q_N^P(t)]' D_{1N} Q_N^P(t) x \right\}_{x=\widetilde{x}(t)} dt =$$
$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_1(t,\widetilde{x}(t))}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} \left[u_j^T[t]\right]' D_{1j} u_j^T[t]\,dt =$$
$$= [\widetilde{x}(\vartheta)]' C_1 \widetilde{x}(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} \left[u_j^T[t]\right]' D_{1j} u_j^T[t]\,dt - V_1(t_0,x_0) =$$
$$= J_1(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) - V_1(t_0, x_0).$$

Отсюда и из $J_1(U_1^P, U_2^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0)$ сразу следует справедливость леммы 5.1. $\square$

Далее достаточно часто применяется аналог леммы 5.1, который доказывается аналогично следующей лемме.

Л е м м а 5.2. *Пусть в* (1.2) *имеет место* (4.2) *и хотя бы одна из матриц* $D_{ii} > 0$*, а все игроки из* $\mathbb{N} \setminus \{i\}$ *используют свои стратегии из «замороженного» набора*

$$U_{-i} = (U_1, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_N) \in \mathfrak{U} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathfrak{U}_j.$$

Тогда для максимальной по Парето в Γ_N *ситуации* U^P *существует постоянная*

$$\alpha_+^{(i)}(U^P, U_{-i}, t_0, x_0) > 0$$

такая, что при $\forall \alpha > \alpha_+^{(i)}(U^P, U_{-i}, t_0, x_0)$ *и стратегии* $U_i^+ \div \alpha x$ *i-го игрока* U_i^+ *будет*

$$J_i(U_i^+, U^P, U_{-i}, t_0, x_0) > J_i(U^P, U_{-i}, t_0, x_0)$$

для любых начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0_n$*.*

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре Γ_N: найти

$$\max_{U_1 \in \mathfrak{U}_1} J_1(U_1, U_2^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0)$$

при ограничении (1.1), фиксированных стратегиях игроков $U_2^P \in \mathfrak{U}_2, \dots, U_N^P \in \mathfrak{U}_N$, а также любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0_n$. Фактически лемма 5.1 утверждает, что при $D_{11} > 0$ и $x_0 \neq 0_n$ эта задача максимизации не имеет решения. В самом деле, какую бы стратегию $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ первый игрок не выбрал, всегда существует стратегия $\widetilde{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$ этого игрока такая, что

$$J_1(\widetilde{U}_1, U_2^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0)\ \ \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}].$$

Такой результат позволяет сразу «отметать» (при выборе решения игры Γ_N) те концепции принятия равновесных решений игровых задач вида Γ_N, в условиях которых фигурирует максимизация функции выигрыша первого игрока (например, не применять при $D_{11} > 0$ концепцию равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в игре Γ_N).

Таким образом, в дифференциальной игре Γ_N при выполнении (4.2) ситуация равновесия по Нэшу $U^e \in \mathfrak{U}$ *не существует*. Одновременно с этим стратегия первого игрока $U_1^T \div \alpha x$, $\forall \alpha \geqslant \alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ реализует, согласно (3.2), угрозу первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P. В следующих леммах считаем начальную позицию (t_0, x_0) «замороженной» и совпадающей с той, которая фигурирует в лемме 5.1, а в «угрожающей» стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ также считаем постоянным скаляр $\alpha = \alpha^{(1)}$.

Итак, фактически лемма 5.1 устанавливает справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 5.1. *Если в игре* Γ_N *хотя бы одна из постоянных симметричных* $n \times n$*-матриц* $D_{ii} > 0$ $(i = 1, \dots, N)$*, то в дифференциальной игре* Γ_N *не существует равновесия по Нэшу, именно не существует стратегии* $U_i^e \in \mathfrak{U}_i$*, для которой выполнено соответствующее требование для* U_i^e *из определения* 1.1.

Здесь следует отметить, что, *во-первых*, условие $D_{ii} > 0$ (при «замороженном» $i \in \mathbb{N}$) не допускает выполнения только i-го равенства из определения 1.1. Этого уже *достаточно для отсутствия равновесной по Нэшу ситуации* U^e в игре Γ_N.

Во-вторых, очевидна эквиваленция

$$D > 0 \Leftrightarrow -D < 0.$$

Тогда лемма 5.1 приводит к справедливости следующего утверждения.

Л е м м а 5.3. *Пусть в* (1.2) *матрица* $D_{12} < 0$. *Тогда существует постоянная*

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) > 0$$

такая, что для стратегии второго игрока $U_2^C \div \alpha x$ *при* $\forall\alpha \geqslant \alpha^{(2)}$ *будет*

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0),$$

то есть стратегия $U_2^C \div \alpha x$ *при* $\forall\alpha \geqslant \alpha^{(2)}$ *реализует в игре* Γ_N *неполную контругрозу в ответ на угрозу* U_1^T *первого игрока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 5.1. □

Далее считаем «замороженными» начальную позицию (t_0, x_0), $n \times n$-непрерывную матрицу $\Theta^P(t)$, стратегию $U_2^C \div \alpha^{(2)} x$ неполной угрозы, фигурирующей в лемме 5.3.

Л е м м а 5.4. *Имеет место импликация*

$$D_{22} > 0 \Rightarrow \exists\alpha^{(3)} = \alpha^{(3)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) = \mathrm{const} > 0$$

такая, что при $\forall\alpha \geqslant \alpha^{(3)}$ *и стратегии* $U_2^C \div \alpha x$ *будет*

$$J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0), \tag{5.2}$$

то есть стратегия второго игрока $U_2^C \div (\max\{\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\})x$ *завершает полную контругрозу* (*совместно с* $U_2^C \div \alpha^{(2)} x$) *на угрозу первого на* U^P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с применения угрозы первого игрока на U^P такой, что

$$J_1(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0).$$

На основании максимальности по Парето U^P, а также свойства 3.1 (из § 3 настоящей статьи) получаем

$$J_2(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) < J_2(U_1^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0).$$

Затем, так же как в доказательстве леммы 5.1, во-первых, установим существование функции Беллмана $V_2(t, x) = x'\Theta_2(t)x$, для которой

$$J_2(U_1^C, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) = V_2(t_0, x_0) = x_0'\Theta_2(t_0)x_0, \tag{5.3}$$

во-вторых, с учетом $D_{22} = D_{22}'$, $D_{22} > 0$ и следующего неравенства

$$u_2' D_{22} u_2 \geqslant \lambda_{22} u_2' u_2 = \lambda_{22}\|u_2\|^2,$$

где $\lambda_{22} > 0$ — наименьший корень характеристического уравнения $\det[D_{22} - \lambda E_n] = 0$, составим

$$\overline{W}_2[t, x] = W_2\Bigg(t, x, u_1^T(t, x) = \alpha^{(1)} x, u_2(t, x) = \alpha x,$$

$$u_3^P(t, x) = -D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, \ldots, u_N^P(t, x) = -D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x, V_2 = x'\Theta_2(t)x\Bigg) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial V_2(t, x)}{\partial t} + \Big(\frac{\partial V_2(t, x)}{\partial x}\Big)'\big[A(t)x + u_1^T(t, x) + u_2(t, x) -$$

$$- D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x - \ldots - D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x\big] + [u_1^T(t, x)]' D_{21} u_1^T(t, x) + \alpha^2 \lambda_{22} x'x +$$

$$+ x'\Theta^P(t) D_3^{-1}(\alpha^*) D_{23} D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x + \ldots + x'\Theta^P(t) D_N^{-1}(\alpha^*) D_{2N} D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x =$$

$$= x'\Bigg\{\frac{d\Theta_2(t)}{dt} + \Theta_2(t)[A(t) + (\alpha^{(1)})^2 E_n + \alpha^2\lambda_{22}E_n - D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t) - \ldots - D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)] +$$

$$+ [A'(t) + (\alpha^{(1)})^2 E_n + \alpha^2\lambda_{22}E_n - \Theta^P(t)D_3^{-1}(\alpha^*) - \ldots - \Theta^P(t)D_N^{-1}(\alpha^*)]\Theta_2(t) + (\alpha^{(1)})^2 E_n +$$

$$+\alpha^2\lambda_{22}E_n+\Theta^P(t)D_3^{-1}(\alpha^*)D_{23}D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)+\ldots+\Theta^P(t)D_N^{-1}(\alpha^*)D_{2N}D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)\Big\}x=$$

$$=x'M_2(t,\alpha)x.$$

При достаточно больших $\alpha\geqslant\alpha^{(3)}$ квадратичная форма $x'M_2(t,\alpha)x>0$ (согласно критерию Сильвестра), кроме того, решение $x(t)$ системы

$$\dot x=[A(t)+\alpha^{(1)}E_n+\alpha E_n-D_3^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)-\ldots-D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)]x,\quad x(t_0)=x_0.$$

При $x_0\neq 0_n\Rightarrow x(t)\neq 0_n$, поэтому $x'(t)M_2(t,\alpha)x(t)>0\ \ \forall t\in[t_0,\vartheta]$. Интегрируя обе части этого неравенства, получаем

$$0<\int_{t_0}^{\vartheta}x'(t)M_2(t,\alpha)x(t)\,dt=\int_{t_0}^{\vartheta}\frac{dV_2(t,x(t))}{dt}\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{\vartheta}\big\{(u_1^T[t])'D_{21}u_1^T[t]+(u_2^C[t])'D_{22}u_2^C[t]+(u_3^P[t])'D_{23}u_3^P[t]+\ldots+(u_N^P[t])'D_{2N}u_N^P[t]\big\}\,dt=$$

$$=J_2(U_1^T,U_2^C,U_3^P,\ldots,U_N^P,t_0,x_0)-V_2(t_0,x_0).$$

Отсюда и из (5.3) сразу следует справедливость (5.2). □

Аналогично лемме 5.1 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 5.5. *Пусть U_2^T — угроза второго игрока на максимальную по Парето в Γ_v ситуацию $U^P=(U_1^P,\ldots,U_N^P)$, то есть нашлась стратегия $U_2^T\div\alpha x$ такая, что при $\alpha\geqslant\alpha^{(2)}$*

$$J_2(U_1^P,U_2^T,U_3^P,\ldots,U_N^P,t_0,x_0)>J_2(U^P,t_0,x_0),$$

(*такая стратегия U_2^T существует вследствие $D_{22}>0$*).

Тогда справедлива импликация

$$D_{21}<0\Rightarrow\exists\alpha^{(4)}=\mathrm{const}>0\colon\forall\alpha=\mathrm{const}\geqslant\alpha^{(4)}$$
$$J_2(U_1^C,U_2^T,U_3^P,\ldots,U_N^P,t_0,x_0)<J_2(U^P,t_0,x_0)$$

для стратегии $U_1^C\div\alpha x$, то есть U_1^C реализует в игре Γ_N неполную контругрозу на ситуацию U^P.

§ 6. Доказательство существования

Т е о р е м а 6.1. *Предположим, что для игры Γ_N выполнены ограничения* (4.2)*. Тогда упорядоченный набор*

$$(U^P,J_1^P,\ldots,J_N^P)=((U_1^P,\ldots,U_N^P),J_1(U^P,t_0,x_0),\ldots,J_N(U^P,t_0,x_0))=$$
$$=((-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x,\ldots,-D_N^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)x),x_0'\Theta_1(t_0)x_0,\ldots,x_0'\Theta_N(t_0)x_0)$$

является равновесием угроз и контругроз для дифференциальной игры

$$\Gamma_N=\langle\mathbb{N}=\{1,\ldots,N\},\boldsymbol{\Sigma}\div(1.1),\{\mathfrak{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}},\{J_i(U,t_0,x_0)\div(1.2)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

здесь матрица

$$\Theta^P(t)=[X^{-1}(t)]'\{C^{-1}(\alpha^*)+$$

$$+\int_t^{\vartheta}X^{-1}(\tau)[D_1^{-1}(\alpha^*)+D_2^{-1}(\alpha^*)+\ldots+D_N^{-1}(\alpha^*)]X^{-1}(\tau)\,d\tau\}^{-1}X^{-1}(t),$$

$$C(\alpha^*)=C_1+\alpha_2^*C_2+\ldots+\alpha_N^*C_N,\quad D_i(\alpha^*)=D_{1i}+\alpha_2^*D_{2i}+\ldots+\alpha_N^*D_{Ni},$$

положительные числа $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$ определены рекуррентным образом

$$\alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right), \ldots, \alpha_i^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1i} + \alpha_2^*\Lambda_{2i} + \ldots + \alpha_{i-1}^*\Lambda_{i-1,i}}{\Lambda_{ii}}\right), \ldots,$$

$$\alpha_N^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^*\Lambda_{2N} + \ldots + \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1,N}}{\Lambda_{NN}}\right),$$

где Λ_{ii} — наибольший корень уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$, $(-\Lambda_{ij})$ — наибольший корень уравнения $\det[D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ $(i, j = 1, \ldots, N; i \neq j)$, а симметричные матрицы $\Theta_i(t)$ $(i \in \mathbb{N})$ определены в (4.11).

Доказательство. Во-первых, из $D_{11} > 0$ следует сразу два вывода: отсутствие в Γ_N ситуации равновесия по Нэшу и наличие угрозы U_1^T со стороны первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P в N-критериальной задаче Γ_v (замечание 2). Существование максимальной по Парето ситуации и максимальных по Парето выигрышей в Γ_v (а также их явный вид при этом) получены в утверждениях 4.1 и 4.2 соответственно. Условие $D_{21} < 0$ позволяет построить неполную контругрозу U_2^C второго игрока в ответ на угрозу первого (лемма 5.3), а $D_{22} > 0$ и лемма 5.4 дают возможность довести второму игроку неполную контругрозу U_2^C до полной $\overline{U}_2^C$. Одновременно требование $D_{22} > 0$ влечет отсутствие ситуации равновесия по Нэшу (не существует $\max\limits_{U_1} J(U_1, U_2^e, \ldots, U_N^e, t_0, x_0)$ при $\forall U_1 \in \mathfrak{U}_1$) и возможность аналитически сконструировать второму игроку угрозу $U_2^T \in \mathfrak{U}_2$ на U^P в игре Γ_N:

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_2(U^P, t_0, x_0).$$

Условие $D_{21} < 0$ и лемма 5.5 обеспечивают существование неполной контругрозы $U_1^C \in \mathfrak{U}_1$ первого игрока на угрозу U_2^T второго:

$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) \leqslant J_2(U^P, t_0, x_0).$$

Наконец, из максимальности по Парето U^P и свойства 3.1 будет следовать

$$J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0),$$

а из $D_{11} > 0$ и леммы 5.1 получаем существование такого $\overline{U_1^C} \in \mathfrak{U}_1$, что

$$J_1(\overline{U_1^C}, U_2^T, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0).$$

Аналогичны построения контругрозы в ответ на угрозу i-го $(i \in \mathbb{N})$ игрока на U^P.

Таким образом, установили, что в игре Γ_N в ответ на угрозу любого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P у одного из оставшихся имеется полная контругроза, что и доказывает теорему 6.1. □

§ 7. Заключение

В работе установлено, что в линейно-квадратичной позиционной дифференциальной игре Γ_N при выполнении ограничений теоремы 6.1 существует равновесие угроз и контругроз и одновременно не существует ситуации равновесия по Нэшу. Этот факт показывает необходимость дополнительных исследований свойств этого равновесия, вопросов существования, нахождения других классов игр (в том числе и не дифференциальных), обладающих выявленным теоремой свойством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nash J. F. Equilibrium points in n-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. Vol. 36. No. 1. P. 48–49. http://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48
2. Nash J. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. No. 2. P. 286–295. https://doi.org/10.2307/1969529
3. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. Case J. A class of games having Pareto optimal Nash equilibria // Journal of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 13. No. 3. P. 379–385. https://doi.org/10.1007/BF00934872
5. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. М.: Юрайт, 2017.
6. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
7. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
8. Жуковский В. И., Тынянский Н. Т. Равновесные управления многокритериальных динамических задач. М.: Изд-во МГУ, 1984.
9. Вилкас Э. Й. Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. 1972. Вып. 2. С. 9–55.
10. Вилкас Э. Й., Майминас Е. З. Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981.
11. Смольяков Э. Р. Теория конфликтных равновесий. М.: УРСС, 2005.
12. Вайсборд Э. М. О коалиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 4. С. 613–623. http://mi.mathnet.ru/de2148
13. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз. М.: Красанд, 2010.
14. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Самсонов С. В., Высокос М. И., Бельских Ю. А. Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэшу, но существует равновесие угроз и контругроз // Вестник Южно-Уральского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2018. Т. 10. № 2. С. 5–21. https://doi.org/10.14529/mmph180201
15. Biltchev S. V. ε-Z-equilibrium in a differential game described by a parabolic system // Many Players Differential Game. Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984. P. 47–52.
16. Zhukovskii V. I. Some problems of non-antagonistic differential games // Mathematical Method in Operation Research. Sofia, Bulgaria: Academy of Sciences, 1985. P. 103–195.
17. Dochev D. T., Stojanov N. V. Existence of Z-equilibrium in a differential game with delay // Many Players Differential Game. Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984. P. 64–72.
18. Gaidov S. D. Z-equilibrium in stochastic differential game // Many Players Differential Game. Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984. P. 53–63.
19. Чернов А. В. О дифференциальных играх в банаховом пространстве на фиксированной цепочке // Математическая теория игр и ее приложения. 2020. Т. 12. Вып. 3. С. 89–118. http://mi.mathnet.ru/mgta265
20. Tersian S. A. On the Z-equilibrium points in a differential game // Many Players Differential Game. Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984. P. 106–111.
21. Rettieva A. N. Cooperation in dynamic multicriteria games with random horizons // Journal of Global Optimization. 2018. Vol. 76. No. 3. P. 455–470. https://doi.org/10.1007/s10898-018-0658-6
22. Rettieva A. N. Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6. Issue 9. P. 156. https://doi.org/10.3390/math6090156
23. Rettieva A. N. Equilibria in dynamic multicriteria games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19. No. 1. P. 1750002. https://doi.org/10.1142/S0219198917500025
24. Mazalov V. V., Rettieva A. N., Avrachenkov K. E. Linear-quadratic discrete-time dynamic potential games // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. Issue 8. P. 1537–1544. https://doi.org/10.1134/S0005117917080136

25. Sur les racines d’une équation fondamentale: Extrait d’une lettre de M. A. Hirsch à M. I. Bendixson // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 367–370. https://doi.org/10.1007/BF02419031
26. Parker W. V. The characteristic roots a matrix // Duke Mathematical Journal. 1937. Vol. 3. Issue 3. P. 484–487. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-37-00338-7
27. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и и ее применения. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
28. Вайсборд Э. М., Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
29. Zhukovskii V. I., Salukvadze M. E. The vector-valued maximin. New York: Academic Press, 1994. https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6114-4
30. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.
31. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.

Поступила в редакцию 15.03.2021

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2345-9474
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Мухина Юлия Сергеевна, студент, кафедра высшей алгебры, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1503-1312
E-mail: js.mukhina@mail.ru

Романова Виолетта Эдуардовна, студент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7678-417X
E-mail: vilca2001@mail.ru

Цитирование: В. И. Жуковский, Ю. С. Мухина, В. Э. Романова. Дифференциальная игра N лиц, в которой существует паретовское равновесие угроз и контругроз, но отсутствует равновесие по Нэшу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 104–127.

V. I. Zhukovskii, Yu. S. Mukhina, V. E. Romanova

A differential game of N persons in which there is Pareto equilibrium of objections and counter-objections and no Nash equilibrium

Keywords: differential noncooperative games, Nash equilibrium situation, equilibrium of objections and counterobjections, Pareto efficiency

MSC2020: 91A06, 91A10

DOI: 10.20537/2226-3594-2021-57-04

A linear-quadratic positional differential game of N persons is considered. The solution of a game in the form of Nash equilibrium has become widespread in the theory of noncooperative differential games. However, Nash equilibrium can be internally and externally unstable, which is a negative in its practical use. The consequences of such instability could be avoided by using Pareto maximality in a Nash equilibrium situation. But such a coincidence is rather an exotic phenomenon (at least we are aware of only three cases of such coincidence). For this reason, it is proposed to consider the equilibrium of objections and counterobjections. This article establishes the coefficient criteria under which in a differential positional linear-quadratic game of N persons there is Pareto equilibrium of objections and counterobjections and at the same time no Nash equilibrium situation; an explicit form of the solution of the game is obtained.

REFERENCES

1. Nash J. F. Equilibrium points in n-person games, *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*, 1950, vol. 36, no. 1, pp. 48–49. http://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48
2. Nash J. Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. http://doi.org/10.2307/1969529
3. Podinovskii V. V., Nogin V. D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* (Pareto-optimal solutions of multicriteria problems), Moscow: Fizmatlit, 2007.
4. Case J. A class of games having Pareto optimal Nash equilibria, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 13, no. 3, pp. 379–385. https://doi.org/10.1007/BF00934872
5. Zhukovskii V. I., Chikrii A. A. *Differentsyal'nye uravneniya. Lineino-kvadratichnye differentsial'nye igry* (Differential equations. Linear-quadratic differential games), Moscow: Yurait, 2017.
6. Luce R. D., Raiffa H. *Games and decisions*, London: Chapman and Hall, 1957.
7. Owen G. *Game theory*, London: W. B. Saunders company, 1968.
8. Zhukovskii V. I., Tynyanskii N. T. *Ravnovesnye upravleniya mnogokriterial'nykh dinamicheskikh zadach* (Equilibrium control of multicriteria dynamic problems), Moscow: Moscow State Uinersity, 1984.
9. Vilkas E. I. Formalization of the problem of choosing a game-theoretic criterion of optimality, *Matematicheskie metody v sotsial'nykh naukakh: sb. statei*, Vil'nyus: Institut matematiki i kibernetiki AN Litovskoi SSR, 1972, issue 2, pp. 9–55 (in Russian).
10. Vilkas E. I., Maiminas E. Z. *Resheniya: teoriya, informatsia, modelirovanie* (Solutions: theory, information, modeling), Moscow: Radio i svyaz', 1981.
11. Smol'yakov E. R. *Teoriya konfliktnykh ravnovesii* (Theory of conflict equilibria), Moscow: URSS, 2005.
12. Vaisbord E. M. Coalition differential games, *Differentsial'nye Uravnenia*, 1974, vol. 10, issue 4, pp. 613–623 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de2148
13. Zhukovskii V. I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie ugroz i kontrugroz* (Introduction to differential games under uncertainly. Equilibrium of threats and counter-threats), Moscow: Krasand, 2010.

14. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K. N., Samsonov S. P., Vysokos M. I., Bel'skikh Yu. A. Class of differential games with no Nash equilibrium, but with equilibrium of objections and counterobjections, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Ser. Matemamika. Mekhanika. Fizika*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 5–21. https://doi.org/10.14529/mmph180201
15. Biltchev S. V. ε-Z-equilibrium in a differential game described by a parabolic system, *Many Players Differential Game*, Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984, pp. 47–52.
16. Zhukovskii V. I. Some problems of non-antagonistic differential games, *Mathematical Method in Operation Research*, Sofia, Bulgaria: Academy of Sciences, 1985, pp. 103–195.
17. Dochev D. T., Stojanov N. V. Existence of Z-equilibrium in a differential game with delay, *Many Players Differential Game*, Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984, pp. 64–72.
18. Gaidov S. D. Z-equilibrium in stochastic differential game, *Many Players Differential Game*, Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984, pp. 53–63.
19. Chernov A. V. Differential games in a Banach space on a fixed chain, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 89–118 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/mgta265
20. Tersian St. A. On the Z-equilibrium points in a differential game, *Many Players Differential Game*, Rousse, Bulgaria: Technical Univ., 1984, pp. 106–111.
21. Rettieva A. N. Cooperation in dynamic multicriteria games with random horizons, *Journal of Global Optimization*, 2018, vol. 76, no. 3, pp. 455–470. https://doi.org/10.1007/s10898-018-0658-6
22. Rettieva A. N. Dynamic multicriteria games with finite horizon, *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 6, pp. 156. https://doi.org/10.3390/math6090156
23. Rettieva A. N. Equilibria in dynamic multicriteria games, *International Game Theory Review*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 1750002. https://doi.org/10.1142/S0219198917500025
24. Mazalov V. V., Rettieva A. N., Avrachenkov K. E. Linear-quadratic discrete-time dynamic potential games, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, issue 8, pp. 1537–1544. https://doi.org/10.1134/S0005117917080136
25. Sur les racines d'une équation fondamentale: Extrait d'une lettre de M. A. Hirsch à M. I. Bendixson, *Acta Math.*, 1902, vol. 25, pp. 367–370. https://doi.org/10.1007/BF02419031
26. Parker W. V. The characteristic roots a matrix, *Duke Mathematical Journal*, 1937, vol. 3, issue 3, pp. 484–487. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-37-00338-7
27. Parodi M. *Lokalizatsiya kharakteristicheskikh chisel matrits i ee primeneniya* (Localization of characteristic numbers of matrices and its applications), Moscow: Inostrannaya Literatura, 1960.
28. Vaisbord E. M., Zhukovskii V. I. *Vvedenie v differentsial'nye igry neskol'kikh lits i ikh prilozheniya* (Introduction to differential games of several persons and their applications), Moscow: Sovetskoe radio, 1980.
29. Zhukovskii V. I., Salukvadze M. E. *The vector-valued maximin*, New York: Academic Press, 1994. https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6114-4
30. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
31. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* (Theory of matrices), Moscow: Fizmatlit, 2004.

Received 15.03.2021

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 52, Moscow, 119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2345-9474
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Mukhina Yuliya Sergeevna, Student, Department of Higher Algebra, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1503-1312
E-mail: js.mukhina@mail.ru

Romanova Violetta Eduardovna, Student, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 52, Moscow,

119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7678-417X
E-mail: vilca2001@mail.ru

Citation: V. I. Zhukovskii, Yu. S. Mukhina, V. E. Romanova. A differential game of N persons in which there is Pareto equilibrium of objections and counterobjections and no Nash equilibrium, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 104–127.