Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2021. Том 57. С. 142–155

УДК 514.177

© **_П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков_**

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ

Рассматривается проблема поиска оптимального расположения подвижных тел в трехмерном евклидовом пространстве. Исследуется задача об отыскании такого положения двух заданных многогранников A и B, при котором хаусдорфово расстояние между ними было бы минимальным. Для ее решения используется аппарат выпуклого и негладкого анализа, а также методы вычислительной геометрии. Разработаны итерационные алгоритмы и выполнено обоснование корректности их работы. Создан программный комплекс, его работа проиллюстрирована на конкретных примерах.

Ключевые слова: хаусдорфово расстояние, минимизация, субдифференцал, чебышёвский центр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-06

Введение

При решении прикладных задач часто требуется заменить множество со сложной геометрией конечным набором выпуклых компактов. В данном исследовании авторы изучают задачу об оптимальном расположении двух выпуклых многогранников [1] в смысле минимизации хаусдорфова расстояния между ними. При этом считается, что один многогранник может совершать плоскопараллельные перемещения, но не повороты. В похожей формулировке изучались задачи, например в [2, 3]. Их решения имеют большое прикладное значение, например, в задачах при распознавании образов [4, 5]. Ранее изучалась более простая задача о минимизации хаусдорфова расстояния между многоугольниками на плоскости [6,7]. Впервые многогранники в трехмерном пространстве авторами рассматривались в работе [8].

§ 1. Основные обозначения и постановка задачи

Введем обозначения основных понятий. Пусть A и B — компактные множества в трехмерном евклидовом пространстве. Обозначим

$\rho(\mathbf{x}, A) = \min\limits_{\mathbf{a}\in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до A,

$h(A, B) = \max\limits_{\mathbf{a}\in A} \rho(\mathbf{a}, B)$ — хаусдорфово отклонение A от B,

$d(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ — хаусдорфово расстояние между A и B,

$r(A) = \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} h(A, \{\mathbf{x}\})$ — чебышёвский радиус [9] множества A,

$\mathbf{c}(A)$ — точка, такая что $r(A) = h(A, \{\mathbf{c}(A)\})$, — чебышёвский центр множества A.

Задача 1. Пусть заданы выпуклые компактные множества A в B в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Требуется найти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, обеспечивающий минимум хаусдорфова расстояния $d(A, B + \{\mathbf{x}\})$ между множествами A и $B + \{\mathbf{x}\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем оптимальным значением решения задачи 1 значение

$$D(A, B) = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} d(A, B + \{\mathbf{x}\}), \tag{1.1}$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Назовем множеством оптимальных решений в задаче 1

$$X(A, B) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon d(A, B + \{\mathbf{x}\}) = D(A, B)\}. \tag{1.2}$$

Точное решение в задаче 1 может быть найдено только в некоторых частных случаях. Например, если множества A и B подобны. В общем случае необходимо строить решение численными методами и приближенно. Важно оценить, насколько приближенное решение близко к точному.

Определение 1.3. Будем называть $\widetilde{\mathbf{x}}$ ε-субоптимальным решением задачи 1, если

$$d(A, B + \{\mathbf{x}\}) \leqslant D(A, B) + \varepsilon \tag{1.3}$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Будем искать ε-субоптимальное решение при минимально возможном ε.

§ 2. Методы решения задачи 1

Задачу 1 при конкретных выпуклых многогранниках A в B можно свести к задаче глобальной минимизации функции

$$F(\mathbf{x}) = d(A, B + \{\mathbf{x}\}) \tag{2.1}$$

с областью определения на всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Свойства функции $F(\mathbf{x})$ исследованы, например в работах, [7, 8]:

(1) $F(\mathbf{x})$ липшицева с константой липшицивости $L = 1$;

(2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ $F(\mathbf{x}) \geqslant 0$, причем равенство $F(\mathbf{x}) = 0$ возможно только, если A и B — конгруэнтны;

(3) $F(\mathbf{x})$ выпукла и субдифференцируема на всей области определения.

Подробнее свойства выпуклой функции описаны, например, в [10, гл. II]. Показано, что во всех внутренних точках ее области определения существует субдифференциал. Для произвольной функции $f(\mathbf{x})$ с областью определения $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^3$ в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ субдифференциал $\partial f(\mathbf{x}_0)$ имеет вид

$$\partial f(\mathbf{x}_0) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \forall \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}\ f(\mathbf{x}^*) \geqslant f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0 \rangle\}. \tag{2.2}$$

Элементы субдифференциала называются субградиентами.

Для любого выпуклого множества $Y \subset \mathbb{R}^3$ функция расстояния $\rho(\mathbf{x}, Y)$ до него от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ является выпуклой. Известно [11], что максимальное значение выпуклой функции на выпуклом многограннике достигается в вершинах этого многогранника. Поэтому для вычисления значения (2.1) достаточно вычислять значения расстояния до второго элемента из пары множеств не по всем точкам многогранников, а только по их вершинам $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_j$, т. е.

$$\begin{gathered} F(\mathbf{x}) = \max\left\{ \max_{i=1,\ldots,a} \rho(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}),\ \max_{j=1,\ldots,b} \rho(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A) \right\}, \\ \mathbf{a}_i \in A, \quad i = 1, \ldots, a; \quad \mathbf{b}_j \in B, \quad j = 1, \ldots, b. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь a и b — количество вершин многогранников A и B соответственно.

Определение 2.1. Проекцией $\mathbf{p}(\mathbf{a}, B)$ точки $\mathbf{a}$ на выпуклое компактное множество B называется ближайшая к $\mathbf{a}$ в евклидовой метрике точка из B.

Заметим, что если множество B не выпуклое, то ближайших к $\mathbf{a}$ точек может быть более одной, но в случае выпуклого множества B она всегда единственна [11] .

Функция (2.3) представляет из себя максимум из конечного числа выпуклых функций. В тех точках $\mathbf{x}$, в которых $F(\mathbf{x}) > 0$, субдифференциал (2.2)

$$\partial F(\mathbf{x}) = -\operatorname{co} V(\mathbf{x}) / F(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

где $\operatorname{co} Y$ — выпуклая оболочка множества Y,

$$V(\mathbf{x}) = \{\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) \colon \rho(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) = F(\mathbf{x})\} \cup$$
$$\cup \left\{-\big(\mathbf{b}_i + \mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{b}_i + \mathbf{x}, A)\big) \colon \rho(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A) = F(\mathbf{x})\right\}.$$

В тех точках $\mathbf{x}$, в которых $F(\mathbf{x}) = 0$,

$$\partial F(\mathbf{x}) = U(\mathbf{0}, 1) \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\mathbf{y}\| \leqslant 1\}.$$

Подробнее дифференциальные свойства функции (2.3) описаны, например, в [12].

Заметим, что субдифференциал $\partial F(\mathbf{x})$ при $F(\mathbf{x}) > 0$, — это непустое множество, которое может определяться не более чем $a + b$ векторами. Геометрически субдифференциал $\partial F(x)$ представляет собой выпуклую оболочку тех единичных векторов, в направлении которых достигается хаусдорфово расстояние между A и $B + \{\mathbf{x}\}$ и которые направлены от многогранника A к многограннику $B + \{\mathbf{x}\}$.

Необходимым и достаточным условием минимума функции $F(\mathbf{x})$ является [10, гл. IV, § 2, теорема 2.1] включение

$$\mathbf{0} \in \partial F(\mathbf{x}).$$

На базе конструкций (2.4) ранее применялись различные подходы к реализации численных субградиентных методов.

Одна из идей, с помощью которых можно численно решать задачу поиска минимума непрерывной выпуклой негладкой функции, принадлежит Н. З. Шору [13] и выражается следующей формулой:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \gamma_k \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}, \quad \mathbf{h} \in \partial F(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Согласно этой формуле каждый раз происходит сдвиг на величину γ_k в направлении, противоположном одному из векторов субдифференциала. Несовершенство этого метода заключается в невозможности определения длины необходимого шага γ_k без дополнительной информации, а также в том, что отсутствует детерминированная процедура выбора субградиента из (2.2). Вопрос выбора длины шага при использовании различных субградиентных методов решается по-разному. В этом методе последовательность длин шагов γ_k, на которые производится сдвиг, должна быть сходящаяся к нулю, но при этом сумма должна быть равна $+\infty$. При реализации численного алгоритма можно, например, использовать последовательность $\gamma_k = \gamma_0/k, \gamma_0 > 0$.

Следует отметить, что метод (2.5) не относится, вообще говоря, к числу методов спуска, в которых последовательность $F(\mathbf{x}^{(k)})$ является убывающей. Поскольку сумма ряда равна бесконечности, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = +\infty$, то метод (2.5) сходится медленно. Поэтому авторы применили более сложные конструкции.

О п р е д е л е н и е 2.2. Назовем

$$W(\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}, B + \{\mathbf{x}\})\right\}_{i=1}^{a} \cup \left\{-\big(\mathbf{b}_j + \mathbf{x} - \mathbf{p}((\mathbf{b}_j + \mathbf{x}), A)\big)\right\}_{j=1}^{b} \tag{2.6}$$

характеристическим множеством многогранников A и B в точке $\mathbf{x}$.

В качестве первой итерации в реализованном методе берется точка

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{c}(A) - \mathbf{c}(B). \tag{2.7}$$

Основу итерационного алгоритма составляет схема

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

которая продолжается, пока не будет выполнено условие окончания работы. Условие может быть, например, в форме неравенств

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\right\| \leqslant \delta x, \quad \delta x > 0,$$

или

$$\left\|F(\mathbf{x}^{(k+1)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)})\right\| \leqslant \delta F, \quad \delta F > 0,$$

где скалярные параметры δx и δF задаются в программе.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *При любых выпуклых компактах A и B для полученного по формуле* (2.7) *значения $\mathbf{x}^{(1)}$, выполняется оценка*

$$F(\mathbf{x}^{(1)}) \leqslant \max\{r(A), r(B)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (2.7) имеет место равенство

$$\mathbf{c}(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}) = \mathbf{c}(A). \tag{2.9}$$

Известно, что чебышёвский центр множества принадлежит его выпуклой оболочке [9, 14]. Поскольку A и B — выпуклые компакты, то $\mathbf{c}(A) \in A$, $\mathbf{c}(B+\{\mathbf{x}^{(1)}\}) \in (B+\{\mathbf{x}^{(1)}\})$. Из (2.9) тогда следуют оценки

$$h\left(A, B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}\right) \leqslant h\left(A, \mathbf{c}(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\})\right) = h(A, \mathbf{c}(A)) = r(A), \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} h\left(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}, A\right) \leqslant h\left(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}, \mathbf{c}(A)\right) = \\ = h\left(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}, \mathbf{c}(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\})\right) = r(B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}) = r(B). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) по определению хаусдорфова расстояния следует

$$d(A, B + \{\mathbf{x}^{(1)}\}) \leqslant \max\{r(A), r(B)\},$$

что эквивалентно (2.9). □

В работе [8] доказано, что $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^{(k)} \in X(A, B)$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $F(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ для некоторого $\mathbf{x}^{(k)}$. Если в итерационной процедуре* (2.8) *получено значение $\mathbf{x}^{(k+1)}$, то выполняется оценка*

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leqslant F(\mathbf{x}^{(k)}) - \frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\right\|^2}{2F(\mathbf{x}^{(k)})}. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что по построению множества (2.6) выполняется равенство

$$F(\mathbf{x}^{(k)}) = \max_{\mathbf{w} \in W(\mathbf{x})} \|\mathbf{w}\|. \tag{2.13}$$

Для хаусдорфова отклонения множества A от $B + \{\mathbf{x}^{(k+1)}\}$ можно записать

$$h\left(A, B + \{\mathbf{x}^{(k+1)}\}\right) \leqslant \max_{i=\overline{1,a}} \left\|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}\left(\mathbf{a}, B + \{\mathbf{x}^{(k)}\}\right) + \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|. \tag{2.14}$$

Аналогично

$$h\left(B + \{\mathbf{x}^{(k+1)}\}, A\right) \leqslant \max_{i=\overline{1,b}} \left\|\mathbf{b}_j + \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{p}\left((\mathbf{b}_j + \mathbf{x}^{(k)}), A\right)\right\|. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) следует

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leqslant \max_{\mathbf{w}\in W(\mathbf{x})} \left\|\mathbf{w} - \big(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\big)\right\|.$$

В силу определения чебышёвского радиуса имеет место неравенство

$$r\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big) \leqslant h\big(W(\mathbf{x}^{(k)}), \{\mathbf{0}\}\big),$$

а значит

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leqslant F(\mathbf{x}^{(k+1)}). \tag{2.16}$$

По формуле (2.8)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big), \tag{2.17}$$

следовательно,

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leqslant r\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big). \tag{2.18}$$

Если $\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big) = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$ и нестрогое неравенство (2.12) превращается в равенство.

Рассмотрим случай $\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big) \neq \mathbf{0}$. Из свойств чебышёвского центра множества W, состоящего из конечного числа точек, известно [14], что его чебышёвский центр совпадает с чебышёвским центром подмножества $\widehat{W} \subseteq W$, состоящего из конечного числа точек, лежащих на сфере $\partial U\big(\mathbf{c}(W), r(W)\big)$. Поскольку чебышёвский центр всегда принадлежит выпуклой оболочке множества [9], то для любого полупространства Π, содержащего точку $\mathbf{c}(W) = \mathbf{c}(\widehat{W})$ найдется точка $\mathbf{w} \in \Pi \cap \widehat{W}$. Поэтому для любой полусферы Λ, вложенной в сферу $\partial U\left(\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big), r\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right)$, существует точка $\mathbf{w} \in W(\mathbf{x}^{(k)}) \cap \Lambda$. Рассмотрим полусферу

$$\Lambda^* = \partial U\left(\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big), r\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right) \cap \Pi\left(\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big), \mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right),$$

где

$$\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \triangleq \{\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3 \colon \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0\rangle \geqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0\rangle\}$$

есть полупространство точек, скалярное произведение которых на $\mathbf{x}_0$ не меньше, чем скалярное произведение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}_0$. Для точки $\mathbf{w}^* \in W(\mathbf{x}^{(k)}) \cap \Lambda^*$ выполняется оценка

$$\|\mathbf{w}^*\| \geqslant \sqrt{r\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)^2 + \left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2}.$$

Из последнего неравенства, (2.13) и (2.18) следует

$$F^2(\mathbf{x}^{(k)}) \geqslant F^2(\mathbf{x}^{(k+1)}) + \left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2.$$

Последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$F^2(\mathbf{x}^{(k)}) - F^2(\mathbf{x}^{(k+1)}) \geqslant \left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2,$$
$$\big(F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)})\big)\big(F(\mathbf{x}^{(k)}) + F(\mathbf{x}^{(k+1)})\big) \geqslant \left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2,$$
$$F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \geqslant \frac{\left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2}{F(\mathbf{x}^{(k)}) + F(\mathbf{x}^{(k+1)})}.$$

Пользуясь оценкой (2.16), правую часть неравенства можно выразить, заменив $F(\mathbf{x}^{(k+1)})$ на $F(\mathbf{x}^{(k)})$,

$$F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \geqslant \frac{\left\|\mathbf{c}\big(W(\mathbf{x}^{(k)})\big)\right\|^2}{2F(\mathbf{x}^{(k)})}.$$

Подставив в правую часть значение (2.17), получаем

$$F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \geqslant \frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\right\|^2}{2F(\mathbf{x}^{(k)})},$$

что эквивалентно (2.12). □

Теорема 2.1 усиливает результат теоремы 1 из работы [7]. В ней доказана оценка $F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leqslant F(\mathbf{x}^{(k)})$, и как следствие из нее, неравенство $F(\mathbf{x}^{(k+1)}) < F(\mathbf{x}^{(k)})$, при условии $\mathbf{x}^{(k+1)} \neq \mathbf{x}^{(k)}$.

§ 3. Оценки точности результата

Для полученного численными метода решения $\widetilde{\mathbf{x}}$ важно оценить, насколько значение функции $F(\widetilde{\mathbf{x}})$ в нем близко к нижней грани (1.1). Можно попытаться провести перебор точек по множеству, заведомо включающему в себя (1.2).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Для любых выпуклых компактов A и B*

$$X(A,B) \subseteq U\big(\mathbf{c}(A) - \mathbf{c}(B), r(A) + r(B)\big). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 3.1 и определению 1.2 справедливо

$$\forall \mathbf{x} \in X(A,B)\ F(\mathbf{x}) \leqslant F(\mathbf{x}^{(1)}) \leqslant \max\{r(A), r(B)\}. \tag{3.2}$$

Поскольку чебышёвский центр выпуклого компакта A принадлежит A, то для всех точек $\mathbf{x}^* \notin U\left(\mathbf{c}(A) - \mathbf{c}(A), r(A) + r(B)\right)$ следует

$$F(\mathbf{x}^*) \geqslant h(A, B + \{\mathbf{x}^*\}) \geqslant \rho(\mathbf{c}(A), B + \{\mathbf{x}^*\}) > r(A). \tag{3.3}$$

Аналогично справедливо

$$F(\mathbf{x}^*) \geqslant h(B + \{\mathbf{x}^*\}, A) \geqslant \rho(\mathbf{c}(B) + \{\mathbf{x}^*\}, A) > r(B). \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.3), (3.4) следует

$$\forall \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3\ \big(\mathbf{x}^* \notin U\left(\mathbf{c}(A) - \mathbf{c}(B), r(A) + r(B)\right)\big) \Rightarrow \big(F(\mathbf{x}^*) > \max\{r(A), r(B)\}\big). \tag{3.5}$$

Оценки (3.2) и (3.5) означают

$$\forall \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3\ \big(\mathbf{x}^* \notin U\left(\mathbf{c}(A) - \mathbf{c}(B), r(A) + r(B)\right)\big) \Rightarrow \big(\mathbf{x}^* \notin X(A,B)\big),$$

что эквивалентно (3.1). □

Предложение 3.1 указывает на область, разбив которую на части малого чебышёвского радиуса, и перебрав чебышёвские центры этих частей, можно получить оценку снизу для (1.1). Однако это требует больших вычислительных ресурсов. Поэтому авторы решили использовать по существу формулу (2.3) и множество (2.6).

Л е м м а 3.1. *Пусть при некотором $\mathbf{x}$ для одной из точки $\mathbf{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant a$, определена проекция $\mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})$. Если*

$$\mathbf{a}_i \neq \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}),$$

то

$$\forall \mathbf{x}^* \in \Pi\big(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) - \mathbf{a}_i\big)\ \rho(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}^*\}) \geqslant \left\|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})\right\|. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $B + \{\mathbf{x}\}$ — выпуклое множество, то выполняется вложение

$$B + \{\mathbf{x}\} \subset \Pi\big(\mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}), \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) - \mathbf{a}_i\big). \tag{3.7}$$

Действительно, если бы существовала точка $\mathbf{b} \in B + \{\mathbf{x}\}$, лежащая вне полупространства, ограниченного плоскостью, перпендикулярной к отрезку $[\mathbf{a}_i, \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})]$ и не содержащая $\mathbf{a}_i$, то на отрезке $[\mathbf{b}, \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})]$ нашлась бы точка, лежащая ближе к $\mathbf{a}_i$, чем $\mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})$. Если рассмотреть произвольный вектор $\mathbf{x}^* \in \Pi\big(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\} - \mathbf{a}_i\big)$, то для него из (3.7) следует

$$B + \{\mathbf{x}^*\} \subset \Pi\big(\mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}), \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) - \mathbf{a}_i\big). \tag{3.8}$$

Для любой точки $\mathbf{y} \in \Pi\big(\mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}), \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\}) - \mathbf{a}_i\big)$, очевидно, выполняется

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}_i\| \geqslant \|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})\|.$$

Значит из (3.8) вытекает

$$\forall \mathbf{b} \in B + \{\mathbf{x}^*\}\ \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}\| \geqslant \|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})\|,$$

из чего по определению евклидового расстояния справедливо (3.6). □

Л е м м а 3.2. *Пусть при некотором* $\mathbf{x}$ *для одной из точки* $\mathbf{b}_j$, $1 \leqslant j \leqslant b$, *определена проекция* $\mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)$. *Если*

$$\mathbf{b}_j \neq \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A),$$

то

$$\forall \mathbf{x}^* \in \Pi\big(\mathbf{x}, \mathbf{b}_j - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\big)\ \rho(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}^*, A) \geqslant \|\mathbf{b}_j - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\|.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 с той только разницей, что оно основано на вложении

$$A \subset \Pi\big(\mathbf{x}, \mathbf{b}_j - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\big),$$

из которого следует, что $\forall \mathbf{x}^* \in \Pi\big(\mathbf{x}, \mathbf{b}_j - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\big)$ и $\forall \mathbf{a} \in A$

$$\|\mathbf{b}_j + \mathbf{x}^* - \mathbf{a}\| \geqslant \|\mathbf{b}_j - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\|.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть в некоторой точке* $\mathbf{x}$ *определено характеристическое множество* $W(\mathbf{x})$. *Если существует его подмножество* $W^* \subseteq W(\mathbf{x})$, *такое, что*

$$\mathbf{0} \in W^*, \tag{3.9}$$

то

$$D(A, B) \geqslant \min_{\mathbf{w} \in W^*} \|\mathbf{w}\|. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathbf{0} \in W^*$, то правая часть неравенства (3.10) равна нулю. Тогда оно выполняется, поскольку $D(A, B) \geqslant 0$. Допустим $\mathbf{0} \notin W^*$. Из формулы (2.6) и лемм 3.1, 3.2 следует, что для любого вектора $\mathbf{w} \in W^*$ найдется либо точка $\mathbf{a}_i \in A$ такая, что $\mathbf{w} = \mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})$ и

$$\forall \mathbf{x}^* \in \Pi(\mathbf{x}, -\mathbf{w})\ \rho(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}^*\}) \geqslant \|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}(\mathbf{a}_i, B + \{\mathbf{x}\})\|$$

либо $\mathbf{b}_j \in B$, $\mathbf{w} = \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A) - \mathbf{b}_j$ и

$$\forall \mathbf{x}^* \in \Pi(\mathbf{x}, -\mathbf{w})\ \rho(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}^*, A) \geqslant \|\mathbf{b}_j + \mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{b}_j + \mathbf{x}, A)\|.$$

Значит, для любой точки $\mathbf{w} \in W^*$ справедливо

$$\forall \mathbf{x}^* \in \Pi(\mathbf{x}, -\mathbf{w}) \ F(\mathbf{x}^*) \geqslant \|\mathbf{w}\|. \tag{3.11}$$

Из условия (3.9) следует

$$\forall \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3 \ \exists \mathbf{w} \in W^* \colon \langle \mathbf{x}^* - \mathbf{x}, -\mathbf{w} \rangle \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Из условий (3.11) и (3.12) вытекает

$$\forall \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3 \ F(\mathbf{x}^*) \geqslant \min_{\mathbf{w} \in W^*} \|\mathbf{w}\|. \tag{3.13}$$

Определения 1.1 и (3.13) влекут неравенство (3.10). □

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть в некоторой точке* $\mathbf{x}$ *определено характеристическое множество* $W(\mathbf{x})$. *Если существует его подмножество* $W^* \subseteq W(\mathbf{x})$, *такое, что для него выполняется* (3.9)*, то точка* $\mathbf{x}$ *есть* ε*-субоптимальное решение задачи* 1 *при*

$$\varepsilon = F(\mathbf{x}) - \min_{\mathbf{w} \in W^*} \|\mathbf{w}\|. \tag{3.14}$$

§ 4. Примеры решения задачи 1

Разработан программный комплекс, построенный на предложенных в § 2 алгоритмах. Для его реализации использовался пакет MATLAB. Основу алгоритмов составили итерационные формулы (2.7), (2.8). Эффективность их работы доказана предложением 2.1 и теоремой 2.1. Для оценки точности результатов применяется неравенство (3.10), обоснованное теоремой 3.1.

П р и м е р 4.1. Пусть задан выпуклый пятигранник A с набором вершин

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^5 = \{(0, 0, 0.5), (-0.5, -0.4, 0.1), (0.7, -0.3 - 0.1), \\ (0.1, 0.6, 0), (0.1, -0.1, -0.9)\}$$

и выпуклый пятигранник B с набором вершин

$$\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^5 = \{(0.2, -0.5, 0.4), (0.5, 0.9, 0), (0.3, -0.8, 0.1), \\ (0.1, -0.7, 0.1), (0.1, 0.9, -0.1)\}.$$

Требуется найти вектор $\mathbf{x}$, при котором хаусдорфово расстояние между многогранниками A и $B + \{\mathbf{x}\}$ было бы минимальным.

Найденное в результате проведенных численных экспериментов приближенное значение вектора сдвига $\widetilde{\mathbf{x}} = (-0.1175, 0.0617, -0.3602)$, расстояние между многогранниками $d(A, B + \{\widetilde{\mathbf{x}}\}) = 0.5801$. Существует подмножество $W^* \subset W(\widetilde{\mathbf{x}})$ множества (2.6), состоящее из четырех векторов

$$W^* = \{(-0.2825, -0.4, 0.3111), (0.1175, -0.4484, 0.3488), \\ (-0.1336, 0.1814, 0.5346), (0.1175, -0.0705, -0.5637)\}. \tag{4.1}$$

Для всех векторов из (4.1) выполняется оценка

$$\forall \mathbf{w} \in W^* \ \|\mathbf{w}\| \geqslant F(\widetilde{\mathbf{x}}) - 0.001.$$

Кроме того, для множества (4.1) имеет место включение (3.9). Значит, согласно следствию 3.1, $\widetilde{\mathbf{x}}$ есть ε-субоптимальное решение задачи 1, а для величины ε в соответствии с неравенством (3.14) выполняется оценка $\varepsilon \leqslant 0.001$.

Итерационный метод позволил достигнуть данный результат за 7 итераций. Расположение многогранников A и $B + \{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ показано в разных видах на рис. 1 и 2.

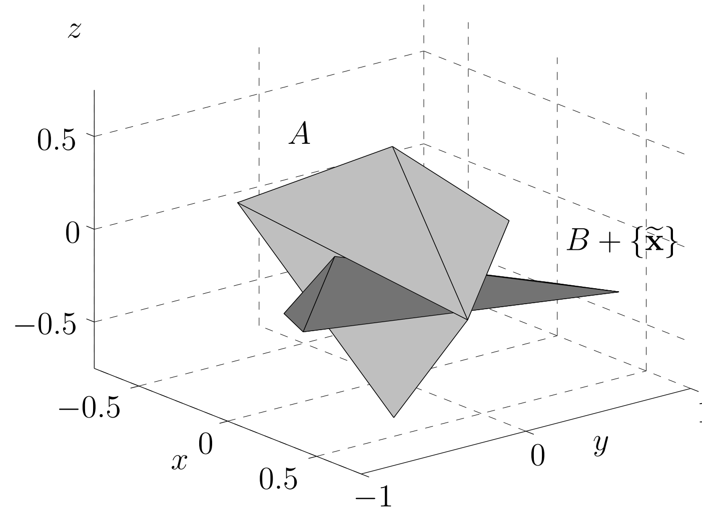

Рис. 1. Расположение многогранников A и $B+\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ в примере 4.1: вид 1.

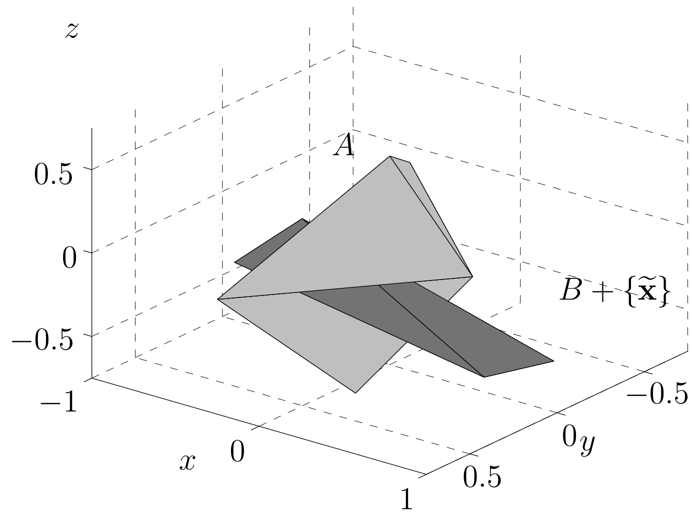

Рис. 2. Расположение многогранников A и $B+\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ в примере 4.1: вид 2.

П р и м е р 4.2. Пусть задан выпуклый шестигранник A с набором вершин

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^6 = \{(0.4, 0.4, 0.6), (0.8, 0.6, 0), (-0.9, 0.7, 0),\\ (-1, -1.2, 0), (0.9, -0.9, 0), (0.1, 0.3, -0.5)\}$$

и выпуклый пятигранник B с набором вершин

$$\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^5 = \{(0.1, -0.1, 2.1), (-0.2, 0.2, -0.1), (-0.4, -0.2, 0),\\ (0.2, -0.3, 0.1), (0.3, 0.4, 0)\}.$$

Требуется решить ту же задачу.

Найденное в результате проведенных численных экспериментов приближенное значение вектора сдвига $\widetilde{\mathbf{x}} = (-0.1721, -0.1982, -0.6935)$, расстояние между многогранниками $d(A, B+\{\widetilde{\mathbf{x}}\}) = 1.0088$. Предложенная процедура позволяет оценить рассогласование между $d(A, B+\{\widetilde{\mathbf{x}}\})$, для него выполняется оценка (1.3) при $\varepsilon = 0.001$. Итерационный метод позволил достигнуть результат за 9 итераций. Расположение многогранников A и $B+\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ показано в разных видах на рис. 3 и 4.

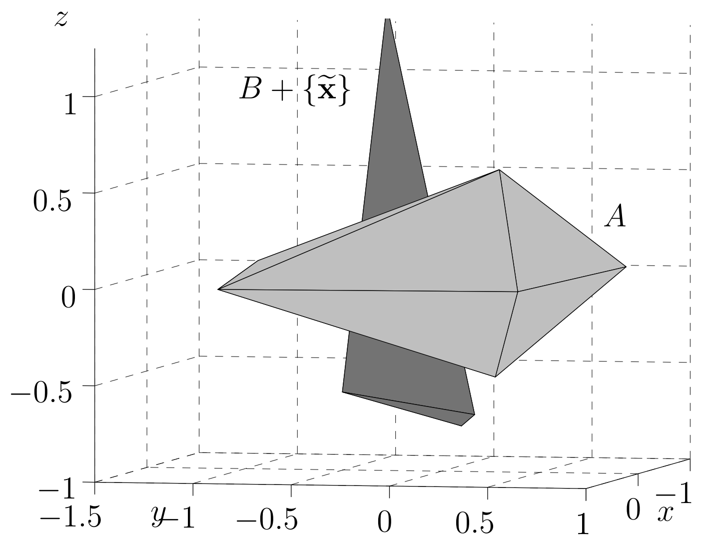

Рис. 3. Расположение многогранников A и $B + \{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ в примере 4.2: вид 1.

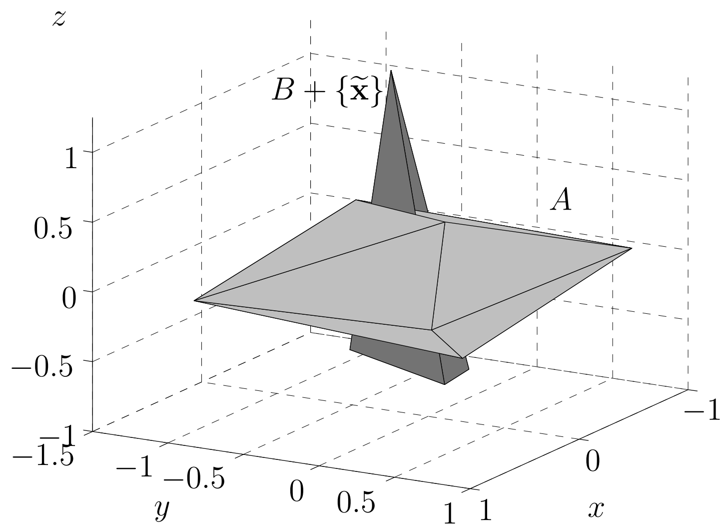

Рис. 4. Расположение многогранников A и $B + \{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ в примере 4.2: вид 2.

§ 5. Заключение

Разработаны алгоритмы решения задачи об оптимальном расположении двух выпуклых многогранников. Их основным элементом является выделение характеристического множества — массива векторов, соединяющих вершины одного многогранника с их проекциями на другой (с учетом знака, для подвижного многогранника знак вектора отрицательный, для неподвижного — положительный). Итерационный сдвиг выполняется на вектор, равный чебышёвскому центру данного массива. Проведено обоснование корректности работы алгоритмов. Доказана теорема, оценивающая уменьшение хаусдорфова расстояние на каждом шаге работы алгоритма. Доказана теорема, позволяющая установить точность решения путем изучения характеристического множества в различных точках. Из теоремы выведено следствие, которое дает возможность установить, с какой точностью ε найденное решение $\widetilde{\mathbf{x}}$ гарантированно является ε-субоптимальным.

Предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, реализующего итерационные формулы. Выполнено моделирования ряда примеров. Проведена визуализация результатов. В дальнейшем авторы планируют разработать методы построения оптимального расположения набора из большого числа многогранников, как это было ранее сделаны для выпуклых многоугольников на плоскости [15]. Другим перспективным направлением представляется решение задачи о минимизации хаусдорфова расстояния не только для многогранников, но и для тел с криволинейной границей, например, эллипсоидов [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн Е. М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37. http://mi.mathnet.ru/cmfd83
2. Alt H., Braß P., Godau M., Knauer C., Wenk C. Computing the Hausdorff distance of geometric patterns and shapes // Discrete and Computational Geometry. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003. P. 65–76. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55566-4_4
3. Gruber P. M. Approximation by convex polytopes // Polytopes: abstract, convex and computational. Dordrecht: Springer, 1994. P. 173–203. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0924-6_8
4. Huttenlocher D. P., Klanderman G. A., Rucklidge W. J. Comparing images using the Hausdorff distance // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1993. Vol. 15. Issue 9. P. 850–863. https://doi.org/10.1109/34.232073
5. Theodoridis S., Koutroumbas K. Pattern recognition. Academic Press, 2006. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-369531-4.X5000-8
6. Ушаков В. Н., Лахтин А. С., Лебедев П. Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 291–308. http://mi.mathnet.ru/timm1101
7. Ушаков В. Н., Лебедев П. Д. Итерационные методы минимизации хаусдорфова расстояния между подвижными многоугольниками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 86–97. https://doi.org/10.20537/vm170108
8. Ushakov V. N., Lebedev P. D., Tarasyev A. M., Ushakov A. V. Optimization of the Hausdorff distance between convex polyhedrons in $\mathbb{R}^3$ // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. Issue 25. P. 197–201. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.084
9. Гаркави А. Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // УМН. 1964. Т. 19. Вып. 6 (120). С. 139–145. http://mi.mathnet.ru/umn6276
10. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
11. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
12. Danilov D. I., Lakhtin A. S. Optimization of the algorithm for determining the Hausdorff distance for convex polygons // Ural Mathematical Journal. 2018. Vol. 4. No. 1. P. 14–23. https://doi.org/10.15826/umj.2018.1.002
13. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.
14. Белобров П. К. К вопросу о чебышёвском центре множества // Известия высших учебных заведений. Математика. 1964. № 1. С. 3–9. http://mi.mathnet.ru/ivm2345
15. Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Алгоритмы минимизации хаусдорфова отклонения выпуклого компакта от набора подвижных выпуклых многоугольников // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5. Вып 2. С. 218–232. https://doi.org/10.24411/2500-0101-2020-15209
16. Лебедев П. Д., Лавров Н. Г. Алгоритмы построения оптимальных упаковок шаров в эллипсоиды // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 59–74. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-05

Поступила в редакцию 01.03.2021

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., зав. сектором отдела динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0725-4233
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Цитирование: П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков. Итерационные алгоритмы минимизации хаусдорфова расстояния между выпуклыми многогранниками // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 142–155.

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov

Iterative algorithms for minimizing the Hausdorff distance between convex polyhedrons

Keywords: Hausdorff distance, minimization, subdifferential, Chebyshev center.

MSC2020: 11K55, 28A78, 46N10

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-06

The problem of finding the optimal location of moving bodies in three-dimensional Euclidean space is considered. We study the problem of finding such a position for two given polytopes A and B at which the Hausdorff distance between them would be minimal. To solve it, the apparatus of convex and nonsmooth analysis is used, as well as methods of computational geometry. Iterative algorithms have been developed and justification has been made for the correctness of their work. A software package has been created, its work is illustrated with specific examples.

REFERENCES

1. Bronshtein E. M. Approximation of convex sets by polytops, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 153, issue 6, pp. 727–762. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9144-x
2. Alt H., Braß P., Godau M., Knauer C., Wenk C. Computing the Hausdorff distance of geometric patterns and shapes, *Discrete and Computational Geometry*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2003, pp. 65–76. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55566-4_4
3. Gruber P. M. Approximation by convex polytopes, *Polytopes: abstract, convex and computational*, Dordrecht: Springer, 1994, pp. 173–203. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0924-6_8
4. Huttenlocher D. P., Klanderman G. A., Rucklidge W. J. Comparing images using the Hausdorff distance, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, vol. 15, issue 9, pp. 850–863. https://doi.org/10.1109/34.232073
5. Theodoridis S., Koutroumbas K. *Pattern recognition*, Academic Press, 1999. http://doi.org/10.1016/B978-0-12-369531-4.X5000-8
6. Ushakov V. N., Lakhtin A. S., Lebedev P. D. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 222–238. https://doi.org/10.1134/S0081543815090151
7. Ushakov V. N., Lebedev P. D. Iterative methods for minimization of the Hausdorff distance between movable polygons, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, vol. 27, issue 1, pp. 86–97 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170108
8. Ushakov V. N., Lebedev P. D., Tarasyev A. M., Ushakov A. V. Optimization of the Hausdorff distance between convex polyhedrons in $\mathbf{R}^3$, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, issue 25, pp. 197–201. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.084
9. Garkavi A. L. On the Chebyshev center and convex hull of a set, *Uspekhi Mathematicheskikh Nauk*, 1964, vol. 19, issue 6 (120), pp. 139–145. http://mi.mathnet.ru/eng/umn6276
10. Pshenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* (Convex analysis and extremal problems), Moscow: Nauka, 1980.
11. Rockafellar R. *Convex analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1997.
12. Danilov D. I., Lakhtin A. S. Optimization of the algorithm for determining the Hausdorff distance for convex polygons, *Ural Mathematical Journal*, 2018, vol. 4, no. 1, pp. 14–23. https://doi.org/10.15826/umj.2018.1.002
13. Shor N. Z. *Minimization methods for non-differentiable functions*, Berlin: Springer, 1985. https://doi.org/10.1007/978-3-642-82118-9
14. Belobrov P. K. On the Chebyshev center of a set, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1964, no. 1, pp. 3–9 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ivm2345

15. Lebedev P. D., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Algorithms of minimization of Hausdorff deviation of a convex compact from a set of movable convex polygons, *Chelyabinskii Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 2020, vol. 5, issue 2, pp. 218–232 (in Russian). https://doi.org/10.24411/2500-0101-2020-15209
16. Lebedev P. D., Lavrov N. G. Algorithms of optimal ball packing into ellipsoids, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 59–74 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-05

Received 01.03.2021

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
E-mail: pleb@yandex.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0725-4233
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Citation: P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov. Iterative algorithms for minimizing the Hausdorff distance between convex polyhedrons, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 142–155.