Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2021. Том 58. С. 18–47

УДК 517.958, 517.984.56

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ МНОГОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Для периодического n-мерного оператора Шрёдингера при $n \geqslant 4$ доказана абсолютная непрерывность спектра, если магнитный потенциал A и электрический потенциал $V + \sum f_j \delta_{S_j}$ удовлетворяют некоторым ограничениям и, в частности, можно предполагать выполнение следующих условий:
(1) магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ либо имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, либо принадлежит какому-либо из пространств $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$, или $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$;
(2) функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству Морри $\mathfrak{L}^{2,p}$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, периодических функций (с заданной решеткой периодов) и

$$\lim_{\tau \to +0} \sup_{0 < r \leqslant \tau} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \biggl(\bigl(v(B^n_r)\bigr)^{-1} \int_{B^n_r(x)} |\mathcal{V}(y)|^p dy \biggr)^{1/p} \leqslant C,$$

где $B^n_r(x)$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $B^n_r = B^n_r(0)$, $v(B^n_r)$ — объем шара B^n_r, $C = C(n,p;A) > 0$;
(3) δ_{S_j} — δ-функции, сосредоточенные на периодических C^1-(кусочно-)гладких гиперповерхностях S_j, $f_j \in L^p_{\mathrm{loc}}(S_j)$, $j = 1,\ldots,m$. На гиперповерхности S_j накладываются дополнительные геометрические условия, от которых зависит выбор числа $p \geqslant n-1$. В частности, если S_j — C^2-гладкие гиперповерхности и для какого-либо единичного вектора e из некоторого плотного множества на единичной сфере S^{n-1}, зависящего от магнитного потенциала A, нормальная кривизна гиперповерхностей S_j вдоль направления вектора e во всех точках касания с прямыми $\{x_0 + te\colon t \in \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ненулевая, то можно выбрать число $p > \frac{3n}{2} - 3$, $n \geqslant 4$.

Ключевые слова: абсолютная непрерывность спектра, периодический оператор Шрёдингера.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-02

Введение и основные результаты

Рассматривается периодический оператор Шрёдингера

$$\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) = \sum_{j=1}^{n} \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right)^2 + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}),$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$. Магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\gamma \in \Lambda} f_\nu(\cdot + \gamma)\, \delta_{\Sigma_\nu}(\cdot + \gamma),$$

где δ_{Σ_ν} — δ-функции, сосредоточенные на компактных C^1-(кусочно-)гладких гиперповерхностях в $\mathbb{R}^n$, $f_\nu\colon \Sigma_\nu \to \mathbb{R}$ — функции, определенные на Σ_ν, $m \in \mathbb{N}$. Обобщенная функция $V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$ рассматривается как (периодический с решеткой периодов Λ) электрический потенциал.

Пусть $\{E_l\}$ — некоторый базис решетки Λ, и $K = \Big\{x = \sum\limits_{l=1}^{n} \xi_l E_l\colon\ 0 \leqslant \xi_l < 1,$ $l = 1, \dots, n\Big\}$ — элементарная ячейка решетки Λ, соответствующая базису $\{E_l\}$; Λ^* — обратная решетка с базисными векторами E_j^*, для которых $(E_j^*, E_l) = \delta_{jl}$, и соответствующей им элементарной ячейкой K^* (где δ_{jl} — символ Кронекера, $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ — скалярное произведение и длина векторов в $\mathbb{R}^n$). Функции, определенные на элементарной ячейке K, в дальнейшем будут отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^n$. Скалярные произведения и нормы в просранствах $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(K)$ вводятся обычным образом (при этом предполагается линейность скалярных произведений по второму аргументу), $H^q(\mathbb{R}^n)$ — классы Соболева порядка $q \geqslant 0$, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Через $\widetilde{H}^q(K)$, $\widetilde{C}^l(K)$, $l \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $\widetilde{C}^\infty(K)$ обозначаются пространства функций $\varphi\colon K \to \mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $C^l(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Эти пространства можно также отождествить с пространствами $H^q(\mathbb{T}^n)$, $C^l(\mathbb{T}^n)$ и $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, где $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\Lambda$ — n-мерный тор.

Обозначим через $B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon |x-y| \leqslant r\}$ и $S_r^{n-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon |x-y| = r\}$ замкнутый шар и сферу радиуса $r > 0$ с центрами в точке $x \in \mathbb{R}^n$; $B_r^n \doteq B_r^n(0)$, $S^{n-1} \doteq$ $\doteq S_1^{n-1}(0)$. Пусть $v(\cdot)$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Через $\mathfrak{L}^{\alpha,p}(K)$, где $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{p}$, обозначим пространства Морри периодических (с решеткой периодов Λ) функций $\mathcal{V} \in L^p(K)$, для которых

$$\|\mathcal{V}\|_{\alpha,p} \doteq \sup_{0<r\leqslant 1}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} r^\alpha \bigg(\big(v(B_r^n)\big)^{-1} \int_{B_r^n(x)} |\mathcal{V}(y)|^p dy \bigg)^{1/p} < +\infty.$$

Положим также

$$\|\mathcal{V}\|^*_{\alpha,p} \doteq \lim_{\tau\to+0}\ \sup_{0<r\leqslant\tau}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} r^\alpha \bigg(\big(v(B_r^n)\big)^{-1} \int_{B_r^n(x)} |\mathcal{V}(y)|^p dy \bigg)^{1/p};$$

$\|\mathcal{V}\|^*_{\alpha,p} \leqslant \|\mathcal{V}\|_{\alpha,p}$. Справедливо равенство $\mathfrak{L}^{n/p,p}(K) = L^p(K)$ и, более того, для всех функций $\mathcal{V} \in L^p(K)$

$$\big(v(B_r^n)\big)^{1/p} \|\mathcal{V}\|_{n/p,p} = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{B_r^n(x)} |\mathcal{V}(y)|^p dy \bigg)^{1/p}.$$

В частности, $L^{n/2}(K) = \mathfrak{L}^{2,n/2}(K)$.

Пусть $L^p_w(K)$, $p \geqslant 1$, — пространство измеримых периодических (с решеткой периодов Λ) функций $\mathcal{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (*слабое L^p-пространство* [1, § IX.4]), для которых конечна квазинорма

$$\|\mathcal{V}\|_p^{(w)} \doteq \sup_{t>0} t\big(v(\{x \in K\colon |\mathcal{V}(x)| > t\})\big)^{1/p}.$$

Для функций $\mathcal{V} \in L^p_w(K)$ также положим

$$\|\mathcal{V}\|_p^{(w),\infty} \doteq \varlimsup_{t\to+\infty} t\big(v(\{x \in K\colon |\mathcal{V}(x)| > t\})\big)^{1/p},$$

$$\|\mathcal{V}\|_p^{(w),*} \doteq \lim_{r\to+0}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\ \sup_{t>0} t\big(v(\{y \in B_r^n(x)\colon |\mathcal{V}(y)| > t\})\big)^{1/p},$$

при этом $\|\mathcal{V}\|_p^{(w),*} \leqslant \|\mathcal{V}\|_p^{(w),\infty} \leqslant \|\mathcal{V}\|_p^{(w)}$;

$$L^{p,0}_w(K) \doteq \{\mathcal{V} \in L^p_w(K)\colon \|\mathcal{V}\|_p^{(w),\infty} = 0\}.$$

Если $1 \leqslant p < \frac{n}{2}$, $n \geqslant 3$, то $L^{n/2}_w(K) \subset \mathfrak{L}^{2,p}(K)$ и для любой функции $\mathcal{V} \in L^{n/2}_w(K)$ выполняется оценка $\|\mathcal{V}\|^*_{2,p} \leqslant C\,\|\mathcal{V}\|^{(w),*}_{n/2}$, где $C = C(n,p) > 0$.

Периодическая (с решеткой периодов Λ) функция $\mathcal{V} \in L^1(K;\mathbb{R})$ *ограничена относительно оператора* $-\Delta = -\sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$ *в смысле квадратичных форм*, если существуют числа $b \geqslant 0$ и $C \geqslant 0$ такие, что для всех функций $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{V}\, |\varphi|^2 dx \right| \leqslant b \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 dx. \qquad (0.1)$$

В приведенном определении вместо функций $\mathcal{V} \in L^1(K;\mathbb{R})$ можно рассматривать более широкий класс обобщенных функций типа производной от меры $\mathcal{V} = d\mu/dx$, где μ — периодическая (с решеткой периодов Λ) знакопеременная (борелевская) мера (с локально ограниченной полной вариацией $|\mu|$). Для таких обобщенных функций

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{V}\, \Phi\, dx \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\, d\mu, \quad \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Неравенство (0.1) распространяется также на функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, при этом интеграл в левой части неравенства (0.1) понимается как предел последовательностей интегралов $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{V}\, |\varphi_\nu|^2 dx$ для функций $\varphi_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathbb{N}$, для которых $\|\varphi - \varphi_\nu\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Точная нижняя грань $b_{\mathrm{form}}(\mathcal{V})$ чисел $b \geqslant 0$, для которых оценка (0.1) при некоторых $C = C(b,\mathcal{V}) \geqslant 0$ выполняется для всех $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, называется *гранью* функции $\mathcal{V}$ относительно оператора $-\Delta$ в смысле квадратичных форм. Для функций $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $1 < p \leqslant \frac{n}{2}$, $n \geqslant 3$, имеет место неравенство $b_{\mathrm{form}}(V) \leqslant C'\|V\|^*_{2,p}$, где $C' = C'(n,p)$ [2] (см. также [3]).

Положим $\Lambda' = \{\gamma \in \Lambda\backslash\{0\} \colon s\gamma \notin \Lambda$ для всех $s \in (0,1)\}$.

Через

$$\varphi_N = \bigl(v(K)\bigr)^{-1} \int_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)} dx, \quad N \in \Lambda^*,$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K;\mathbb{C}^M)$, $M \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество четных знакопеременных борелевских мер $\widetilde{\mu}$ на $\mathbb{R}$ ($|\widetilde{\mu}|(\mathbb{R}) < +\infty$ для полной вариации $|\widetilde{\mu}|$ меры $\widetilde{\mu}$). Через $\mathfrak{M}_h$, $h > 0$, обозначим множество мер $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ipt} d\widetilde{\mu}(t) = 1$$

при всех $p \in (-h,h)$. Множествам $\mathfrak{M}_h$, $h > 0$, принадлежит мера Дирака δ_0.

В настоящей работе предполагается, что периодический с решеткой периодов Λ магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda'$ удовлетворяет следующим двум условиям[1]:

$(\mathcal{A}_1(\gamma))$ отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \bigl\{[0,1] \ni \xi \mapsto A(x+\xi\gamma)\bigr\} \in L^2\bigl([0,1];\mathbb{R}\bigr)$$

непрерывно,

$(\mathcal{A}_2(\gamma))$ для некоторого $h > 0$ существует мера $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{M}_h$ такая, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\widetilde{e} \in S^{n-1}[\gamma]} \left| A_0 - \int_{\mathbb{R}} d\widetilde{\mu}(t) \int_0^1 A(x+\xi\gamma+t\widetilde{e})\, d\xi \right| < \frac{\pi}{|\gamma|}, \qquad (0.2)$$

где $A_0 = \bigl(v(K)\bigr)^{-1} \int_K A(x)\, dx$ и $S^{n-1}[\gamma] \doteq \{\widetilde{e} \in S^{n-1} \colon (\widetilde{e},\gamma) = 0\}$.

[1] Можно требовать выполнения условий $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$ для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$.

При выполнении условия $\mathcal{A}_1(\gamma)$ функция

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \int_0^1 A(x+\xi\gamma)\,d\xi \in \mathbb{R}$$

непрерывна.

Если $A \in \widetilde{H}^q(K;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$, то для всех векторов $\gamma \in \Lambda'$ справедливо условие $\mathcal{A}_1(\gamma)$. В случае $\sum\limits_{N\,\in\,\Lambda^*} \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$ также для любого вектора $\gamma \in \Lambda'$ выполняется условие $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и существует вектор $\gamma \in \Lambda'$ такой, что

$$\sum_{N\,\in\,\Lambda^*\backslash\{0\}\,:\;(N,\gamma)\,=\,0} \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} \,<\, \frac{\pi}{|\gamma|} \tag{0.3}$$

(см. [4]). Поэтому для этого вектора при выборе меры Дирака $\widetilde{\mu} = \delta_0$ имеет место неравенство (0.2).

Если $A \in \widetilde{H}^q(K;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$, то неравенство (0.2) выполняется для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda'$ и меры $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$. Более того, при выборе меры $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$, для которой $d\widetilde{\mu} = F(t)\,dt$, где F — четная функция из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ и

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\,ipt}\,F(t)\,dt \,=\, 0 \tag{0.4}$$

при $|p| \geqslant h_1 > h$, существует вектор $\gamma \in \Lambda'$ (см. [4]) такой, что

$$\begin{gathered}\max_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\ \max_{\widetilde{e}\,\in\,S^{n-1}[\gamma]} \left| A_0 - \int_{\mathbb{R}} d\widetilde{\mu}(t) \int_0^1 A(x+\xi\gamma+t\widetilde{e})\,d\xi \right| \leqslant \\ \leqslant \max_{\widetilde{e}\,\in\,S^{n-1}[\gamma]} \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\backslash\{0\}:\,(N,\gamma)=0} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t\,(N,\widetilde{e})} d\widetilde{\mu}(t) \right| \cdot \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < \frac{\pi}{|\gamma|}\,.\end{gathered} \tag{0.5}$$

Исследованию спектра периодических дифференциальных операторов и доказательству его абсолютной непрерывности посвящено много работ и, в частности, обзорные статьи [5–7], в которых можно найти подробные ссылки. Известные доказательства абсолютной непрерывности спектра основаны на методе Томаса, предложенном в [8] для трехмерного оператора Шрёдингера с периодическим электрическим потенциалом $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. При применении метода Томаса периодический оператор Шрёдингера с помощью преобразования Флоке–Блоха–Гельфанда приводится к оператору, разлагающемуся в прямой интеграл «послойных» операторов (с компактной резольвентой), зависящих от квазиимпульса k, и для доказательства абсолютной непрерывности спектра достаточно доказать, что любое число $\lambda \in \mathbb{R}$ не является собственным значением «послойных» операторов для некоторых значений квазиимпульса k (зависящих от λ).

Двумерный периодический оператор Шрёдингера $\widehat{H}(A)+V$ и его обобщения рассматривались в [9–13]. В [14, 15], в частности, доказана абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора $\widehat{H}(A)+V$, если $b_{\mathrm{form}}(V) = b_{\mathrm{form}}(|A|^2) = 0$. При $n \geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера $\widehat{H}(A)+V$ доказана в [16] при $V \in L^p(K;\mathbb{R})$, $p > n-1$, и $A \in C^{2n+3}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. В дальнейшем условие на магнитный потенциал A было ослаблено в статье [6], в которой предполагалось, что $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > 3n-2$. В [5,17] были также ослаблены условия на электрический потенциал V (и в [17] рассматривался периодический магнитный потенциал $A \in \widetilde{C}^1(K;\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющий для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ условию $\mathcal{A}_2(\gamma)$). В [18] при $n \geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{H}(A)+V$ доказана, если периодический магнитный потенциал A для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ удовлетворяет условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$ и $V \in L^{n/2}_w(K;\mathbb{R})$, $\|V\|^{(w),\infty}_{n/2} \leqslant C$, где $C = C(n,\Lambda;A) > 0$ (условия на магнитный потенциал были получены из соответствующих условий на A для периодического оператора Дирака [19,20]). В [3] условие на электрический потенциал V (при тех же условиях на магнитный потенциал A) было ослаблено до условия $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, $\|V\|^*_{2,p} \leqslant C$, где $C = C(n,p;A) > 0$. При $n \geqslant 3$ и $A \equiv 0$ периодические электрические потенциалы V из пространств Морри $\mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, в случае $\|V\|^*_{2,p} \leqslant C$, где $C = C(n,p,\Lambda) > 0$, и, в частности, потенциалы $V \in L^{n/2}_w(K)$ при $\|V\|^{(w),\infty}_{n/2} \leqslant C$, где $C = C(n,\Lambda) > 0$, рассматривались ранее в [2] и [21]. В [22] при $n = 3$ доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера $\widehat{H}(A) + V$, если для магнитного потенциала A при некотором $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ выполнены условия $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$, $V \in L^1(K;\mathbb{R})$ и $b_{\mathrm{form}}(|V|) \leqslant C$, $C = C(\Lambda;A) \in (0,1)$ (если $A \equiv 0$, то C — универсальная постоянная).

Периодический оператор $\widehat{H}(A) + V + \sum\limits_{\nu=1}^{m} f_\nu\, \delta_{S_\nu}$ при $n \geqslant 3$ исследовался в работе [23], в которой доказана абсолютная непрерывность его спектра, если $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > 3n-2$, $V \in L^{n/2,0}_w(K;\mathbb{R})$ при $n = 3,4$, $V \in L^{n-2,0}_w(K;\mathbb{R})$ при $n \geqslant 5$, $\{S_\nu\}$ — система периодических C^3-(кусочно-)гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^3$ или система периодических C^1-(кусочно-)гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ в случае существования трансверсального всем гиперповерхностям S_ν вектора $e \in S^{n-1}$, $f_\nu \colon S_\nu \to \mathbb{R}$ — периодические функции, для которых $f_\nu \in L^{n-1,0}_w(S_\nu \cap K)$, $\nu = 1,\dots,m$. В [24] при $n = 4$ (и $A \equiv 0$) рассматривался периодический оператор $-\Delta + f\delta_S$, при этом гиперповерхность S предполагалась C^4-(кусочно-)гладкой и с ненулевой гауссовой кривизной (вплоть до границы), $f \in L^p(S \cap K)$, $p > 6$. В [25] при $n \geqslant 4$ (и $A \equiv 0$) доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора $-\Delta + V + \sum\limits_{\nu=1}^{m} f_\nu\, \delta_{S_\nu}$ для C^n-(кусочно-)гладких гиперповерхностей S_ν при $f_\nu \in L^p(S_\nu \cap K)$, $p > n-1$, $\nu = 1,\dots,m$, и $V \in L^{n/2}(K;\mathbb{R})$.

В ряде работ рассматривался оператор Шрёдингера в случае периодичности только по части переменных. В частности, абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера в цилиндре доказана в [25–29]. В [30] рассматривался также оператор Максвелла с периодическими коэффициентами в цилиндре (для которого используются результаты, полученные для оператора Шрёдингера). В [31] исследовался оператор Шрёдингера с коэффициентами, которые являются периодическими по части переменных и быстро убывают по оставшимся переменным. Оператор Шрёдингера $-\mathrm{div}\,(g\nabla\cdot) + V$, где $g = g_1 + g_2$, $V = V_1 + V_2$, коэффициенты g_1 и V_1 являются периодическими по всем переменным, а коэффициенты g_2 и V_2 периодичны только по части переменных и быстро убывают по оставшимся, рассматривался в [32] (см. также [33]). Статьи [34, 35] посвящены исследованию периодических квантовых волноводов (см. также [36]), [37,38] — оператору Шрёдингера на периодических дискретных графах и [39] (см. также [36]) — на периодическом квантовом графе. Метод Томаса применяется также для доказательства абсолютной непрерывности спектра двумерного оператора Шрёдингера с периодическим электрическим потенциалом и однородным магнитным полем B с рациональным потоком $(2\pi)^{-1}Bv(K)$ (см. [40–44]).

В настоящей работе рассматривается периодический оператор Шрёдингера $\widehat{H}(A) + V + \sum\limits_{\nu=1}^{m} f_\nu\, \delta_{S_\nu}$ при $n \geqslant 4$ в случае C^1-(кусочно-)гладких гиперповерхностей S_ν (в отличие от [24,25], где требовались C^n-гладкость гиперповерхностей S_ν и более жесткое условие на V и предполагалось, что $A \equiv 0$), но на них накладываются дополнительные геометрические ограничения. Эта статья является продолжением статьи [45], посвященной доказательству абсолютной непрерывности спектра периодического оператора $\widehat{H}(A) + d\mu/dx$ при $n = 3$, если магнитный потенциал A для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda'$ удовлетворяет условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$

и $\mathcal{A}_2(\gamma)$, а μ — периодическая знакопеременная мера, для которой $b_{\mathrm{form}}(d|\mu|/dx) < C$, где $C = C(A) \in (0,1)$.

Пусть $n \geqslant 3$ и $\mathcal{L}_{n,l}$, $l \in \mathbb{N}$, — множество компактных C^l-гладких гиперповерхностей Σ в $\mathbb{R}^n$ (без самопересечений) с C^l-гладкой границей $\partial\Sigma$ или без нее ($\partial\Sigma = \varnothing$). В окрестностях своих точек гиперповерхности $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,l}$ в некоторых ортонормированных системах координат задаются уравнениями $x_1' = \mathcal{F}(x_2', \ldots, x_n')$, где $\mathcal{F}$ — функции класса C^l и все их частные производные до порядка l включительно непрерывно продолжаются до точек, определяющих границу $\partial\Sigma$ (с координатами $x_1' = \mathcal{F}(x_2', \ldots, x_n'), x_2', \ldots, x_n'$). Вектор $e \in S^{n-1}$ называется *трансверсальным* к гиперповерхности $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$, если существует число $\varepsilon \in (0,1]$ такое, что для любого единичного вектора нормали $\nu(X)$ к гиперповерхности Σ в любой ее точке X (в том числе и на границе $\partial\Sigma$) имеет место неравенство $|(\nu(X), e)| \geqslant \varepsilon$. Пусть $\mathcal{L}_{n,1}(e)$ — множество гиперповерхностей $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$, к которым трансверсален вектор $e \in S^{n-1}$. Все такие гиперповерхности двусторонние.

При $\varkappa > 0$, $e \in S^{n-1}$ обозначим

$$\widetilde{\Pi}_\varkappa(e;\varkappa) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - (x,e)e| < \varkappa^{-1}\}, \quad \widetilde{\sigma}_\varkappa(e,\Sigma) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\Sigma \cap (\widetilde{\Pi}_\varkappa(e;\varkappa) + x)} dS_\Sigma\,,$$

где dS_Σ — элемент $(n-1)$-мерного объема гиперповерхности Σ. При $n \geqslant 4$ определим множества гиперповерхностей

$$\mathcal{L}^*_{n,1}(e) = \Bigl\{\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1} \colon \varkappa^{n-2}\,\widetilde{\sigma}_\varkappa(e,\Sigma) \to 0 \ \text{ при } \ \varkappa \to +\infty\Bigr\},$$

$$\mathcal{L}^{(\theta)}_{n,1}(e) = \Bigl\{\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1} \colon \widetilde{\sigma}_\varkappa(e,\Sigma) \leqslant C\varkappa^{-(n-1)+\theta} \ \text{ для некоторого числа } \ C = C(\theta, e, \Sigma) > 0\Bigr\},$$

$\theta \in [0,1)$; $\mathcal{L}^{(0)}_{n,1}(e) = \mathcal{L}_{n,1}(e)$ и $\mathcal{L}^{(\theta_1)}_{n,1}(e) \subset \mathcal{L}^{(\theta_2)}_{n,1}(e) \subset \mathcal{L}^*_{n,1}(e)$ при $\theta_1 < \theta_2$. Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}_{n,2}(e)$ — множество гиперповерхностей $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,2}$ таких, что во всех точках касания гиперповерхностей Σ и прямых $\{x_0 + te \colon t \in \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, нормальная кривизна гиперповерхностей Σ вдоль направления касательного вектора e ненулевая[2].

Л е м м а 0.1. *Для всех* $e \in S^{n-1}$ (*при* $n \geqslant 4$) *справедливо вложение* $\widetilde{\mathcal{L}}_{n,2}(e) \subset \mathcal{L}^{(1/2)}_{n,1}(e)$.

Доказательство леммы 0.1 приведено в § 2.

Аналогично пространствам $L^p(K)$ и $L^{p,0}_w(K)$, $p \geqslant 1$, для гиперповерхностей $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$ определяются пространства $L^p(\Sigma)$ и $L^{p,0}_w(\Sigma)$ (см. также [23]). В частности, для функций $f \in L^p(\Sigma)$ определена норма

$$\|f\|_{L^p(\Sigma)} \,=\, \biggl(\,\int_\Sigma |f|^p\, dS_\Sigma\biggr)^{1/p}.$$

Для гиперповерхности $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$ и функции $f \in L^{n-1,0}_w(\Sigma;\mathbb{R})$ определим периодическую обобщенную функцию

$$\mathfrak{F}(f,\Sigma) \,=\, \sum_{\gamma \in \Lambda} f(\cdot + \gamma)\, \delta_\Sigma(\cdot + \gamma),$$

[2]Это условие требуется и для точек границ $x \in \partial\Sigma_\nu$, для которых считается, если нормальная кривизна вдоль направления касательного вектора e непосредственно не определена, что она совпадает с пределом последовательностей нормальных кривизн вдоль направлений касательных векторов $e_j \in S^{n-1}$ в точках $x_j \in \Sigma_\nu \backslash \partial\Sigma_\nu$ при $e_j \to e$, $x_j \to x$, $j \to +\infty$.

где δ_Σ — δ-функция, сосредоточенная на гиперповерхности Σ. При этом допускаются пересечения и частичные совпадения гиперповерхностей $\Sigma+\gamma$ (сдвинутой на вектор γ гиперповерхности Σ) при разных векторах $\gamma\in\Lambda$. Для функций $\psi,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$

$$\big(\psi,\mathfrak{F}(f,\Sigma)\varphi\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \doteq \sum_{\gamma\in\Lambda}\int_\Sigma f(x)\,\overline{\psi}(x-\gamma)\,\varphi(x-\gamma)\,dS_\Sigma(x).$$

Справедливо равенство $b_{\text{form}}(\mathfrak{F}(f,\Sigma))=0$ [23]. При рассмотрении нескольких гиперповерхностей Σ_ν и функций f_ν, $\nu=1,\dots,m$, будет использоваться обозначение

$$\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) \doteq \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu).$$

Из условия $\mathcal{A}_1(\gamma)$ следует [46], что для любого $\varepsilon>0$ существует число $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n,\Lambda;A)\geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\big\|\,|A|\,\varphi\,\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+C_\varepsilon\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{0.6}$$

Если при $n\geqslant 3$ для периодического (с решеткой периодов Λ) магнитного потенциала $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (при любом $\varepsilon>0$) выполняется оценка (0.6), $V\in L^1(K;\mathbb{R})$, $b_{\text{form}}(V)<1$, $\Sigma_\nu\in\mathcal{L}_{n,1}$ и $f_\nu\in L^{n-1,0}_w(\Sigma_\nu)$ (в этом случае $b_{\text{form}}\big(\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu)\big)=0$), $\nu=1,\dots,m$, $m\in\mathbb{N}$, то замкнутая квадратичная форма

$$W\big(A,V+\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\});\psi,\varphi\big)=$$

$$=\sum_{j=1}^n\left(\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\Big)\psi,\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j\Big)\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}+(\psi,V\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\big(\psi,\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})\varphi\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

определенная в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеющая областью определения класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, полуограничена снизу и, следовательно [47, теорема VIII.15], порождается самосопряженным оператором $\widehat{H}(A)+V+\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с некоторой областью определения $D(\widehat{H}(A)+V+\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}))\subset H^1(\mathbb{R}^n)$.

Следующие две теоремы являются основным результатом настоящей работы.

Теорема 0.1. *Пусть $n=4$, $A\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ — периодический магнитный потенциал с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^4$, удовлетворяющий для некоторого вектора $\gamma\in\Lambda'$ условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$; $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. Тогда для любого $p\in(\frac32,2]$ существует число $C=C(p;A)>0$ такое, что при всех $V\in\mathfrak{L}^{2,p}(K;\mathbb{R})$, для которых $\|V\|^*_{2,p}\leqslant C$, и всех $\Sigma_\nu\in\mathcal{L}^*_{4,1}(e)$, $f_\nu\in L^{p_\nu}(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$, $p_\nu>3$, $\nu=1,\dots,m$, $m\in\mathbb{N}$, спектр периодического оператора Шрёдингера $\widehat{H}(A)+V+\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$ абсолютно непрерывен.*

Теорема 0.2. *Пусть при $n\geqslant 5$ периодический с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ магнитный потенциал $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет для некоторого вектора $\gamma\in\Lambda'$ условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$; $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. Тогда для любого $p\in(\frac{n-1}{2},\frac n2]$ существует число $C=C(n,p;A)>0$ такое, что для всех периодических функций V из пространства Морри $\mathfrak{L}^{2,p}(K;\mathbb{R})$, для которых $\|V\|^*_{2,p}\leqslant C$, всех гиперповерхностей $\Sigma_\nu\in\mathcal{L}^{(\theta_\nu)}_{n,1}(e)$, $\theta_\nu\in(0,1)$, и функций $f_\nu\in L^{p_\nu}(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$, $p_\nu>\frac n2+1+\frac{n-4}{2(1-\theta_\nu)}$, $\nu=1,\dots,m$, $m\in\mathbb{N}$, спектр периодического оператора Шрёдингера $\widehat{H}(A)+V+\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$ абсолютно непрерывен.*

Теорема 0.3 дополняет и усиливает теорему 1.5 из [23].

Т е о р е м а 0.3. *Пусть* $n \geqslant 4$. *Предположим, что периодический магнитный потенциал* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (*с решеткой периодов* Λ) *либо имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, либо принадлежит какому-либо из пространств* $\widetilde{H}^q(K;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$, *или* $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap \widetilde{H}^q(K;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$. *Тогда для любого* $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$ *существует число* $C = C(n,p;A) > 0$ *такое, что для любой периодической функции* $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *из пространства Морри* $\mathfrak{L}^{2,p}(K)$, *для которой* $\|V\|^*_{2,p} \leqslant C$, *любого* $e \in S^{n-1}$ *и любых гиперповерхностей* $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{n,1}(e)$ *и функций* $f_\nu \in L^{n-1,0}_w(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$, $\nu = 1,\dots,m$, $m \in \mathbb{N}$, *спектр периодического оператора Шрёдингера* $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$ *абсолютно непрерывен.*

З а м е ч а н и е 1. Из теорем 1.4, 2.2 и 2.3 следует, что в условиях теоремы 0.2 к функциям $\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu)$, где $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}^{(\theta_\nu)}_{n,1}(e)$, $\theta_\nu \in (0,1)$, и $f_\nu \in L^{p_\nu}(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$, $p_\nu > \frac{n}{2} + 1 + \frac{n-4}{2(1-\theta_\nu)}$, можно добавить функции $\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu)$, для которых $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{n,1}(e)$ и $f_\nu \in L^{n-1,0}_w(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$. Также и в условиях теоремы 0.1 (при $n = 4$) можно к рассматриваемым функциям $\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu)$ добавить функции $\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu)$, для которых $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{4,1}(e)$ и $f_\nu \in L^{3,0}_w(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$ (см. теоремы 1.4, 2.1 и 2.3).

При доказательстве теоремы 0.3 необходимы теоремы 0.4 и 0.5, которые усиливают соответствующие результаты из [4].

Т е о р е м а 0.4. *Пусть* $n \geqslant 3$. *Предположим, что ряд Фурье периодического* (*с решеткой периодов* Λ) *магнитного потенциала* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *абсолютно сходится. Тогда для любых* $e \in S^{n-1}$ *и* $\varepsilon \in (0,2]$ *существует вектор* $\gamma \in \Lambda'$ *такой, что* $|e - |\gamma|^{-1}\gamma| \leqslant \varepsilon$ *и выполняется оценка* (0.3) (*тогда также выполняется условие* $\mathcal{A}_1(\gamma)$).

Т е о р е м а 0.5. *Пусть* $n \geqslant 3$, $A \in \widetilde{H}^q(K;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$. *Тогда для любых* $e \in S^{n-1}$, $\varepsilon \in (0,2]$, $h > 0$, $h_1 > h$ *и любой меры* $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{M}_h$, *для которой* $d\widetilde{\mu} = F(t)\,dt$, *где* F — *четная функция из пространства Шварца* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *и при* $|p| \geqslant h_1 > h$ *имеет место равенство* (0.4), *существует вектор* $\gamma \in \Lambda'$, *для которого* $|e - |\gamma|^{-1}\gamma| \leqslant \varepsilon$ *и справедлива оценка* (0.5) (*следовательно, выполняется условие* $\mathcal{A}_2(\gamma)$).

Теоремы 0.4 и 0.5 доказываются аналогично доказательству теоремы 3 в [4] с использованием теоремы 0.6, доказательство которой приведено в § 3 (в [4] вместо теоремы 0.6 использовался ее частный случай, когда $\varepsilon = 2$ (см. [48])).

Т е о р е м а 0.6. *Пусть* Λ — *решетка в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,2]$ *существуют числа* $c_j = c_j(n,\Lambda,\varepsilon) > 0$, $j = 1,2,3$, *такие, что для любой неотрицательной борелевской меры* μ' *на* S^{n-1}, *любого вектора* $e \in S^{n-1}$, *любого* $h \in (0,1]$ *и любого* $R_0 \geqslant c_3$ *найдется вектор* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, *для которого*

(1) $\gamma \in B^n_{R_0} \backslash B^n_{R_0/2}$,

(2) $|e - |\gamma|^{-1}\gamma| \leqslant \varepsilon$,

(3) *если* $(\gamma,\gamma^*) = 0$ *для некоторого вектора* $\gamma^* \in \Lambda^*\backslash\{0\}$, *то* $|\gamma^*| > c_1 R_0^{1/(n-1)}$,

(4) $\mu'\bigl(\{e' \in S^{n-1}\colon |(e',|\gamma|^{-1}\gamma)| \leqslant h\}\bigr) \leqslant c_2 \max\bigl\{h, R_0^{-n/(n-1)}\bigr\}\,\mu'(S^{n-1})$.

При доказательстве теорем 0.1, 0.2 и 0.3 ключевую роль играют теорема 1.4 и теоремы 2.1, 2.2 и 2.3. Теорема 1.4 доказана в § 1. При доказательстве используются некоторые результаты из [3] и [18]. В § 2 приведены доказательства теорем 2.1, 2.2 и 2.3, а в § 3 — доказательство теоремы 0.6.

§ 1. Теория Флоке–Блоха и некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $n \geqslant 3$. Предположим, что для периодического магнитного потенциала $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при любом $\varepsilon > 0$ для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство (0.6). Тогда для любого $\varepsilon > 0$, любого вектора $k \in \mathbb{R}^n$ и любой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\|\,|A|\,\varphi\,\|^2_{L^2(K)} \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^n \left\|\left(k_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi\right\|^2_{L^2(K)} + C_\varepsilon\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,, \tag{1.1}$$

где $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n, \Lambda; A)$ — числа из неравенств (0.6) (см., например, доказательство теоремы 3 в [3]). В дальнейшем рассматриваются обобщенные функции $\mathcal{V} = V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$, где $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{n,1}$ и $f_\nu \in L^{n-1,0}_w(\Sigma_\nu; \mathbb{R})$, $\nu = 1, \dots, m$. Для них (так как $b_{\text{form}}(\mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})) = 0$ [23]) $b_{\text{form}}(\mathcal{V}) = b_{\text{form}}(V) \leqslant C' \, \|V\|^*_{2,p}$, где $C' = C'(n,p) > 0$, и (в силу определения грани $b_{\text{form}}(\mathcal{V})$) для любого $b > b_{\text{form}}(\mathcal{V})$ существует число $C = C(b, \mathcal{V}) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется оценка (0.1). Тогда также для любого $b > b_{\text{form}}(\mathcal{V})$, любого вектора $k \in \mathbb{R}^n$ и любой периодической функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедлива оценка[3]

$$\left| \int_K \mathcal{V}\, |\varphi|^2 dx \right| \leqslant \left| \int_K V |\varphi|^2 dx \right| + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma_\nu - \gamma') \cap K} |f_\nu(x+\gamma')|\, |\varphi(x)|^2 \, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x) \leqslant$$

$$\leqslant b \sum_{j=1}^{n} \left\| \left(k_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi \right\|^2_{L^2(K)} + C\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)} \tag{1.2}$$

с той же константой $C = C(b, \mathcal{V})$ (где $dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}$ — элемент $(n-1)$-мерного объема гиперповерхности $\Sigma_\nu - \gamma'$, которая получается из гиперповерхности Σ сдвигом на вектор $-\gamma'$. При этом точная нижняя грань чисел $b \geqslant 0$, для которых при некоторых $k \in \mathbb{R}^n$ и $C \geqslant 0$ оценка (1.2) выполняется для всех $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$, совпадает с $b_{\text{form}}(\mathcal{V})$.

При $k \in \mathbb{R}^n$, $e \in S^{n-1}$ и $\varkappa \in \mathbb{R}$ рассмотрим в $L^2(K)$ полуторалинейную форму

$$W\big(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e; \psi, \varphi\big) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j - i\varkappa e_j \right) \psi, \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j + i\varkappa e_j \right) \varphi \right)_{L^2(K)} +$$

$$+ \int_K V \overline{\psi} \varphi \, dx + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma_\nu - \gamma') \cap K} f_\nu(x+\gamma')\, \overline{\psi}(x) \varphi(x) \, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x)$$

с областью определения $Q\big(W\big(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e; \cdot, \cdot\big)\big) = \widetilde{H}^1(K)$. Если для магнитного потенциала A при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка (0.6) и $b_{\text{form}}(\mathcal{V}) < 1$, то $W\big(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e; \cdot, \cdot\big)$ — замкнутая секториальная форма, порождаемая m-секториальным оператором $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e)$ [47, § VIII.15], действующим в $L^2(K)$ и имеющим область определения $D(\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e)) \subset \widetilde{H}^1(K)$, не зависящую от комплексного вектора $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$. Операторы $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + \zeta e)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, при любых $k \in \mathbb{R}^n$ и $e \in S^{n-1}$ образуют самосопряженное аналитическое семейство типа (B) [49, § VII.4]. При $\varkappa = 0$ операторы $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k)$ являются самосопряженными операторами с компактной резольвентой и, следовательно, с дискретным спектром. Оператор $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int^{\oplus}_{2\pi K^*} \widehat{H}(A, \mathcal{V}; k) \, \frac{dk}{(2\pi)^n v(K^*)} \tag{1.3}$$

(см. [6, 23, 50]). Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Флоке–Блоха–Гельфанда. Из разложения в прямой интеграл (1.3) и аналитической теоремы Фредгольма следует, что число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ тогда и только тогда, когда λ — собственное значение операторов $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e)$ при всех комплексных векторах $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$, при этом сингулярный спектр оператора $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ отсутствует. Поэтому справедлива следующая теорема (см. [5, 6, 23, 50]).

[3]Интегралы $\int_{(\Sigma_\nu - \gamma') \cap K} |f_\nu(x+\gamma')|\, |\varphi(x)|^2 \, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x)$ для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ определяются как пределы последовательностей таких же интегралов для функций $\varphi_j \in \widetilde{C}^\infty(K)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\|\varphi - \varphi_j\|_{\widetilde{H}^1(K)} \to 0$ при $j \to +\infty$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $n \geqslant 3$. *Предположим, что для периодического* (*с решеткой периодов* Λ) *магнитного потенциала* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *выполняется оценка* (0.6), $\mathcal{V} = V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$, *где* $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, $b_{\mathrm{form}}(V) < 1$, $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{n,1}$ *и* $f_\nu \in L^{n-1,0}_w(\Sigma_\nu; \mathbb{R})$, $\nu = 1, \dots, m$. *Тогда спектр оператора* $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ *абсолютно непрерывен, если для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *найдется комплексный вектор* $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$ (*зависящий от* λ) *такой, что число* λ *не является собственным значением оператора* $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e)$.

В дальнейшем предполагается, что периодический магнитный потенциал A для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda'$ удовлетворяет условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$ (в частности, если $A \equiv 0$, то γ — любой вектор из Λ'). Обозначим $e = |\gamma|^{-1}\gamma \in S^{n-1}$, и для векторов $x \in \mathbb{R}^n$ пусть $x_\parallel = (x, e) \in \mathbb{R}$, $x_\perp = x - (x, e)e \in \mathbb{R}^n$. Для всех $N \in \Lambda^*$, $k \in \mathbb{R}^n$ и $\varkappa \geqslant 0$ положим

$$G^\pm_N = G^\pm_N(k + i\varkappa e) \doteq \left((k_\parallel + 2\pi N_\parallel)^2 + (\varkappa \pm |k_\perp + 2\pi N_\perp|)^2 \right)^{1/2}.$$

Имеет место равенство

$$G^+_N G^-_N = \left| \sum_{j=1}^n (k_j + 2\pi N_j + i\varkappa e_j)^2 \right|.$$

Определим оператор

$$\widehat{H}(k + i\varkappa e) = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} + k_j + i\varkappa e_j \right)^2,$$

$D(\widehat{H}(k+i\varkappa e)) = \widetilde{H}^2(K) \subset L^2(K)$. При $\alpha \geqslant 0$ определим также неотрицательные операторы

$$\widehat{G}^\alpha_\pm \varphi = \sum_{N \in \Lambda^*} (G^\pm_N)^\alpha \varphi_N \, e^{2\pi i (N,x)},$$

действующие в $L^2(K)$, $\varphi \in D(\widehat{G}^\alpha_\pm) = \widetilde{H}^\alpha(K)$; $\widehat{G}_\pm \doteq \widehat{G}^1_\pm$. Справедливо полярное разложение $\widehat{H}(k+i\varkappa e) = \widehat{U}(k+i\varkappa e)|\widehat{H}(k+i\varkappa e)|$, где $|\widehat{H}(k+i\varkappa e)| = \widehat{G}_+\widehat{G}_-$, $D(|\widehat{H}(k+i\varkappa e)|) = \widetilde{H}^2(K)$ и $\widehat{U}(k+i\varkappa e)$ — унитарный оператор в $L^2(K)$, для которого

$$\widehat{U}(k + i\varkappa e)\, \varphi = \sum_{N \in \Lambda^*} (G^+_N G^-_N)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n (k_j + 2\pi N_j + i\varkappa e_j)^2 \right) \varphi_N \, e^{2\pi i (N,x)}, \quad \varphi \in L^2(K).$$

Векторы $k \in \mathbb{R}^n$ будут далее выбираться так, что $|(k, \gamma)| = \pi$. Тогда (для всех $N \in \Lambda^*$ и $\varkappa \geqslant 0$)

$$G^+_N \geqslant G^-_N \geqslant \pi|\gamma|^{-1}, \quad G^+_N \geqslant \varkappa, \quad G^+_N G^-_N \geqslant 2\pi|\gamma|^{-1}\varkappa.$$

В этом случае существуют обратные операторы $\widehat{G}^{-\alpha}_\pm \doteq (\widehat{G}^\alpha_\pm)^{-1}$, $D(\widehat{G}^{-\alpha}_\pm) = L^2(K)$, $\alpha \geqslant 0$; $|\widehat{H}(k + i\varkappa e)|^{\pm 1/2} = \widehat{G}^{\pm 1/2}_+(k + i\varkappa e)\widehat{G}^{\pm 1/2}_-(k + i\varkappa e)$, $D(|\widehat{H}(k + i\varkappa e)|^{1/2}) = \widetilde{H}^1(K)$.

Через $W(A; k + i\varkappa e; \cdot, \cdot)$ обозначим полуторалинейную форму $W(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e; \cdot, \cdot)$ при $\mathcal{V} \equiv 0$.

Следующая теорема доказана в [18].

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *периодический* (*с решеткой периодов* Λ) *магнитный потенциал, удовлетворяющий при некотором векторе* $\gamma \in \Lambda'$ *условиям* $\mathcal{A}_1(\gamma)$ *и* $\mathcal{A}_2(\gamma)$; $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. *Тогда найдутся числа* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n; A) \in (0, 1]$ *и* $\varkappa_0 > 0$ *такие, что для* *всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\psi \in \widetilde{H}^1(K)\colon \|\,|\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2}\psi\,\|_{L^2(K)} \leqslant 1} |W(A;k+i\varkappa e;\psi,\varphi)| \;\geqslant\; \widetilde{C}\,\|\,|\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\,\|_{L^2(K)}$$

($\widetilde{C} = 1$ *при* $A \equiv 0$).

При $0 \leqslant a < \varkappa$ обозначим

$$\mathcal{K}_a = \mathcal{K}_a(k+i\varkappa e) = \{N \in \Lambda^*\colon G_N^-(k+i\varkappa e) \leqslant a\},$$

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_a(k+i\varkappa e) = \{\varphi \in L^2(K)\colon \varphi_N = 0 \ \text{ при всех } \ N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_a\}.$$

Пусть $\widehat{I}$ — единичный оператор в $L^2(K)$. Определим ортогональные проекторы $\widehat{P}_a$ в $L^2(K)$ на подпространства $\mathcal{H}_a$:

$$\widehat{P}_a\,\varphi = \varphi - \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_a} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi \in L^2(K).$$

Для векторов $\gamma \in \Lambda'$ и чисел $\delta > 0$ обозначим через $\mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ множество обобщенных функций $\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$, где $\Sigma_\nu \in \mathcal{L}_{n,1}$ и $f_\nu \in L_w^{n-1,0}(\Sigma_\nu;\mathbb{R})$, $\nu = 1,\dots,m$, для которых существует число $\varkappa_0' > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma_\nu - \gamma')\cap K} |f_\nu(x+\gamma')| \cdot |\varphi(x)|^2\, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x) \;\leqslant \\ \leqslant\; \delta\,\|\,|\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\,\|^2_{L^2(K)} = \delta\,\|\widehat{G}_+^{1/2} G_-^{1/2}\varphi\|^2_{L^2(K)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

(где $e = |\gamma|^{-1}\gamma$).

Л е м м а 1.1. *Если $\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$, то существует число $\varkappa_1' \geqslant \varkappa_0' > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_1'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ выполняется оценка*

$$\sum_{\nu=1}^m \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma_\nu - \gamma')\cap K} |f_\nu(x+\gamma')| \cdot |\varphi(x)|^2\, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x) \;\leqslant\; 2\,\delta\,\|\widehat{G}_+^{1/2} G_-^{1/2}\varphi\|^2_{L^2(K)}. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $b_{\mathrm{form}}(\mathfrak{F}(\{|f_\nu|\},\{\Sigma_\nu\})) = 0$ (см. [23]), то существует число $C' = C'\big(C,\mathfrak{F}(\{|f_\nu|\},\{\Sigma_\nu\})\big) \geqslant 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{R}^n$ и всех функций $\varphi \in L^2(K)$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma_\nu - \gamma')\cap K} |f_\nu(x+\gamma')| \cdot \big|\big((\widehat{I} - \widehat{P}_{\varkappa/2})\,\varphi\big)(x)\big|^2\, dS_{\Sigma_\nu - \gamma'}(x) \;\leqslant \\ \leqslant\; \frac{\delta}{4}\, v(K) \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\varkappa/2}} |k+2\pi N|^2\,|\varphi|^2 + C' v(K) \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\varkappa/2}} |\varphi_N|^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Если $N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\varkappa/2}$, то $|k+2\pi N| < G_N^+$, $|k+2\pi N| < 3G_N^-$ и, следовательно, $|k+2\pi N|^2 < 3G_N^+G_N^-$. С другой стороны, при выполнении условия $|(k,\gamma)| = \pi$ (и для всех $N \in \Lambda^*$ и $\varkappa > 0$) $G_N^+G_N^- \geqslant 2\pi|\gamma|^{-1}\varkappa$. Поэтому для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_1' \doteq \max\,\{x_0',2C'|\gamma|(\pi\delta)^{-1}\}$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ правая часть неравенства (1.6) не превосходит

$$\left(\frac{3\delta}{4} + \frac{C'|\gamma|}{2\pi\varkappa}\right) v(K) \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\varkappa/2}} G_N^+ G_N^- \, |\varphi_N|^2 \leqslant \delta \, \| \, |\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2} (\widehat{I} - \widehat{P}_{\varkappa/2}) \, \varphi \, \|^2_{L^2(K)}. \quad (1.7)$$

Из оценок (1.6), (1.7) и неравенства (1.4), которое справедливо для функций $\widehat{P}_{\varkappa/2}\,\varphi$, $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$, (для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_1'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$) следует неравенство (1.5). Лемма 1.1 доказана. $\square$

Так как для всех $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K)$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, $n \geqslant 3$, и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место равенство $\|V - \lambda\|^*_{2,p} = \|V\|^*_{2,p}$, то следующая теорема является следствием теоремы 6 из [3].

Теорема 1.3. *Для $n \geqslant 3$ и $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$ существует постоянная $C' = C'(n,p) > 0$ такая, что для любой периодической (с решеткой периодов Λ) функции $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ из пространства Морри $\mathfrak{L}^{2,p}(K)$, любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ существует число $\varkappa_0'' > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0''$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедлива оценка*

$$\int_K |V - \lambda| \cdot |\varphi|^2 dx \leqslant C'(\delta + \|V\|^*_{2,p}) \, \|\widehat{G}_+^{1/2} \widehat{G}_-^{1/2} \varphi\|^2_{L^2(K)} \, .$$

Теорема 1.4. *Пусть $n \geqslant 3$ и для периодического магнитного потенциала $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (с решеткой периодов Λ) при некотором $\gamma \in \Lambda'$ выполняются условия $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$. Предположим, что $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_1 + \theta_2 < 1$, для функции $V \in \mathfrak{L}^{2,p}(K;\mathbb{R})$, $p \in \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, справедливо неравенство $\|V\|^*_{2,p} \leqslant \theta_1 (C')^{-1} \widetilde{C}$ и $\mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\}) \in \mathfrak{B}(\gamma, \frac{1}{2}\,\theta_2 \widetilde{C})$, где $\widetilde{C}$ и C' — постоянные из теорем 1.2 и 1.3. Тогда спектр периодического оператора Шрёдингера $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ абсолютно непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$ и $\theta_3 \in (0, 1 - \theta_1 - \theta_2)$. Из теорем 1.2, 1.3 (при выборе числа $\delta = (C')^{-1}\widetilde{C}\theta_3$) и леммы 1.1 для обобщенной функции $\mathcal{V} = V - \lambda + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ получаем, что для всех $\varkappa \geqslant \max\{\varkappa_0, \varkappa_1', \varkappa_0''\}$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\sup_{\psi \in \widetilde{H}^1(K)\colon \| \, |\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2} \psi \, \|_{L^2(K)} \leqslant 1} |W(A, \mathcal{V}; k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\psi \in \widetilde{H}^1(K)\colon \| \, |\widehat{H}(k+i\varkappa e)|^{1/2} \psi \, \|_{L^2(K)} \leqslant 1} |W(A; k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| -$$

$$- \big(C'(\delta + \|V\|^*_{2,p}) + \widetilde{C}\theta_2\big) \, \|\widehat{G}_+^{1/2} \widehat{G}_-^{1/2} \varphi\|_{L^2(K)} \geqslant \widetilde{C}(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \, \| \, |\widehat{H}(k + i\varkappa e)|^{1/2} \varphi \, \|_{L^2(K)}.$$

Поэтому для всех $\varphi \in D(\widehat{H}(A, V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\}); k + i\varkappa e)) \subset \widetilde{H}^1(K)$ (и всех рассматриваемых чмсел $\varkappa$ и векторов $k \in \mathbb{R}^n$) справедливо неравенство

$$\| \, |\widehat{H}(k + i\varkappa e)|^{-1/2} \widehat{H}(A, V - \lambda + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\}); k + i\varkappa e) \, \varphi \, \|_{L^2(K)} \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{C}(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \, \| \, |\widehat{H}(k + i\varkappa e)|^{1/2} \varphi \, \|_{L^2(K)} \geqslant \widetilde{C}(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \sqrt{2\pi|\gamma|^{-1}\varkappa} \, \| \, \varphi \, \|_{L^2(K)}$$

и, следовательно, число $\lambda \in \mathbb{R}$ не может быть собственным значением оператора $\widehat{H}(A, V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\}); k + i\varkappa e)$. Так как число $\lambda \in \mathbb{R}$ выбирается любым, то абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{H}(A) + V + \mathfrak{F}(\{f_\nu\}, \{\Sigma_\nu\})$ вытекает из теоремы 1.1. Теорема 1.4 доказана. $\square$

Теорема 1.4 (при $n \geqslant 4$) используется при доказательстве теорем 0.1, 0.2 и 0.3.

§ 2. Доказательства теорем 0.1, 0.2 и 0.3

Пусть $\gamma \in \Lambda'$ и периодический (с решеткой периодов Λ) магнитный потенциал $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, удовлетворяет условиям $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$. В силу теоремы 1.4 для доказательства теорем 0.1 и 0.2 достаточно показать, что обобщенные функции $\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\})$, удовлетворяющие условиям этих теорем, для любого $\delta > 0$ принадлежат множеству $\mathfrak{B}(\gamma,\delta)$. В условиях теоремы 0.3 задается вектор $e \in S^{n-1}$, который трансверсален ко всем гиперповерхностям Σ_ν, $\nu = 1,\dots,m$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ все векторы $e' \in S^{n-1}$, для которых $|e'-e| < \varepsilon$, также трансверсальны к гиперповерхностям Σ_ν. Поэтому из теорем 0.4 и 0.5 следует, что найдется вектор $\gamma \in \Lambda'$, для которого вектор $|\gamma|^{-1}\gamma \in S^{n-1}$ трансверсален ко всем гиперповерхностям Σ_ν и для периодического магнитного потенциала A выполняются условия $\mathcal{A}_1(\gamma)$ и $\mathcal{A}_2(\gamma)$. Следовательно, при доказательстве теоремы 0.3 (как и теорем 0.1 и 0.2) можно предполагать, что (для заданного вектора $\gamma \in \Lambda'$) $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, и (в силу теоремы 1.4) достаточно показать, что $\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для всех $\delta > 0$. Кроме того, если $\mathfrak{F}(f_\nu,\Sigma_\nu) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для всех $\delta > 0$, $\nu = 1,\dots,m$, то также $\mathfrak{F}(\{f_\nu\},\{\Sigma_\nu\}) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для всех $\delta > 0$. Поэтому теоремы 0.1, 0.2 и 0.3 вытекают из теоремы 1.4 и следующих теорем.

Теорема 2.1. *Пусть $n = 4$, $\gamma \in \Lambda'$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\Sigma \in \mathcal{L}^*_{4,1}(e)$ и $f \in L^p(\Sigma;\mathbb{R})$, $p > 3$. Тогда $\mathfrak{F}(f,\Sigma) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для любого $\delta > 0$.*

Теорема 2.2. *Пусть $n \geqslant 5$, $\gamma \in \Lambda'$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\Sigma \in \mathcal{L}^{(\theta)}_{n,1}(e)$, где $\theta \in (0,1)$, и $f \in L^p(\Sigma;\mathbb{R})$, $p > \frac{n}{2} + 1 + \frac{n-4}{2(1-\theta)}$. Тогда $\mathfrak{F}(f,\Sigma) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для любого $\delta > 0$.*

Теорема 2.3. *Пусть $n \geqslant 4$, $\gamma \in \Lambda'$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}(e)$ и $f \in L^{n-1,0}_w(\Sigma;\mathbb{R})$. Тогда $\mathfrak{F}(f,\Sigma) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$ для всех $\delta > 0$.*

Зафиксируем вектор $\gamma \in \Lambda'$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. В дальнейшем предполагается, что $n \geqslant 4$, $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$ и $f \in L^{n-1,0}_w(\Sigma;\mathbb{R})$ (кроме теоремы 2.5 и следствия 2.1, в которых рассматриваются функции $f \in L^p(\Sigma)$, $p \geqslant n/2$, и $f \in L^p_w(\Sigma)$, $p > n/2$, $n \geqslant 3$). Через $\operatorname{diam} K^*$ обозначается диаметр элементарной ячейки K^*. Пусть $p(n) = \frac{2n}{n-2}$, $n \geqslant 3$.

Теорема 2.4 (см. [3]). *Пусть (при $n \geqslant 3$) $\varkappa \geqslant 2\pi \operatorname{diam} K^*$ и $\pi \operatorname{diam} K^* \leqslant a \leqslant \varkappa/2$. Тогда для любого вектора $k \in \mathbb{R}^n$ и любой функции $\Phi \in \mathcal{H}_a(k + i\varkappa e)$ справедливо неравенство*

$$\|\Phi\|_{L^{p(n)}(K)} \leqslant C\, a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\, \varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\, \|\Phi\|_{L^2(K)},$$

где $C = C(n) > 0$.

Выберем четную функцию $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой преобразование Фурье

$$\widehat{\Omega}(\eta) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Omega(\xi)\, e^{-i\eta\xi}\, d\xi, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условиям: $\widehat{\Omega}(\eta) = 1$ при $|\eta| \leqslant 1$, $0 \leqslant \widehat{\Omega}(\eta) \leqslant 1$ при $1 < |\eta| \leqslant 2$ и $\widehat{\Omega}(\eta) = 0$ при $|\eta| > 2$.

Пусть $\{e'_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, для которого $e'_n = e$. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то $x_\perp = (x'_1,\dots,x'_{n-1})$, $x'_j = (x,e'_j)$, $j = 1,\dots,n-1$, и $x_\parallel = x'_n$.

При $\varkappa > 0$ и $0 < a \leqslant \varkappa$ положим

$$\Omega_{\varkappa,a}(x) = 2a\,(3\varkappa)^{n-1}\,\Omega(2ax'_n) \prod_{j=1}^{n-1} \Omega(3\varkappa x'_j), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Определим также функции

$$\widetilde{\Omega}_{\varkappa,a}(x) = \sum_{\gamma'\in\Lambda} \Omega_{\varkappa,a}(x+\gamma'), \quad \mathcal{G}_{\varkappa,a}(x) = \int_\Sigma |f(y)|\,\widetilde{\Omega}_{\varkappa,a}(x-y)\,dS_\Sigma(y), \quad x\in K.$$

Пусть

$$\Xi(\varkappa,a) = \Xi(\Lambda,\Omega,\Sigma;\varkappa,a) = \max_{x\in K}\int_\Sigma |\widetilde{\Omega}_{\varkappa,a}(x-y)|\,dS_\Sigma(y).$$

Далее будет использоваться краткое обозначение $a_0 = \pi\,\mathrm{diam}\,K^*$.

Т е о р е м а 2.5. *Пусть $\Sigma\in\mathcal{L}_{n,1}$ и $f\in L^p(\Sigma)$, $p\geqslant n/2$, $n\geqslant 3$. Тогда для всех $\varkappa\geqslant 4a_0$, всех $a\in[a_0,\varkappa/2]$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$ и всех функций $\varphi\in\mathcal{H}_a(k+i\varkappa e)$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi(x)|^2\,dx \;=\; \sum_{\gamma'\in\Lambda}\int_{(\Sigma-\gamma')\cap K} |f(x+\gamma')|\cdot|\varphi(x)|^2\,dS_{\Sigma-\gamma'}(x) \;\leqslant \\ \leqslant\; C_1 a^{\frac{n+2}{2p}}\,\varkappa^{\frac{n-2}{2p}}\,\big(\Xi(\varkappa,a)\big)^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)},\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $C_1 = C_1(n,p,\Omega)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для коэффициентов Фурье функций $|\varphi|^2$ имеет место равенство $(|\varphi|^2)_N = 0$, если $\pi|N_\|| > a$ или $2\pi|N'_j| > 3\varkappa$ при некотором $j\in\{1,\dots,n-1\}$, то для функций

$$\big(|\varphi|^2 * \Omega_{\varkappa,a}\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)|^2\,\Omega_{\varkappa,a}(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

при всех $N\in\Lambda^*$

$$\big(|\varphi|^2 * \Omega_{\varkappa,a}\big)_N \;=\; (|\varphi|^2)_N\,\widehat{\Omega}\big(\pi a^{-1}|N_\||\big)\prod_{j=1}^{n-1}\widehat{\Omega}\big(2\pi(3\varkappa)^{-1}|N'_j|\big) \;=\; (|\varphi|^2)_N.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi(y)|^2\,dy \;= \\ &= \sum_{\gamma'\in\Lambda}\int_{(\Sigma-\gamma')\cap K} |f(y+\gamma')|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2\,\Omega_{\varkappa,a}(y-x)\,dx\right)dS_{\Sigma-\gamma'}(y) \;= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2\left(\sum_{\gamma'\in\Lambda}\int_{(\Sigma-\gamma')\cap K}|f(y+\gamma')|\,\Omega_{\varkappa,a}(x-y)\,dS_{\Sigma-\gamma'}(y)\right)dx \;= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2\left(\int_\Sigma |f(y)|\,\Omega_{\varkappa,a}(x-y)\,dS_\Sigma(y)\right)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2\,\mathcal{G}_{\varkappa,a}(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для $b>0$ определим функции

$$K\ni x\mapsto \mathcal{G}^{b,\downarrow}_{\varkappa,a}(x) = \begin{cases}\mathcal{G}_{\varkappa,a}(x), & \text{если } \mathcal{G}_{\varkappa,a}(x)\leqslant b,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$\mathcal{G}^{b,\uparrow}_{\varkappa,a}(\cdot) = \mathcal{G}_{\varkappa,a}(\cdot) - \mathcal{G}^{b,\downarrow}_{\varkappa,a}(\cdot)$. Тогда

$$\int_K |\varphi(x)|^2\,\mathcal{G}_{\varkappa,a}(x)\,dx \;=\; \int_K |\varphi(x)|^2\,\big(\mathcal{G}^{b,\downarrow}_{\varkappa,a}(x) + \mathcal{G}^{b,\uparrow}_{\varkappa,a}(x)\big)\,dx, \tag{2.3}$$

$$\int_K |\varphi(x)|^2\, \mathcal{G}^{\,b,\downarrow}_{\varkappa,\,a}(x)\, dx \;\leqslant\; b\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}, \tag{2.4}$$

и в силу теоремы 2.4 (и неравенства Гёльдера)

$$\begin{gathered}\int_K |\varphi(x)|^2\, \mathcal{G}^{\,b,\uparrow}_{\varkappa,\,a}(x)\, dx \;\leqslant\; \biggl(\,\int_K \bigl(\mathcal{G}^{\,b,\uparrow}_{\varkappa,\,a}(x)\bigr)^{n/2} dx\biggr)^{2/n} \biggl(\,\int_K |\varphi|^{\,p(n)} dx\biggr)^{(n-2)/n} \;\leqslant \\ \leqslant\; C^{\,2}\, b^{1-\frac{2p}{n}}\, a^{1+\frac{2}{n}}\, \varkappa^{1-\frac{2}{n}}\, \|\mathcal{G}_{\varkappa,\,a}\|^{\frac{2p}{n}}_{L^p(K)}\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

При $b = C^{\frac{n}{p}}\, a^{\frac{n+2}{2p}}\, \varkappa^{\frac{n-2}{2p}}\, \|\mathcal{G}_{\varkappa,\,a}\|_{L^p(K)}$ (если $\|\mathcal{G}_{\varkappa,\,a}\|_{L^p(K)} > 0$) из (2.3), (2.4) и (2.5) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2\, \mathcal{G}_{\varkappa,\,a}(x)\, dx \;\leqslant\; 2\, C^{\frac{n}{p}}\, a^{\frac{n+2}{p}}\, \varkappa^{\frac{n-2}{2p}}\, \|\mathcal{G}_{\varkappa,\,a}\|_{L^p(K)}\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}. \tag{2.6}$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{gathered}\|\mathcal{G}_{\varkappa,\,a}\|_{L^p(K)} \;=\; \biggl(\,\int_K \biggl|\,\int_\Sigma |f(y)|\, \widetilde{\Omega}_{\varkappa,\,a}(x-y)\, dS_\Sigma(y)\biggr|^p dx\biggr)^{1/p} \;\leqslant \\ \biggl(\,\int_K \biggl(\,\int_\Sigma |f(y)|^p\, |\, \widetilde{\Omega}_{\varkappa,\,a}(x-y)|\, dS_\Sigma(y)\biggr) \biggl(\,\int_\Sigma |\, \widetilde{\Omega}_{\varkappa,\,a}(x-y)|\, dS_\Sigma(y)\biggr)^{p-1} dx\biggr)^{1/p} \;\leqslant \\ \leqslant\; \biggl(\,\int_{\mathbb{R}} |\Omega(\xi)|\, d\xi\biggr)^{\frac{n}{p}} \bigl(\Xi(\varkappa, a)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\, \|f\|_{L^p(\Sigma)}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Неравенство (2.1) теперь следует из (2.2), (2.6) и (2.7), при этом $C_1 = 2\, C^{\,n/p}\, \|\Omega\|^{n/p}_{L^1(\mathbb{R})}$ (и C — постоянная из теоремы 2.4). Теорема 2.5 доказана. □

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть* $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$ *и* $f \in L^p_w(\Sigma)$, $p > n/2$, $n \geqslant 3$. *Тогда для всех* $\varkappa \geqslant 4a_0$, *всех* $a \in [a_0, \varkappa/2]$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^n$ *и всех функций* $\varphi \in \mathcal{H}_a(k + i\varkappa e)$ *выполняются неравенства*

$$\int_K \mathfrak{F}(|f|, \Sigma)\, |\varphi(x)|^2\, dx \;\leqslant\; C_1'\, a^{\frac{n+2}{2p}}\, \varkappa^{\frac{n-2}{2p}}\, \bigl(\Xi(\varkappa, a)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\, \|f\|^{(w)}_p\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}, \tag{2.8}$$

где $C_1' = C_1'(n, p, \Omega) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant p - \frac{n}{2}$. При $b > 0$ определим функции

$$\Sigma \ni x \mapsto f^{\uparrow}_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| > b, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$f^{\downarrow}_b(\cdot) = f(\cdot) - f^{\uparrow}_b(\cdot)$. Тогда

$$\|f^{\uparrow}_b\|^{p-\varepsilon}_{L^{p-\varepsilon}(\Sigma)} \;\leqslant\; \sum_{j\,=\,1}^{+\infty} (2^j b)^{\,p-\varepsilon}\, S_\Sigma\bigl(\{x \in \Sigma\colon 2^{j-1} b < |f(x)| \leqslant 2^j b\}\bigr) \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \sum_{j\,=\,1}^{+\infty} (2^j b)^{\,p-\varepsilon}\, \bigl(2^{-j+1} b^{-1} \|f\|^{(w)}_p\bigr)^p \;=\; 2^p (2b)^{-\varepsilon} \bigl(1 - 2^{-\varepsilon}\bigr)^{-1} \bigl(\|f\|^{(w)}_p\bigr)^p,$$

$$\|f^{\downarrow}_b\|^{p+\varepsilon}_{L^{p+\varepsilon}(\Sigma)} \;\leqslant\; \sum_{j\,=\,1}^{+\infty} (2^{-j+1} b)^{\,p+\varepsilon}\, S_\Sigma\bigl(\{x \in \Sigma\colon 2^{-j} b < |f(x)| \leqslant 2^{-j+1} b\}\bigr) \;\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} (2^{-j+1}b)^{p+\varepsilon} \left(2^j b^{-1} \|f\|_p^{(w)}\right)^p = 2^p\, b^\varepsilon \left(1 - 2^{-\varepsilon}\right)^{-1} \left(\|f\|_p^{(w)}\right)^p,$$

где $S_\Sigma(\cdot)$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега измеримых множеств на гиперповерхности Σ. Из (2.1) следует оценка

$$\int_K \mathfrak{F}(|f|, \Sigma)\, |\varphi(x)|^2\, dx = \int_K \mathfrak{F}(|f_b^{\uparrow}|, \Sigma)\, |\varphi(x)|^2\, dx + \int_K \mathfrak{F}(|f_b^{\downarrow}|, \Sigma)\, |\varphi(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1'' \left(\sum_{\pm} \left(a^{\frac{n+2}{2}}\, \varkappa^{\frac{n-2}{2}} \left(\Xi(\varkappa, a)\right)^{-1} 2^p \left(1 - 2^{-\varepsilon}\right)^{-1} \left(\|f\|_p^{(w)}\right)^p b^{\pm\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p\pm\varepsilon}} \right) \Xi(\varkappa, a)\, \|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,, \tag{2.9}$$

где $C_1'' = C_1''(n, p, \Omega, \varepsilon) = \max\,\bigl\{C_1(n, p+\varepsilon, \Omega), C_1(n, p-\varepsilon, \Omega)\bigr\}$. Положив $\varepsilon = p - \frac{n}{2}$ и выбрав число $b > 0$ так, чтобы слагаемые в сумме в правой части неравенства (2.9) были равны, из (2.9) для всех $\varkappa \geqslant 4a_0$, всех $a \in [a_0, \varkappa/2]$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$ и всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_a(k + i\varkappa e)$ получаем оценку (2.8), где

$$C_1'(n, p, \Omega) = 4 \left(1 - 2^{-(p-\frac{n}{2})}\right)^{-1} \max\,\bigl\{C_1(n, 2p - \frac{n}{2}, \Omega), C_1(n, \frac{n}{2}, \Omega)\bigr\}.$$

Следствие 2.1 доказано. □

При $\varkappa > 0$ и $a > 0$ обозначим

$$\Pi_\varkappa = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n\colon\, -(2\varkappa)^{-1} \leqslant x_j' \leqslant (2\varkappa)^{-1},\ j = 1, \ldots, n-1\bigr\},$$

$$\Pi_{\varkappa, a} = \bigl\{x \in \Pi_\varkappa\colon\, -(2a)^{-1} \leqslant x_n' \leqslant (2a)^{-1}\bigr\},$$

$$\Pi_{\varkappa, a}(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \Pi_{\varkappa, a} + \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \varkappa^{-1} e_j' + \nu_n a^{-1} e_n',$$

где $\nu_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть

$$\sigma_{\varkappa, a}(e, \Sigma) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{(\Sigma - x) \cap \Pi_{\varkappa, a}} dS_{\Sigma - x}\,, \quad \sigma_\varkappa(e, \Sigma) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{(\Sigma - x) \cap \Pi_\varkappa} dS_{\Sigma - x}\,;$$

$\widetilde{\sigma}_{\varkappa/2}(e, \Sigma) \leqslant \sigma_\varkappa(e, \Sigma) \leqslant \widetilde{\sigma}_{\sqrt{n-1}\,\varkappa/2}(e, \Sigma)$; $\sigma_{\varkappa, a}(e, \Sigma) \leqslant \sigma_\varkappa(e, \Sigma) \leqslant S_\Sigma(\Sigma)$ (где $S_\Sigma(\Sigma)$ — $(n-1)$-мерный объем гиперповерхности Σ).

Л е м м а 2.1. *Существует число $C_3 = C_3(n, \Lambda, a_0, \Omega, \Sigma) > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant a_0$ и $a \in [a_0, \varkappa/2]$*

$$\Xi(\varkappa, a) \leqslant C_3\, a \varkappa^{n-1} \sigma_\varkappa(e, \Sigma). \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, то для всех $x \in \Pi_{\varkappa, a}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ справедлива оценка

$$|\Omega_{\varkappa, a}(x)| \leqslant C_4\, a \varkappa^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 + |\nu_j|)^{-2},$$

где $C_4 = C_4(\Omega) > 0$. Тогда

$$\Xi(\varkappa, a) \leqslant \max_{x \in K} \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{\Sigma - \gamma'} |\Omega_{\varkappa, a}(x - y)|\, dS_{\Sigma - \gamma'}(y) \leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant C_4\, a \varkappa^{n-1} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} (1 + |\nu_j|)^{-2} \sup_{x \in K} \sum_{\gamma' \in \Lambda} \int_{(\Sigma - \gamma') \cap (\Pi_{\varkappa, a}(\nu_1, \ldots, \nu_n) + x)} dS_{\Sigma - \gamma'}\,.$$

С другой стороны, Σ — компактная гиперповерхность, поэтому существует число $C_5 = C_5(n,\Lambda,a_0,\Sigma) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $x \in K$ и $\nu_1,\dots,\nu_n \in \mathbb{Z}$ существует не более C_5 векторов $\gamma' \in \Lambda$, для которых $(\Sigma - \gamma') \cap (\Pi_{\varkappa,a}(\nu_1,\dots,\nu_n) + x) \neq \varnothing$ и, следовательно, оценка (2.10) вытекает из оценки (2.11), при этом

$$C_3 \,=\, C_4\, C_5 \prod_{j=1}^{n} \sum_{\nu_j=-\infty}^{+\infty} (1+|\nu_j|)^{-2}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Если $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}(e)$, $e \in S^{n-1}$, $n \geqslant 4$, то существует число $C_6 = C_6(e,\Sigma) > 0$ такое, что для всех $\varkappa > 0$ имеет место неравенство $\sigma_\varkappa(e,\Sigma) \leqslant C_6\, \varkappa^{-(n-1)}$. Так как (при всех $\varkappa > 0$ и $a > 0$) $\sigma_{\varkappa,a}(e,\Sigma) \leqslant \sigma_\varkappa(e,\Sigma)$, то справедлива простая лемма 2.2.

Л е м м а 2.2. *Если $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}(e)$, $n \geqslant 4$, где $e \in S^{n-1}$, то для всех $\varkappa > 0$ и $a > 0$*

$$a\varkappa^{n-1}\, \sigma_{\varkappa,a}(e,\Sigma) \,\leqslant\, C_6\, a.$$

Пусть $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$, $n \geqslant 4$. Выберем число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Sigma) > 0$ так, что для любой точки $X \in \Sigma$ в некоторой ортогональной системе координат с началом в этой точке гиперповерхность $\Sigma \cap B^n_{\varepsilon_0}(X)$ задается уравнением $x''_1 = g(x''_2,\dots,x''_n)$ (если $X \in \partial\Sigma$, то не все точки из $B^n_{\varepsilon_0}(X)$, задаваемые этим уравнением, принадлежат $\Sigma \cap B^n_{\varepsilon_0}(X)$), где g — непрерывно дифференцируемая функция, единичный вектор нормали $\nu(X)$ в точке X направлен по оси Xx''_1 и для единичных векторов нормали $\nu(X')$ в точках $X' \in \Sigma \cap B^n_{\varepsilon_0}(X)$ выполняется неравенство $\big(\nu(X'),\nu(X)\big) \geqslant \frac{1}{2}$. Пусть $a'_0 = a'_0(\Sigma) > 0$ — такое число, что при $\varkappa \geqslant a \geqslant a'_0$ и для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $e \in S^{n-1}$ и $X \in \Sigma \cap (\Pi_{\varkappa,a'_0} + x)$ (если $\Sigma \cap (\Pi_{\varkappa,a'_0} + x) \neq \varnothing$) справедливо вложение $\Pi_{\varkappa,a'_0} + x \subset B^n_{\varepsilon_0}(X)$. Тогда $(n-1)$-мерный объем ортогональной проекции множества $\Pi_{\varkappa,a} + x$ на перпендикулярную единичному вектору нормали $\nu(X)$ гиперплоскость не превосходит $C'_7\, a^{-1}\, \varkappa^{-(n-2)}$, где $C'_7 = C'_7(n) > 0$ и, следовательно, $\sigma_{\varkappa,a}(e,\Sigma) \leqslant 2\, C'_7\, a^{-1}\, \varkappa^{-(n-2)}$. Если $a < a'_0 \leqslant \varkappa$, то $\sigma_{\varkappa,a}(e,\Sigma) \leqslant \big([a'_0\, a^{-1}] + 1\big)\, \sigma_{\varkappa,a'_0}(e,\Sigma) < 2\, a'_0\, a^{-1}\, \sigma_{\varkappa,a'_0}(e,\Sigma) \leqslant 4\, C'_7\, a^{-1}\, \varkappa^{-(n-2)}$ (где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$). Поэтому для всех $\varkappa > 0$ (в силу компактности гиперповерхности Σ) $\widetilde{\sigma}_\varkappa(e,\Sigma) \leqslant \sigma_\varkappa(e,\Sigma) \leqslant C''_7\, \varkappa^{-(n-2)}$, где $C''_7 = C''_7(\Sigma) > 0$, и справедлива лемма 2.3.

Л е м м а 2.3. *Если $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$, $n \geqslant 4$, то для всех $e \in S^{n-1}$, $\varkappa > 0$ и $a \in (0,\varkappa]$*

$$a\varkappa^{n-1}\, \sigma_{\varkappa,a}(e,\Sigma) \,\leqslant\, C_7\, \varkappa,$$

где $C_7 = C_7(\Sigma, a'_0) > 0$.

Следующая простая лемма используется при доказательстве леммы 0.1.

Л е м м а 2.4. *Пусть $h > 0$, $T > 0$, $[\xi_1,\xi_2] \subset \mathbb{R}$, $\xi_1 < \xi_2$, $f \in C^2([\xi_1,\xi_2];\mathbb{R})$ и $d^2 f/d\xi^2 \geqslant T$ при всех $\xi \in [\xi_1,\xi_2]$. Тогда множество $\{\xi \in [\xi_1,\xi_2] \colon 0 \leqslant f(\xi) \leqslant h\}$ либо пустое, либо состоит из одного или двух* (*непересекающихся*) *отрезков* (*которые могут вырождаться в точки*) *с суммарной длиной, не превосходящей $2\sqrt{2hT^{-1}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 0.1. Предположим, что $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,2}$, $n \geqslant 5$, и во всех точках касания гиперповерхности Σ и прямых $\{x_0 + te \colon t \in \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, нормальная кривизна гиперповерхности Σ вдоль направления касательного вектора e ненулевая. Обозначим через Σ_e множество точек касания гиперповерхности Σ и прямых $\{x_0 + te \colon t \in \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Можно выбрать число $\varepsilon'_0 \in (0,\varepsilon_0]$, замкнутое множество (гиперповерхность, которая может состоять из нескольких несвязных частей) $\Sigma_e(\varepsilon'_0) \subseteq \Sigma$, для которого $\Sigma_e \subseteq \Sigma_e(\varepsilon'_0)$, и числа $T > 0$ и $\delta_0 \in (0,1]$ такие, что

(1) для каждой точки $X \in \Sigma_e(\varepsilon_0')$ гиперповерхность $\Sigma \cap B^n_{\varepsilon_0'}(X)$ в некоторой ортогональной системе координат с началом в точке X задается уравнением $x_1''' = \widetilde{g}(x_2''', \dots, x_n''')$, где $\widetilde{g}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, вектор e направлен по оси Xx_n''', единичный вектор нормали $\nu(X)$ лежит в двумерной плоскости $Xx_1'''x_n'''$, $\bigl|(\nu(X'), e)\bigr| \leqslant \frac{1}{2}$, $\bigl(\nu(X'), \nu(X)\bigr) \geqslant \frac{1}{2}$ и $|\partial^2\widetilde{g}/\partial(x_n''')^2| \geqslant T$ для всех точек $X' = (x_1''', x_2''', \dots, x_n''') \in \Sigma \cap B^n_{\varepsilon_0'}(X)$,

(2) для всех $X \in \Sigma \setminus \Sigma_e(\varepsilon_0')$ выполняется неравенство $|(\nu(X), e)| \geqslant \delta_0$.

Выберем число $a_0'' = a_0''(e, \Sigma) \geqslant a_0'$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant a_0''$, всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $X \in \Sigma_e(\varepsilon_0') \cap (\Pi_{\varkappa, a_0''} + x)$ (при $\Sigma_e(\varepsilon_0') \cap (\Pi_{\varkappa, a_0''} + x) \neq \varnothing$) имеет место вложение $\Pi_{\varkappa, a_0''} + x \subset B^n_{\varepsilon_0'}(X)$. Из условия (1) и леммы 2.4 следует, что при $\varkappa \geqslant a_0''$, $x \in \mathbb{R}^n$ и при заданных координатах $x_2''', \dots, x_{n-1}'''$ мера Лебега множества $\{x_n''' \colon X' = \bigl(\widetilde{g}(x_2''', \dots, x_{n-1}''', x_n'''), x_2''', \dots, x_{n-1}''', x_n'''\bigr) \in \Pi_{\varkappa, a_0''} + x\}$ не превосходит $C_8' \varkappa^{-1/2}$, где $C_8' = C_8'(n, T) > 0$. Тогда также

$$\int_{\Sigma_e(\varepsilon_0') \cap (\Pi_{\varkappa, a_0''} + x)} dS_\Sigma \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}} C_8' \varkappa^{-(n-\frac{3}{2})}.$$

Откуда

$$\sigma_\varkappa(e, \Sigma_e(\varepsilon_0')) \leqslant C_8'' \varkappa^{-(n-\frac{3}{2})}, \tag{2.12}$$

где $C_8'' = C_8''(e, \Sigma, a_0'') > 0$. С другой стороны, из условия (2) (которое означает, что вектор e трансверсален к гиперповерхности $\Sigma \setminus \Sigma_e(\varepsilon_0')$) при всех $\varkappa > 0$ вытекает оценка

$$\sigma_\varkappa(e, \Sigma \setminus \Sigma_e(\varepsilon_0')) \leqslant C_6' \varkappa^{-(n-1)}, \tag{2.13}$$

где $C_6' = C_6'(e, \Sigma, \delta_0) > 0$. Из оценок (2.12) и (2.13) при всех $\varkappa > 0$ получаем

$$\sigma_\varkappa(e, \Sigma) \leqslant \sigma_\varkappa(e, \Sigma_e(\varepsilon_0')) + \sigma_\varkappa(e, \Sigma \setminus \Sigma_e(\varepsilon_0')) \leqslant C \varkappa^{-(n-\frac{3}{2})},$$

где $C = C(e, \Sigma) > 0$. Поэтому $\Sigma \in \mathcal{L}^{(1/2)}_{n,1}(e)$. Лемма 0.1 доказана.

Пусть $\Sigma \in \mathcal{L}^*_{n,1}(e)$. Тогда $\sigma_\varkappa(e, \Sigma) \leqslant \varkappa^{-(n-2)} \mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)$ для всех $\varkappa > 0$, где $[0, +\infty) \ni \varkappa \mapsto \mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa) \in (0, +\infty)$ — невозрастающая функция, для которой $\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to +\infty$, и из леммы 2.3 непосредственно вытекает лемма 2.5.

Л е м м а 2.5. *Если* $\Sigma \in \mathcal{L}^*_{n,1}(e)$, $e \in S^{n-1}$, $n \geqslant 4$, *то существует число* $C_9 = C_9(e, \Sigma) > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa > 0$ *и* $a \in (0, \varkappa]$

$$a\varkappa^{n-1} \sigma_{\varkappa, a}(e, \Sigma) \leqslant C_9 \varkappa \min\{1, a\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\}.$$

Из леммы 2.3 также непосредственно следует лемма 2.6.

Л е м м а 2.6. *Пусть* $\Sigma \in \mathcal{L}^{(\theta)}_{n,1}(e)$, $\theta \in (0,1)$, $e \in S^{n-1}$, $n \geqslant 4$. *Тогда существует число* $C_{10} = C_{10}(e, \Sigma, \theta) > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa > 0$ *и* $a \in (0, \varkappa]$

$$a\varkappa^{n-1} \sigma_{\varkappa, a}(e, \Sigma) \leqslant C_{10} \varkappa \min\{1, a\varkappa^{\theta-1}\}.$$

Пусть $n \geqslant 4$, $\gamma \in \Lambda'$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\Sigma \in \mathcal{L}_{n,1}$ и $f \in L^p(\Sigma)$, $p \geqslant n/2$. Для чисел $\varkappa \geqslant 4a_0$ выберем числа $\widetilde{n} = \widetilde{n}(a_0; \varkappa) \geqslant 2$ и $a_\mu = 2^{\mu - \widetilde{n} - 1}\varkappa$, $\mu = 1, \dots, \widetilde{n}$, так, что $a_0 \leqslant a_1 < 2a_0$. Для (векторов $k \in \mathbb{R}^n$ и) функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k + i\varkappa e)$ определим функции $\varphi_{a_1} = \widehat{P}_{a_1}\varphi$, $\varphi_{a_\mu} = \widehat{P}_{a_\mu}\varphi - \widehat{P}_{a_{\mu-1}}\varphi$, $\mu = 2, \dots, \widetilde{n}$. Из теоремы 2.5 и леммы 2.1 для всех $\varkappa \geqslant 4a_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k + i\varkappa e)$ и всех $\mu = 1, \dots, \widetilde{n}(a_0; \varkappa)$ следуют неравенства

$$\begin{gathered} \int_K \mathfrak{F}(|f|, \Sigma)\, |\varphi_{a_\mu}|^2\, dx \leqslant \\ \leqslant C_1 C_3^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\Sigma)}\, a^{\frac{n+2}{2p}} \varkappa^{\frac{n-2}{2p}} \bigl(a_\mu \varkappa^{n-1} \sigma_{\varkappa, a}(e, \Sigma)\bigr)^{\frac{p-1}{p}} \|\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}, \end{gathered} \tag{2.14}$$

При условии $|(k,\gamma)|=\pi$ для всех $N\in\Lambda^*$ (и всех $\varkappa>0$) выполняется оценка $G_N^-(k+i\varkappa e)\geqslant$ $\geqslant\pi|\gamma|^{-1}$, поэтому

$$\|\varphi_{a_1}\|^2_{L^2(K)}\leqslant\pi^{-1}|\gamma|\,\varkappa^{-1}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_1}\|^2_{L^2(K)}\,. \tag{2.15}$$

Если $\mu\geqslant2$, то

$$\|\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\leqslant a_{\mu-1}^{-1}\varkappa^{-1}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}=2\,a_\mu^{-1}\varkappa^{-1}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\,. \tag{2.16}$$

В случае $p>n-1$ для числа $\varepsilon'>0$ выберем числа $\beta_\mu=a_\mu^{\varepsilon'}$, $\mu=1,\dots,\widetilde{n}$. Тогда $\sum\limits_{\mu=1}^{\widetilde{n}}\beta_\mu^{-1}\leqslant$ $\leqslant\bigl(1-2^{-\varepsilon'}\bigr)^{-1}a_0^{-\varepsilon'}$ и из (2.14) в силу неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{gathered}\int_K\mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi|^2\,dx\leqslant\biggl(\sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}}\beta_\mu^{-1}\biggr)\sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}}\beta_\mu\int_K\mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2\,dx\leqslant\\ \leqslant C_{11}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}}a_\mu^{\frac{n+2}{2p}+\varepsilon'}\varkappa^{\frac{n-2}{2p}}\bigl(a_\mu\varkappa^{n-1}\sigma_{\varkappa,a_\mu}(e,\Sigma)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\|\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)},\end{gathered} \tag{2.17}$$

где $C_{11}=C_1C_3^{\frac{p-1}{p}}\bigl(1-2^{-\varepsilon'}\bigr)^{-1}a_0^{-\varepsilon'}$. Оценки (2.15), (2.16) и (2.17) используются при доказательстве теорем 2.1 и 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $n=4$, $\Sigma\in\mathcal{L}^*_{4,1}(e)$, где $e=|\gamma|^{-1}\gamma$, $\gamma\in\Lambda'$, и $f\in L^p(\Sigma)$, $p>n-1$. Выберем произвольное число $\delta>0$ и пусть $p_1=\frac12\,(p+3)$, $\varepsilon'=3\bigl(\frac{1}{p_1}-\frac1p\bigr)$. Из (2.15), (2.16) и (2.17) для всех $\varkappa\geqslant4a_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ следует оценка

$$\begin{gathered}\int_K\mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi|^2\,dx\leqslant \\ \leqslant C_{11}C_9^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,\varkappa\sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}}a_\mu^{\frac{3}{p_1}}\bigl(\min\{1,a_\mu\,\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\}\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\|\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\leqslant\\ \leqslant C_{11}C_9^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\Biggl(\pi^{-1}|\gamma|\,a_1^{\frac{3}{p_1}+\frac{p-1}{p}}\bigl(\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_1}\|^2_{L^2(K)}+\\ +2\sum_{\mu=2}^{\widetilde{n}}a_\mu^{-(1-\frac{3}{p_1})}\bigl(\min\{1,a_\mu\,\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\}\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\Biggr).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Так как $1-\frac{3}{p_1}>0$, то найдется число $\widetilde{n}_1\geqslant2$ такое, что при $\widetilde{n}\geqslant\widetilde{n}_1$ (если $\varkappa\geqslant2^{\widetilde{n}_1}a_0>$ $>2^{\widetilde{n}_1-1}a_1$) для всех $\mu=\widetilde{n}_1,\dots,\widetilde{n}$

$$2\,C_{11}C_9^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,a_\mu^{-(1-\frac{3}{p_1})}\leqslant\delta. \tag{2.19}$$

С другой стороны, $\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\to0$ при $\varkappa\to+\infty$, поэтому существует число $\varkappa_0'\geqslant2^{\widetilde{n}_1}a_0$ такое, что при $\varkappa\geqslant\varkappa_0'$

$$\pi^{-1}|\gamma|\,C_{11}C_9^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,a_1^{\frac{3}{p_1}+\frac{p-1}{p}}\bigl(\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\leqslant\delta \tag{2.20}$$

и для всех $\mu=2,\dots,\widetilde{n}_1-1$

$$2\,C_{11}C_9^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,a_\mu^{\frac{p-1}{p}-(1-\frac{3}{p_1})}\bigl(\mathcal{F}_{e,\Sigma}(\varkappa)\bigr)^{\frac{p-1}{p}}\leqslant\delta. \tag{2.21}$$

Из (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) и ортогональности функций $\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}$ при разных индексах μ следует, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0'$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$

$$\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi|^2\,dx\ \leqslant\ \delta\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|^2_{L^2(K)}\,.$$

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Пусть $n\geqslant 5$, $\Sigma\in\mathcal{L}^{(\theta)}_{n,1}(e)$, где $e=|\gamma|^{-1}\gamma$, $\gamma\in\Lambda'$, $\theta\in(0,1)$, и $f\in L^p(\Sigma)$, $p>\frac n2+1+\frac{n-4}{2(1-\theta)}$. Выберем число $\varepsilon'\in(0,1)$ так, что $(1-\varepsilon')p-\frac n2-1-\frac{n-4}{2(1-\theta)}\doteq\widetilde{\varepsilon}>0$. Из (2.15), (2.16), (2.17) и леммы 2.6 для всех $\varkappa\geqslant 4a_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ получаем

$$\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi|^2\,dx\ \leqslant \tag{2.22}$$

$$\leqslant\ C_{11}C_{10}^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\Bigg(\pi^{-1}|\gamma|\,a_1^{\frac{n}{2p}+1+\varepsilon'}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}-(1-\theta)\,\frac{p-1}{p}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_1}\|^2_{L^2(K)}+$$

$$+\,2\sum_{\mu=2}^{\widetilde{n}} a_\mu^{\frac{n+2}{2p}+\varepsilon'-1}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}}\,\big(\min\{1,a_\mu\,\varkappa^{\theta-1}\}\big)^{\frac{p-1}{p}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\Bigg).$$

Так как $\frac{n-4}{2p}-(1-\theta)\,\frac{p-1}{p}=-\big(\widetilde{\varepsilon}+\frac n2+\varepsilon'p\big)<0$, при $\mu\geqslant 2$ и $a_\mu\leqslant\varkappa^{1-\theta}$

$$a_\mu^{\frac{n+2}{2p}+\varepsilon'-1}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}}\,\big(\min\{1,a_\mu\,\varkappa^{\theta-1}\}\big)^{\frac{p-1}{p}}\ =\ a_\mu^{\frac{n}{2p}+\varepsilon'}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}-(1-\theta)\,\frac{p-1}{p}}\ \leqslant\ \varkappa^{-\frac{(1-\theta)}{p}\,\widetilde{\varepsilon}}$$

и при ($\mu\geqslant 2$ и) $a_\mu\geqslant\varkappa^{1-\theta}$ также

$$a_\mu^{\frac{n+2}{2p}+\varepsilon'-1}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}}\,\big(\min\{1,a_\mu\,\varkappa^{\theta-1}\}\big)^{\frac{p-1}{p}}\ =\ a_\mu^{-\frac1p\,\left(\widetilde{\varepsilon}+\frac{n-4}{2(1-\theta)}\right)}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}}\ \leqslant\ \varkappa^{-\frac{(1-\theta)}{p}\,\widetilde{\varepsilon}},$$

то для заданного числа $\delta>0$ существует число $\varkappa_0'\geqslant 4a_0$ такое, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0'$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ выполняются оценки

$$\pi^{-1}|\gamma|\,C_{11}C_{10}^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,a_1^{\frac{n}{2p}+1+\varepsilon'}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}-(1-\theta)\,\frac{p-1}{p}}\ \leqslant\ \delta,$$

$$2\,C_{11}C_{10}^{\frac{p-1}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Sigma)}\,a_\mu^{\frac{n+2}{2p}+\varepsilon'-1}\,\varkappa^{\frac{n-4}{2p}}\,\big(\min\{1,a_\mu\,\varkappa^{\theta-1}\}\big)^{\frac{p-1}{p}}\ \leqslant\ \delta,\quad \mu=2,\dots,\widetilde{n}.$$

Тогда из (2.22) и ортогональности функций $\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi_{a_\mu}$ при разных индексах μ следует, что $\mathfrak{F}(f,\Sigma)\in\mathfrak{B}(\gamma,\delta)$. Теорема 2.2 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.3. Пусть $n\geqslant 4$, $\Sigma\in\mathcal{L}_{n,1}(e)$, где $e=|\gamma|^{-1}\gamma$, $\gamma\in\Lambda'$, и $f\in L^{n-1,0}_w(\Sigma)$. Выберем любое число $\delta>0$. Для всех $\varkappa\geqslant 4a_0$ определим числа $\beta_\mu=2^{-\frac{n}{4(n-1)}\,(\mu-\widetilde{n}-1)}$, $\mu=1,\dots,\widetilde{n}(a_0;\varkappa)$. Тогда $\sum\limits_{\mu=1}^{\widetilde{n}}\beta_\mu^{-1}<(1-2^{-1/4})^{-1}<10$. Существуют числа $\widetilde{m}\in\mathbb{N}$ и $\widetilde{\varkappa}_0'\geqslant 2^{\widetilde{m}+2}a_0>2^{\widetilde{m}+1}a_1$ такие, что при $\varkappa\geqslant\widetilde{\varkappa}_0'$

$$10\,\pi^{-1}|\gamma|\,C_1'\big(C_3C_6\big)^{\frac{n-2}{n-1}}\,\|f\|^{(w)}_{n-1}\,a_1^{\frac{n}{4(n-1)}+1}\,\varkappa^{-\frac{n}{4(n-1)}}\ \leqslant\ \delta \tag{2.23}$$

и при $\mu=2,\dots,\widetilde{n}-\widetilde{m}$

$$20\,C_1'\big(C_3C_6\big)^{\frac{n-2}{n-1}}\,\|f\|^{(w)}_{n-1}\,2^{\frac{n}{4(n-1)}\,(\mu-\widetilde{n}-1)}\ \leqslant\ \delta, \tag{2.24}$$

где C_1', C_3 и C_6 — числа из следствия 2.1 и лемм 2.1 и 2.2. Тогда из следствия 2.1, лемм 2.1 и 2.2, а также оценок (2.15), (2.16), (2.23) и (2.24), для всех $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ с помощью неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi|^2 dx \leqslant \left(\sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}} \beta_\mu^{-1}\right) \sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}} \beta_\mu \int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2 dx \leqslant \tag{2.25}$$

$$\leqslant 10\, C_1'\big(C_3C_6\big)^{\frac{n-2}{n-1}}\, \|f\|_{n-1}^{(w)} \Bigg(\pi^{-1}|\gamma|\, a_1^{\frac{n}{4(n-1)}+1}\, \varkappa^{-\frac{n}{4(n-1)}}\, \|\widehat{G}_+^{1/2}\widehat{G}_-^{1/2}\varphi_{a_1}\|^2_{L^2(K)} +$$

$$+\, 2\sum_{\mu=2}^{\widetilde{n}-\widetilde{m}} 2^{\frac{n}{4(n-1)}(\mu-\widetilde{n}-1)}\, \|\widehat{G}_+^{1/2}\widehat{G}_-^{1/2}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\Bigg) +$$

$$+\, 20 \sum_{\mu=\widetilde{n}-\widetilde{m}+1}^{\widetilde{n}} 2^{-\frac{n}{4(n-1)}(\mu-\widetilde{n}-1)} \int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{\mu=1}^{\widetilde{n}-\widetilde{m}} \|\widehat{G}_+^{1/2}\widehat{G}_-^{1/2}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)} + 20 \sum_{\mu=\widetilde{n}-\widetilde{m}+1}^{\widetilde{n}} 2^{-\frac{n}{4(n-1)}(\mu-\widetilde{n}-1)} \int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2 dx\,.$$

С другой стороны, $b_{\mathrm{form}}\big(\mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\big) = 0$ (см. [23]), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C_\varepsilon = C_\varepsilon(f,\Sigma) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ и всех $\mu = \widetilde{n}-\widetilde{m}+1,\dots,\widetilde{n}$

$$\begin{aligned} &\int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2 dx \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\, v(K) \sum_{N\in\mathcal{K}_{a_\mu}\setminus\mathcal{K}_{a_{\mu-1}}} |k+2\pi N|^2\,|\varphi_N|^2 + C_\varepsilon\, v(K) \sum_{N\in\mathcal{K}_{a_\mu}\setminus\mathcal{K}_{a_{\mu-1}}} |\varphi_N|^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Если $N \in \mathcal{K}_{\varkappa/2}\setminus\mathcal{K}_{a_{\widetilde{n}-\widetilde{m}}}$, то $|k+2\pi N| < G_N^+$, $|k+2\pi N| < \frac{3}{2}\varkappa$ и $G_N^- > a_{\widetilde{n}-\widetilde{m}} = 2^{-\widetilde{m}-1}\varkappa$, поэтому $|k+2\pi N|^2 < 3\cdot 2^{\widetilde{m}}\, G_N^+G_N^-$. Кроме того, $G_N^+ \geqslant \varkappa$ и из условия $|(k,\gamma)| = \pi$ следует оценка $G_N^- \geqslant \pi|\gamma|^{-1}$. Поэтому из (2.26) (выбирая достаточно малое число $\varepsilon > 0$) получаем, что существует число $\varkappa_0' \geqslant \widetilde{\varkappa}_0'$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0'$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, всех функций $\varphi \in \mathcal{H}_{\varkappa/2}(k+i\varkappa e)$ и всех $\mu = \widetilde{n}-\widetilde{m}+1,\dots,\widetilde{n}$

$$20\cdot 2^{-\frac{n}{4(n-1)}(\mu-\widetilde{n}-1)} \int_K \mathfrak{F}(|f|,\Sigma)\,|\varphi_{a_\mu}|^2 dx \leqslant \delta\, \|\widehat{G}_+^{1/2}\widehat{G}_-^{1/2}\varphi_{a_\mu}\|^2_{L^2(K)}\,. \tag{2.27}$$

Тогда из (2.25), (2.27) и ортогональности функций $\widehat{G}_+^{1/2}\widehat{G}_-^{1/2}\varphi_{a_\mu}$ при разных индексах μ вытекает вложение $\mathfrak{F}(|f|,\Sigma) \in \mathfrak{B}(\gamma,\delta)$. Теорема 2.3 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 0.6

Пусть $\varepsilon \in (0,2]$. Через $\mathcal{N}(M)$ будет обозначаться количество векторов конечных множеств $\mathcal{M} \subset \Lambda^*$. Положим $(\Lambda^*)' = \{\gamma^* \in \Lambda^*\setminus\{0\} \colon s\gamma^* \notin \Lambda^* \text{ для всех } s \in (0,1)\}$. Будем далее (в основном без дополнительных пояснений) обозначать через $c_j' > 0$, $j = 1,2,3,4,5$, некоторые константы, зависящие от n и Λ, а через $c_j > 0$, $j = 1,\dots,9$, — константы, зависящие от n, Λ и ε.

При $e \in S^{n-1}$ и $R_0 > 0$ обозначим

$$\mathcal{M}'(e,R_0) = \big\{\gamma \in \Lambda \cap \big(B^n_{R_0}\setminus B^n_{R_0/2}\big) \colon |e - |\gamma|^{-1}\gamma| \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Справедливы следующие три простые леммы (приводимые без доказательств).

Л е м м а 3.1. *Для любого $k = 1, \ldots, n-1$ объем элементарной ячейки любой $(n-k)$-мерной подрешетки решетки Λ, которая является подмножеством пересечения решетки Λ и некоторого $(n-k)$-мерного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, не меньше $c_1' = c_1'(n, \Lambda) > 0$.*

Л е м м а 3.2. *Если $\widetilde{\Lambda}$ — некоторая $(n-k)$-мерная решетка, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\widetilde{E}_1', \ldots, \widetilde{E}_{n-k}' \in \widetilde{\Lambda}$ — линейно независимые векторы, то существуют базисные векторы $\widetilde{E}_s$, $s = 1, \ldots, n-k$, решетки $\widetilde{\Lambda}$ (и соответствующая им элементарная ячейка), для которых $\widetilde{E}_s = \sum\limits_{j=1}^{n-k} \alpha_{sj} \widetilde{E}_j'$, $\alpha_{sj} \in (0, 1]$, $s, j = 1, \ldots, n-k$.*

Л е м м а 3.3. *Существуют числа $c_3 = c_3(n, \Lambda, \varepsilon) > 0$ и $c_4 = c_4(n, \Lambda, \varepsilon) > 0$ такие, что для всех $R_0 \geqslant c_3$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{N}(M'(e, R_0)) \geqslant c_4 R_0^n .$$

Л е м м а 3.4. *Существует число $c_2' = c_2'(n, \Lambda) > 0$ такое, что для любых $R_0 > 0$ и $R_1 \in (0, R_0)$ имеется не более $c_2' R_1^{n-1} R_0^{n-1}$ векторов $\gamma \in \Lambda \cap B_{R_0}^n$, для которых существуют векторы $\gamma^* \in (\Lambda^* \setminus \{0\}) \cap B_{R_1}^n$ такие, что $(\gamma, \gamma^*) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для векторов $\gamma^* \in (\Lambda^*)' \cap B_{R_1}^n$ обозначим

$$\mathcal{M}_{R_0}(\gamma^*) = \bigl\{\gamma \in \Lambda \cap B_{R_0}^n \colon (\gamma, \gamma^*) = 0\bigr\}.$$

Пусть $\gamma^* = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j E_j^* \in (\Lambda^*)' \cap B_{R_1}^n$, где E_j^* — (зафиксированные) базисные векторы решетки Λ^* и $b_j \in \mathbb{Z}$. Через b_{j_k}, $k = 1, \ldots, n-m$, и $b_{j_k'}$, $k = 1, \ldots, m$, $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, обозначим (как-либо перенумерованные) числа b_j, для которых $b_{j_k} \neq 0$ и $b_{j_k'} = 0$. Тогда векторы $E_{j_k'}$, $k = 1, \ldots, m$, и (при $m \leqslant n-1$) векторы $-b_{j_{k+1}} E_{j_k} + b_{j_k} E_{j_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, n-m-1$, линейно независимы, ортогональны вектору γ^* и их длины не превосходят $c_3' \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j|$ (где E_j — базисные векторы решетки Λ, для которых $(E_j, E_s^*) = \delta_{js}$). В силу леммы 3.2 существуют базисные векторы $E_1(\gamma^*), \ldots, E_{n-1}(\gamma^*)$ $(n-1)$-мерной решетки $\{\gamma \in \Lambda \colon (\gamma, \gamma^*) = 0\}$, которым соответствует элементарная ячейка $K(\gamma^*)$ и для которых

$$|E_j(\gamma^*)| \leqslant n\, c_3' \sum_{j=1}^{n} |b_j| \leqslant c_4' |\gamma^*| < c_4' R_0.$$

При этом $(n-1)$-мерный объем элементарной ячейки $K(\gamma^*)$ (так как $\gamma^* \in (\Lambda^*)'$) равен $|\gamma^*|\, v(K)$ и, следовательно[4],

$$\mathcal{N}\bigl(\mathcal{M}_{R_0}(\gamma^*)\bigr) \leqslant \bigl(|\gamma^*|\, v(K)\bigr)^{-1} v(B_1^{n-1}) \bigl((nc_4' + 1) R_0\bigr)^{n-1}$$

(где $v(K)$ — объем элементарной ячейки K решетки Λ). Так как каждый вектор $\gamma \in \Lambda \cap B_{R_0}^n$, для которого существуют векторы $\gamma^* \in (\Lambda^* \setminus \{0\}) \cap B_{R_1}^n$ такие, что $(\gamma, \gamma^*) = 0$, принадлежат по крайней мере одному из множеств $\mathcal{M}_{R_0}(\gamma^*)$, $\gamma^* \in (\Lambda^*)' \cap B_{R_1}^n$, то таких векторов не больше, чем

$$c_5' R_0^{n-1} \sum_{\gamma^* \in (\Lambda^*)'} |\gamma^*|^{-1} \leqslant c_2' R_1^{n-1} R_0^{n-1}.$$

Лемма 3.4 доказана. □

[4]Используются стандартные оценки для числа точек решеток, принадлежащих множествам в $\mathbb{R}^n$, с помощью оценок объема окрестностей этих множеств (см., например, [51, с. 64]).

Л е м м а 3.5. *Существуют числа* $c_1 = c_1(n, \Lambda, \varepsilon) > 0$ *и* $c_5 = c_5(n, \Lambda, \varepsilon) > 0$ *такие, что при всех* $R_0 \geqslant c_3$ *множество* $\mathcal{M}^*(e, R_0)$ *векторов* $\gamma \in \mathcal{M}'(e, R_0)$ *таких, что для любого вектора* $\gamma^* \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, *для которого* $(\gamma, \gamma^*) = 0$, *справедливо неравенство* $|\gamma^*| > c_1\, R_0^{1/(n-1)}$, *содержит не менее* $c_5\, R_0^n$ *векторов.*

Лемма 3.5 непосредственно следует из лемм 3.3 и 3.4.

В дальнейшем считаем, что $R_0 \geqslant c_3$, и множество $\mathcal{M}^*(e, R_0)$ рассматривается при выбранных константах c_1 и c_5.

При $e' \in S^{n-1}$ и $0 < h \leqslant 1$ определим множества

$$\mathcal{M}_h(e'; e, R_0) \;=\; \big\{\gamma \in \mathcal{M}^*(e, R_0) \colon |(e', |\gamma|^{-1}\gamma)| \leqslant h\big\}.$$

Если множество $\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)$ принадлежит некоторому $(n-k)$-мерному подпространству пространства $\mathbb{R}^n$, $k = 0, \ldots, n-1$, и содержит $n-k$ линейно независимых векторов, то оно является подмножеством некоторой $(n-k)$-мерной решетки $\Lambda_h(e'; e, R_0)$. Из леммы 3.2 следует, что решетка $\Lambda_h(e'; e, R_0)$ имеет $n-k$ базисных векторов $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_{n-k}$, для которых $|\widetilde{E}_j| \leqslant (n-k)\, R_0$ и которым соответствует элементарная ячейка $K_h(e'; e, R_0)$. Поэтому при $k \geqslant 1$

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big) \;\leqslant\; v(B_1^{n-k})\,\big(v(K_h(e'; e, R_0))\big)^{-1}\,\big(((n-k)^2+1)\, R_o\big)^{n-k}. \qquad (3.1)$$

Если $k \geqslant 2$, то из леммы 3.1 следует оценка $v(K_h(e'; e, R_0)) \geqslant c_1'$, поэтому из (3.1) получаем

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big) \;\leqslant\; c_6\, R_0^{n-k}. \qquad (3.2)$$

Если $k = 1$, то для каждого вектора $\gamma^* \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, для которого $|\gamma^*| \leqslant c_1\, R_0^{1/(n-1)}$, найдется базисный вектор $\widetilde{E}_j$ такой, что $(\widetilde{E}_j, \gamma^*) \neq 0$. Последнее означает, что для векторов $\gamma^* \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, для которых $(\widetilde{E}_j, \gamma^*) = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n-1$, выполняется оценка $|\gamma^*| > c_1\, R_0^{1/(n-1)}$ и, следовательно, $v(K_h(e'; e, R_0)) > c_1\, R_0^{1/(n-1)}\, v(K)$. Тогда из (3.1) получаем

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big) \;\leqslant\; c_7\, R_0^{n-1-\frac{1}{n-1}}. \qquad (3.3)$$

Пусть теперь $k = 0$. В силу леммы 3.2 для всех базисных векторов $\widetilde{E}_j$, $j = 1, \ldots, n$, имеет место неравенство $|(\widetilde{E}_j, e')| \leqslant nhR_0$, и в этом случае

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big) \;\leqslant\; \big(v(K)\big)^{-1}\,(n^2+1)hR_0\, v(B_1^{n-1})\,\big((n^2+1)R_0\big)^{n-1} \;\leqslant c_8\, hR_0^{n-1}. \qquad (3.4)$$

Из оценок (3.2), (3.3) и (3.4) вытекает оценка

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big) \;\leqslant\; c_9\, R_0^n\, \max\big\{h, R_0^{-\frac{n}{n-1}}\big\}. \qquad (3.5)$$

Для всех $\gamma \in \mathcal{M}^*(e, R_0)$ обозначим

$$M(\gamma) \;=\; \mu'\big(\big\{e' \in S^{n-1} \colon |(e', |\gamma|^{-1}\gamma)| \leqslant h\big\}\big).$$

Тогда

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{M}^*(e, R_0)} M(\gamma) \;=\; \int_{S^{n-1}} \mathcal{N}\big(\mathcal{M}_h(e'; e, R_0)\big)\, d\mu'(e'). \qquad (3.6)$$

В силу леммы 3.5 $\mathcal{N}(\mathcal{M}^*(e, R_0)) \geqslant c_5\, R_0^n$. Поэтому из (3.5) и (3.6) следует, что существует вектор $\gamma \in \mathcal{M}^*(e, R_0)$, для которого

$$M(\gamma) \;\leqslant\; c_2\, \max\big\{h, R_0^{-\frac{n}{n-1}}\big\}\, \mu'(S^{n-1}),$$

где $c_2 = c_5^{-1} c_9$. Теорема 0.6 доказана.

Финансирование. Работа поддержана программой финансирования № 121030100005-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
2. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class // Journal of Functional Analysis. 2002. Vol. 193. No. 2. P. 314–345. https://doi.org/10.1006/jfan.2001.3933
3. Данилов Л. И. О спектре периодического оператора Шрёдингера с потенциалом из пространства Морри // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 25–47. https://doi.org/10.20537/vm120304
4. Данилов Л. И. О спектре периодического оператора Дирака // Теоретическая и математическая физика. 2000. Т. 124. № 1. С. 3–17. https://doi.org/10.4213/tmf622
5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. Вып. 2. С. 1–40. http://mi.mathnet.ru/aa1046
6. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Transactions of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 354. No. 2. P. 537–569. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02878-1
7. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bulletin of the American Mathematical Society. 2016. Vol. 53. No. 3. P. 343–414. https://doi.org/10.1090/bull/1528
8. Thomas L. E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Communications in Mathematical Physics. 1973. Vol. 33. P. 335–343. https://doi.org/10.1007/BF01646745
9. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 4. С. 1–36. http://mi.mathnet.ru/aa1018
10. Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с электрическим потенциалом типа производной от меры // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 276–312. http://mi.mathnet.ru/znsl1359
11. Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 4. С. 196–228. http://mi.mathnet.ru/aa957
12. Данилов Л. И. О спектре двумерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98. http://mi.mathnet.ru/iimi252
13. Данилов Л. И. О спектре двумерного периодического оператора Шрёдингера // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459. https://doi.org/10.4213/tmf160
14. Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Записки научных семинаров ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320. http://mi.mathnet.ru/znsl912
15. Данилов Л. И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шрёдингера // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84. http://mi.mathnet.ru/iimi235
16. Sobolev A. V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator // Inventiones mathematicae. 1999. Vol. 137. No. 1. P. 85–112. https://doi.org/10.1007/S002220050324
17. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шрёдингера // Математические заметки. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 49–62. https://doi.org/10.4213/mzm167
18. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. No. 27. 275204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275204
19. Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра многомерного периодического магнитного оператора Дирака // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 61–96. https://doi.org/10.20537/vm080105

20. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator // arXiv: 0805.0399v3 [math-ph]. 2008. https://arxiv.org/abs/0805.0399v3
21. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators // International Mathematics Research Notices. 2001. Vol. 2001. No. 1. P. 1–31. https://doi.org/10.1155/S1073792801000010
22. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010. Vol. 43. No. 21. 215201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/21/215201
23. Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 5. С. 197–240. http://mi.mathnet.ru/aa968
24. Качковский И. В. Теорема Стейна–Томаса для тора и периодический оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24. Вып. 6. С. 124–138. http://mi.mathnet.ru/aa1311
25. Качковский И. В. Отсутствие собственных значений в спектре некоторых операторов Шрёдингера с периодическими коэффициентами: автореф. дис. ... кандидата физ.-матем. наук. Санкт-Петербург, 2013. 18 с.
26. Качковский И. В., Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21. № 1. С. 133–152. http://mi.mathnet.ru/aa997
27. Качковский И. В., Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в слое и в гладком цилиндре // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 385. С. 69–82. http://mi.mathnet.ru/znsl3900
28. Качковский И. В. Отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом в прямоугольном цилиндре // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. Вып. 2. С. 27–37. https://doi.org/10.4213/faa3107
29. Качковский И. В., Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в цилиндре с третьим краевым условием // Функциональный анализ и его приложения. 2020. Т. 54. Вып. 2. С. 48–57. https://doi.org/10.4213/faa3741
30. Прохоров А. О., Филонов Н. Д. Оператор Максвелла с периодическими коэффициентами в цилиндре // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. Вып. 6. С. 182–196. http://mi.mathnet.ru/aa1566
31. Frank R. L., Shterenberg R. G. On the spectrum of partially periodic operators // Operator Theory, Analysis and Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 2007. P. 35–50. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8135-6_4
32. Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с частично периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. Вып. 2. С. 220–241. http://mi.mathnet.ru/aa1540
33. Hoang Vu, Radosz M. Absence of bound states for waveguides in two-dimensional periodic structures // Journal of Mathematical Physics. 2014. Vol. 55. No. 3. 033506. https://doi.org/10.1063/1.4868480
34. Sobolev A. V., Walthoe J. Absolute continuity in periodic waveguides // Proceedings of the London Mathematical Society. 2002. Vol. 85. Issue 3. P. 717–741. https://doi.org/10.1112/S0024611502013631
35. Cardone G., Nazarov S. A., Taskinen J. Spectra of open waveguides in periodic media // Journal of Functional Analysis. 2015. Vol. 269. Issue 8. P. 2328–2364. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.08.001
36. Exner P., Kovařík H. Quantum waveguides. Berlin: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18576-7
37. Korotyaev E., Saburova N. Schrödinger operators on periodic discrete graphs // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2014. Vol. 420. Issue 1. P. 576–611. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.05.088
38. Коротяев Е. Л., Сабурова Н. Ю. Спектральные оценки для оператора Шрёдингера на периодических дискретных графах // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. Вып. 4. С. 61–106. http://mi.mathnet.ru/aa1609

39. Exner P., Turek O. High-energy asymptotics of the spectrum of a periodic square lattice quantum graphs // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010. Vol. 43. No. 47. 474024. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/47/474024
40. Гейлер В. А. Двумерный оператор Шрёдингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 1–48. http://mi.mathnet.ru/aa252
41. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential // Mathematische Annalen. 2010. Vol. 347. No. 3. P. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
42. Данилов Л. И. О спектре двумерного оператора Шрёдингера с однородным магнитным полем и периодическим электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 51. С. 3–41. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01
43. Данилов Л. И. О спектре гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 1. С. 47–65. https://doi.org/10.4213/tmf9748
44. Данилов Л. И. О спектре гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$ // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 42–59. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-04
45. Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра трехмерного периодического магнитного оператора Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом // Математические заметки. 2021. Т. 110. Вып. 4. С. 507–523. https://doi.org/10.4213/mzm13084
46. Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 233–240. http://mi.mathnet.ru/de10094
47. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
48. Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. I / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1991. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 12.12.1991, № 4588-В91.
49. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
50. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
51. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 19.05.2021

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4776-9864
E-mail: lidanilov@mail.ru

Цитирование: Л. И. Данилов. О спектре многомерного периодического магнитного оператора Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 18–47.

L. I. Danilov
On the spectrum of a multidimensional periodic magnetic Shrödinger operator with a singular electric potential

Keywords: absolute continuity of the spectrum, periodic Schrödinger operator.

MSC2020: 35P05

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-02

We prove absolute continuity of the spectrum of a periodic n-dimensional Schrödinger operator for $n \geqslant 4$. Certain conditions on the magnetic potential A and the electric potential $V + \sum f_j \delta_{S_j}$ are supposed to be fulfilled. In particular, we can assume that the following conditions are satisfied.
(1) The magnetic potential $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ either has an absolutely convergent Fourier series or belongs to the space $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$, or to the space $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$.
(2) The function $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ belongs to Morrey space $\mathfrak{L}^{2,p}$, $p \in \big(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\big]$, of periodic functions (with a given period lattice), and

$$\lim_{\tau \to +0} \sup_{0<r\leqslant\tau} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} r^2 \bigg(\big(v(B^n_r)\big)^{-1} \int_{B^n_r(x)} |\mathcal{V}(y)|^p dy \bigg)^{1/p} \leqslant C,$$

where $B^n_r(x)$ is a closed ball of radius $r > 0$ centered at a point $x \in \mathbb{R}^n$, $B^n_r = B^n_r(0)$, $v(B^n_r)$ is volume of the ball B^n_r, $C = C(n,p;A) > 0$.
(3) δ_{S_j} are δ-functions concentrated on (piecewise) C^1-smooth periodic hypersurfaces S_j, $f_j \in L^p_{\mathrm{loc}}(S_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Some additional geometric conditions are imposed on the hypersurfaces S_j, and these conditions determine the choice of numbers $p \geqslant n-1$. In particular, let hypersurfaces S_j be C^2-smooth, the unit vector e be arbitrarily taken from some dense set of the unit sphere S^{n-1} dependent on the magnetic potential A, and the normal curvature of the hypersurfaces S_j in the direction of the unit vector e be nonzero at all points of tangency of the hypersurfaces S_j and the lines $\{x_0 + te \colon t \in \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Then we can choose the number $p > \frac{3n}{2} - 3$, $n \geqslant 4$.

Funding. The study was funded by the financial program no. 121030100005-1.

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 2. Fourier analysis, self-adjointness*, New York: Academic Press, 1975.
   Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 2. Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978.
2. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class, *Journal of Functional Analysis*, 2002, vol. 193, no. 2, pp. 314–345. https://doi.org/10.1006/jfan.2001.3933
3. Danilov L. I. On the spectrum of a periodic Schrödinger operator with potential in the Morrey space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 25–47 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120304
4. Danilov L. I. Spectrum of the periodic Dirac operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2000, vol. 124, no. 1, pp. 859–871. https://doi.org/10.1007/BF02551063
5. Birman M. Sh., Suslina T. A. A periodic magnetic Hamiltonian with a variable metric: The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232. https://zbmath.org/?q=an:0941.35015
6. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02878-1
7. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 343–414. https://doi.org/10.1090/bull/1528

8. Thomas L. E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Communications in Mathematical Physics*, 1973, vol. 33, pp. 335–343. https://doi.org/10.1007/BF01646745
9. Birman M. Sh., Suslina T. A. Absolute continuity of a two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector-valued potential, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601. https://zbmath.org/?q=an:0922.35101
10. Shterenberg R. G. Absulute continuity of a two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with potentials of type of measure derivative, *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 115, no. 6, pp. 2862–2882. https://doi.org/10.1023/A:1023334206109
11. Shterenberg R. G. Absolute continuity of the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2002, vol. 13, no. 4, pp. 659–683. https://zbmath.org/?q=an:1172.35373
12. Danilov L. I. On the spectra of two-dimensional periodic Schrödinger and Dirac operators, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2002, issue 3 (26), pp. 3–98 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi252
13. Danilov L. I. The spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403. https://doi.org/10.1023/A:1022605623235
14. Shterenberg R. G. Absolute continuity of spectra of two-dimensional periodic Schrödinger operators with strongly subordinate magnetic potential, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 129, no. 4, pp. 4087–4109. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0344-3
15. Danilov L. I. On absence of eigenvalues in the spectra of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2004, issue 1 (29), pp. 49–84 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi235
16. Sobolev A. V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator, *Inventiones mathematicae*, 1999, vol. 137, no. 1, pp. 85–112. https://doi.org/10.1007/S002220050324
17. Danilov L. I. Absolute continuity of the spectrum of a periodic Schrödinger operator, *Mathematical Notes*, 2003, vol. 73, no. 1–2, pp. 46–57. https://doi.org/10.1023/A:1022169916738
18. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 27, 275204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275204
19. Danilov L. I. Absolute continuity of the spectrum of multidimensional periodic magnetic Dirac operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 1, pp. 61–96 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080105
20. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator, *arXiv: 0805.0399v3 [math-ph]*, 2008. https://arxiv.org/abs/0805.0399v3
21. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators, *International Mathematics Research Notices*, 2001, vol. 2001, no. 1, pp. 1–31. https://doi.org/10.1155/S1073792801000010
22. Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, vol. 43, no. 21, 215201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/21/215201
23. Suslina T. A., Shterenberg R. G. Absolute continuity of the spectrum of the Schrödinger operator with the potential concentrated on a periodic system of hypersurfaces, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2002, vol. 13, no. 5, pp. 859–891. https://zbmath.org/?q=an:1068.35122
24. Kachkovskiĭ I. V. Stein–Tomas theorem for a torus and the periodic Schrödinger operator with singular potential, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2013, vol. 24, no. 6, pp. 939–948. https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01273-8
25. Kachkovskii I. V. *Absence of eigenvalues in the spectrum of some Schrödinger operators with periodic coefficients*, Abstract of Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, St. Petersburg, 2013, 18 p. (In Russian).
26. Kachkovskiĭ I., Filonov N. Absolute continuity of the Schrödinger operator spectrum in a multidimensional cylinder, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2010, vol. 21, no. 1, pp. 95–109. https://doi.org/10.1090/S1061-0022-09-01087-5
27. Kachkovskiy I., Filonov N. Absolute continuity of the spectrum of the periodic Schrödinger operator in a layer and in a smooth cylinder, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 178, no. 3,

pp. 274–281. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0547-8
28. Kachkovskiy I. V. Absence of eigenvalues for the periodic Schrödinger operator with singular potential in a rectangular cylinder, *Functional Analysis and Its Applications*, 2013, vol. 47, no. 2, pp. 104–112. https://doi.org/10.1007/s10688-013-0015-y
29. Kachkovskiy I. V., Filonov N. D. Absolute continuity of the spectrum of the periodic Schrödinger operator in a cylinder with Robin boundary condition, *Functional Analysis and Its Applications*, 2020, vol. 54, no. 2, pp. 110–117. https://doi.org/10.1134/S0016266320020045
30. Filonov N. D., Prokhorov A. O. The Maxwell operator with periodic coefficients in a cylinder, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 29, no. 6, pp. 997–1006. https://doi.org/10.1090/spmj/1524
31. Frank R. L., Shterenberg R. G. On the spectrum of partially periodic operators, *Operator Theory, Analysis and Mathematical Physics*, Basel: Birkhäuser, 2007, pp. 35–50. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8135-6_4
32. Filonov N. D. Absolute continuity of the spectrum of two-dimensional Schrödinger operator with partially periodic coefficients, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 29, no. 2, pp. 383–398. https://doi.org/10.1090/spmj/1498
33. Hoang Vu, Radosz M. Absence of bound states for waveguides in two-dimensional periodic structures, *Journal of Mathematical Physics*, 2014, vol. 55, no. 3, 033506. https://doi.org/10.1063/1.4868480
34. Sobolev A. V., Walthoe J. Absolute continuity in periodic waveguides, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2002, vol. 85, issue 3, pp. 717–741. https://doi.org/10.1112/S0024611502013631
35. Cardone G., Nazarov S. A., Taskinen J. Spectra of open waveguides in periodic media, *Journal of Functional Analysis*, 2015, vol. 269, issue 8, pp. 2328–2364. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.08.001
36. Exner P., Kovařík H. *Quantum waveguides*, Berlin: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18576-7
37. Korotyaev E., Saburova N. Schrödinger operators on periodic discrete graphs, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol. 420, issue 1, pp. 576–611. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.05.088
38. Korotyaev E., Saburova N. Spectral estimates for Schrödinger operators on periodic discrete graphs, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019, vol. 30, no. 4, pp. 667–698. https://doi.org/10.1090/spmj/1565
39. Exner P., Turek O. High-energy asymptotics of the spectrum of a periodic square lattice quantum graphs, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, vol. 43, no. 47, 474024. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/47/474024
40. Gejler V. A. The two-dimensional Schrödinger operator with a uniform magnetic field, and its perturbation by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1992, vol. 3, no. 3, pp. 489–532. https://zbmath.org/?q=an:0791.35025
41. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential, *Mathematische Annalen*, 2010, vol. 347, no. 3, pp. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
42. Danilov L. I. On the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and a periodic electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 51, pp. 3–41 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01
43. Danilov L. I. Spectrum of the Landau Hamiltonian with a periodic electric potential, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2020, vol. 202, no. 1, pp. 41–57. https://doi.org/10.1134/S0040577920010055
44. Danilov L. I. On the spectrum of a Landau Hamiltonian with a periodic electric potential $V \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 42–59 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-04
45. Danilov L. I. Absolute continuity of the spectrum of a periodic 3D magnetic Schrödinger operator with singular electric potential, *Mathematical Notes*, 2021, vol. 110, no. 4, pp. 497–510. https://doi.org/10.1134/S0001434621090200
46. Danilov L. I. Absolute continuity of the spectrum of a periodic Dirac operator, *Differential Equations*,

2000, vol. 36, no. 2, pp. 262–271. https://doi.org/10.1007/BF02754212
47. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 1. Functional analysis*, New York: Academic Press, 1972.
Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 1. Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Mir, 1977.
48. Danilov L. I. *The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. I.*, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1991, 35 p. Deposited in VINITI 12.12.1991, no. 4588-B91 (in Russian).
49. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*, Berlin: Springer, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9
50. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 4. Analysis of operators*, New York: Academic Press, 1978.
Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 4. Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982.
51. Chandrasekharan K. *Introduction to analytic number theory*, Berlin: Springer, 1968.
Translated under the title *Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel*, Moscow: Mir, 1974.

Received 19.05.2021

Leonid Ivanovich Danilov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4776-9864
E-mail: lidanilov@mail.ru

Citation: L. I. Danilov. On the spectrum of a multidimensional periodic magnetic Shrödinger operator with a singular electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 18–47.