

УДК 519.853.6, 517.958

© *А. Л. Казаков, А. А. Лемперт*

О ПОСТРОЕНИИ МАРШРУТОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

Рассматривается задача маршрутизации транспорта, который движется в среде с динамически изменяющимися свойствами. Постановка задачи очень актуальна в современных условиях, когда стоимость доставки имеет устойчивую тенденцию к росту и, зачастую, сопоставима со стоимостью самого товара. Отличительной особенностью исследования является то, что в качестве критерия оптимальности принимается минимум времени доставки, а не пройденное при этом расстояние, как в большинстве работ, посвященных данной тематике. В качестве инструмента исследования применяется развиваемый авторами оптико-геометрический подход, основанный на аналогии между распространением света в оптически неоднородной среде и минимизацией интегрального функционала. При этом для описания волновых фронтов используются точные и приближенные решения уравнений эйконала. Предложены и программно реализованы два оригинальных численных алгоритма построения маршрута. Выполнен вычислительный эксперимент, показавший эффективность предложенного модельно-алгоритмического инструментария.

Ключевые слова: задача маршрутизации, оптимизация, оптико-геометрический подход, уравнение эйконала, вычислительный алгоритм.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-04

Введение

Задачи маршрутизации транспорта играют важную роль в современной транспортной логистике. В условиях, когда стоимость доставки часто бывает сопоставима со стоимостью самого товара, а скорость доставки — один из главных приоритетов, задача нахождения оптимального маршрута приобретает огромное значение. Весь спектр возникающих задач можно разделить на два класса: маршрутизация на графе и бесконечномерная маршрутизация. К первому классу относятся задача о коммивояжере, ее многочисленные варианты и обобщения [1–5], ко второму — задачи прокладки воздушных или морских маршрутов, а также наземных маршрутов с бесконечным числом допустимых траекторий [6–9]. Данные задачи, как известно, относятся к классу NP-трудных.

В классических задачах маршрутизации, как правило, ключевую роль играют расстояние между пунктами и ограничения, связанные непосредственно с транспортными средствами (вместимость, рабочая скорость, расход топлива и так далее), а внешние факторы, влияющие на скорость движение транспорта, считаются постоянными, то есть внешняя среда рассматривается как статическая. Методы решения таких задач основаны на теории графов, наиболее известными являются алгоритмы Дейкстры [10], Флойда–Уоршелла [11, 12], A* [13], D* [14]. Их удобно использовать в статической среде, поскольку построение графа требует использование полной априорной информации. Иначе говоря, при описании окружающей среды не учитываются факторы, изменение которых влияет на движение транспортных средств.

Однако в ряде случаев подобными изменениями влияния окружающей среды нельзя пренебречь [15–18], в частности, когда появляются препятствия, которые могут либо двигаться, либо изменять свою форму. При решении задачи маршрутизации в динамической

среде обычно используются эвристические стратегии поиска, которые дают приемлемое решение задачи в большинстве значимых случаев. Типичный пример эвристической стратегии — динамический вариант алгоритма A^* . Сам по себе A^* не обрабатывает такие аспекты, как перемещение препятствий, изменение карты, оценку опасных областей, радиусы поворота, размеры объектов, сглаживание путей. Тем не менее, за счет специального выбора эвристической функции близости к цели на его основе разработаны алгоритмы, позволяющие учесть указанные ограничения.

Так, в работе [19] представляется два алгоритма для нахождения пути движения в среде со статическими и динамическими препятствиями. Оба алгоритма построены на основе алгоритма A^* . В случае динамических препятствий последние движутся с известными скоростью и направлением. В работе [20] рассматривается задача автономной навигации беспилотного летательного аппарата и предлагается алгоритм, позволяющий строить траектории движения без столкновений с динамическими объектами. В работах [21,22] авторы вместе с A^* применяют подход адаптивной размерности (adaptive dimensionality approach) для построения маршрута в среде с подвижными препятствиями с известными траекториями. Отметим также работы [23,24], где перед применением A^* выполняется дискретизация окружающей среды в виде графа путевых точек, а в процессе решения используется фильтрация путевых точек и разбиение границ для уменьшения размера графа.

Отдельный класс задач построения траектории движения для роботов составляют задачи, в которых движения препятствий заранее неизвестны [25–27]. Для разработки процедуры навигации мобильных роботов в динамической среде в работе [28] авторы предложили подход на основе быстрого исследования случайного дерева (rapidly exploring random tree). Данный подход позволяет найти маршрут быстро, но не гарантирует его оптимальность. В работе [29] рассматривается задача об изменении спланированного маршрута при изменении расположения препятствий или появлении новых препятствий. Авторы предложили метод деформирования спланированного пути таким образом, что робот огибает препятствия.

Современные исследования в области маршрутизации затрагивают и случаи, когда рабочее пространство достаточно быстро меняется. В таких случаях траектории движения необходимо определять в режиме реального времени, чтобы решение было корректно, пока среда не изменилась снова. Например, в работе [15] авторы определяют операции перепланирования, которые должны быть завершены в течение 200 мс, чтобы имитировать время реакции человека.

В работах [16–18] рассматривается задача формирования оптимальных маршрутов движения объектов с учетом прогноза погодных условий. Целью является отыскание траектории движения, для которой либо время движения, либо расход топлива будут минимальны. При формировании маршрутов учитываются статические препятствия и динамические ограничения. Последние — это запрещенные для движения зоны с опасными погодными условиями.

При исследовании проблемы построения маршрута для автономных подводных роботов в работах [30,31] представлен двухуровневый подход к решению задачи динамической маршрутизации группы подводных роботов, в соответствии с которым они должны посетить и обследовать заданное множество целей с рекомендуемой частотой. Задача маршрутизации заключается в построении такого допустимого группового маршрута, который обеспечивает своевременное обследование всех целей в условиях периодической смены состава действующей группировки для осуществления подзарядки аккумуляторных батарей.

Таким образом, можно утверждать, что задачи, связанные с построением маршрутов как в статической, так и в динамической средах, не теряют своей актуальности. В настоящей работе рассматривается проблема построения оптимального маршрута в динамической среде, которая изменяет свое состояние через определенные промежутки времени. Целью является

построение быстрого маршрута между двумя точками с обходом барьеров и уклонением от динамических препятствий. Предлагаемые алгоритмы основаны на разрабатываемом авторами оптико-геометрическом подходе, который, в свою очередь, базируется на аналогии между распространением света в неоднородной среде и нахождением минимума интегрального функционала [33].

§ 1. Постановка задачи и метод решения

Пусть в области $X \subset \mathbb{R}^2$ заданы точки $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ и функция $f(t, x, y) \geq 0$ — мгновенная скорость движения в каждой точке $(x, y) \in X$, причем если $f(t, x, y) = 0$, то прохождение через эту точку запрещено. Функция $f(t, x, y)$ — кусочно непрерывна по пространственным переменным x, y и кусочно постоянна по t с известными точками переключения $t_i, i = 1, \dots, n$. Требуется найти маршрут, доставляющий минимум функционалу

$$\int_G \frac{dG}{f(t, x, y)} \rightarrow \min_{G \in G(A, B)}, \quad (1)$$

где $G(A, B)$ — множество всех непрерывных кривых, соединяющих точки A и B .

С точки зрения геометрической оптики, интеграл (1) определяет время, за которое свет, выпущенный из точки A , достигает точки B , двигаясь в оптически неоднородной среде [33]. Согласно принципу Гюйгенса любую точку области X , которой свет уже достиг, можно рассматривать в качестве самостоятельного источника света [34]. Таким образом, выпустив световую волну из точки A , можно построить траекторию ее движения и зафиксировать фотон, который первым достигнет точки B . Далее, двигаясь в обратном направлении по времени, можно восстановить траекторию движения этого фотона, которая и будет искомой кривой. При этом очевидно, что если задача разрешима, то будет найдено глобальное решение.

Поскольку среда является кусочно постоянной по времени, ключевым моментом здесь является построение фронта световой волны в моменты смены состояния. Указанные фронты определяются из решения уравнения эйконала [35], которое представляет собой нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\|\nabla u(\mathbf{x})\| = 1/f(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где ∇ — оператор градиента, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Линии уровня искомой функции $u(\mathbf{x}) = \text{const}$ задают положения фронта волны в различные моменты времени.

Решение уравнения (2) является отдельной задачей. Отметим, что для определенных классов функции $f(\mathbf{x})$ известны точные решения и, соответственно, формы лучей и фронтов [36, 37], в общем случае решение строится численно [38].

§ 2. Алгоритмы и вычислительный эксперимент

Для решения задачи (1) мы предлагаем два алгоритма, основанных на одних и тех же принципах распространения света в оптически неоднородной среде, но отличающиеся стратегией поиска пути. Поскольку функция $f(t, x, y)$ кусочно постоянна по t , на каждом отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$ ее можно заменить функцией $f_i(x, y)$, не зависящей от t .

Идея *первого алгоритма* состоит в следующем. На первом этапе необходимо решить уравнение эйконала (2) с источником в начальной точке $A(x_a, y_a)$ и $f(\mathbf{x}) \equiv f_1(x, y)$, и определить фронт $t_1 = u(\mathbf{x})$. На втором шаге в качестве источника выступает найденный фронт, а $f(\mathbf{x}) \equiv f_2(x, y)$. Процесс продолжается до тех пор пока фронт световой волны не достигнет точки $B(x_b, y_b)$. Оптимальный маршрут строится попятным движением из точки $B(x_b, y_b)$.

Достоинством данного алгоритма является то, что он гарантирует нахождение глобального решения, поскольку вместе с фронтами световой волны определяются и кратчайшие пути движения фотонов. Кроме того, он не требует введения сетки. Недостатком же является необходимость решения уравнения (2) с распределенным источником.

В основе *второго алгоритма* лежит идея прицеливания. На первом этапе также необходимо решить уравнение эйконала (2) с источником в начальной точке A и $f(\mathbf{x}) \equiv f_1(x, y)$. В отличие от первого алгоритма, здесь мы не ограничимся промежутком времени $[0, t_1]$, а определим фронт, проходящий через точку и найдем маршрут, который является оптимальным, если $t_B \leq t_1$, где t_B — время достижения точки B . Иначе говоря, если среда не успевает измениться, двигаясь по найденному маршруту, найдем точку A_1 , которую достигнет световая волна за время t_1 . На следующем этапе будем решать уравнение (2) с источником в точке A_1 и $f(\mathbf{x}) \equiv f_2(x, y)$. Процесс продолжается до достижения точки B .

Достоинством данного алгоритма является то, что он работает только с точечными источниками в уравнении эйконала. Недостаток же заключается в том, что нахождение оптимальных путей на каждом отрезке времени не гарантирует оптимальность пути в целом.

Алгоритмы реализованы на языке программирования $C\#$ с использованием Visual Studio 2012.

Перейдем к примерам. Расчеты выполнены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3.4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционная система Windows 10.

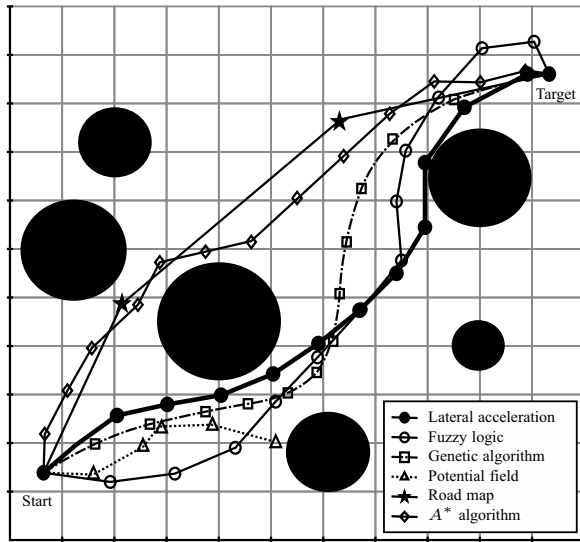
Пример 1. Для оценки работоспособности предложенных алгоритмов рассмотрим задачу, описанную в работе [32]: требуется построить маршрут между двумя точками на плоскости при наличии с неподвижных и подвижных препятствий и известным законом движения. Кроме появления подвижного препятствия других изменений среды не происходит. В этом случае функция $f(t, x, y)$ принимает только два значения: 0, если препятствие есть, и 1, если его нет. Следовательно, здесь используется евклидово расстояние, тогда кратчайший маршрут будет и быстрее, поэтому, следуя работе [32], будем сравнивать длины маршрутов и процессорное время решения задачи. Рассмотрим два случая.

А. Все препятствия являются неподвижными. Результаты решения представлены в таблице 1. На рис. 1, *а* показаны маршруты, найденные в [32], на рис. 1, *б* и 1, *в* — полученные с помощью алгоритмов 1 и 2, соответственно.

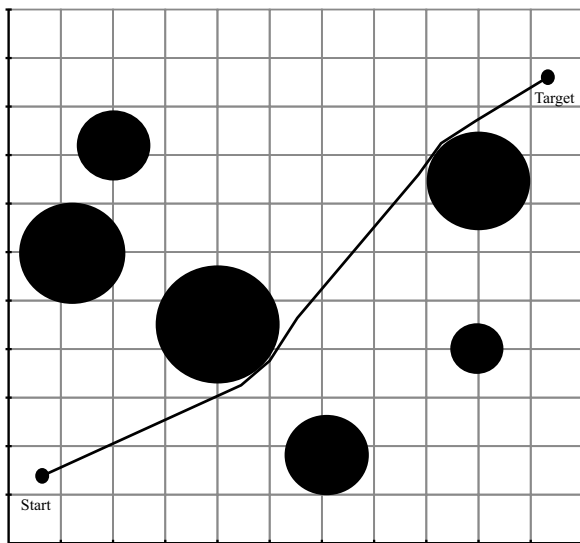
Таблица 1. Результаты вычисления длины маршрута в динамической среде

Алгоритм	Fuzzy logic	Genetic alg.	Potential field	Road map	A*	Lateral accelerat.	Алг. 1	Алг. 2
Время расчета (с)	0.763	2.827	0.383	2.122	2.551	0.462	1.061	0.717
Длина (м)	18.807	16.534	5.881	17.672	18.120	16.246	13.259	13.475

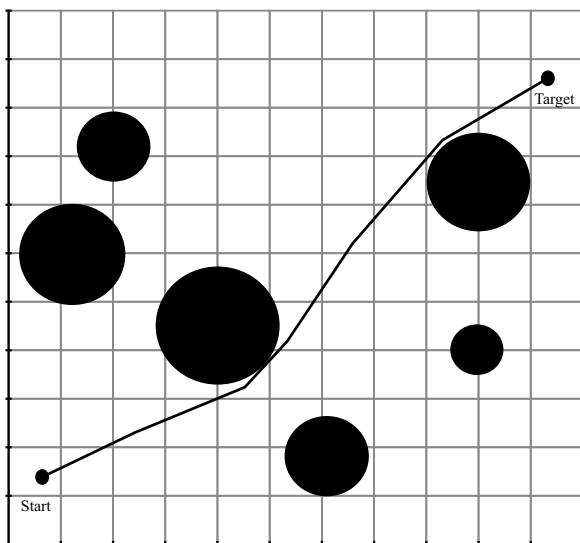
Из таблицы 1 можно видеть, что алгоритм 1 нашел наилучшее решение за конкурентоспособное время.



a)



б)



в)

Рис. 1. Результаты расчетов

Б. Пусть кроме неподвижных препятствий имеется одно подвижное препятствие с известной траекторией движения. Найденные маршруты представлены на рис. 2: 2, а — маршрут из работы [32], 2, б, 2, в и 2, г показывают конфигурацию препятствий и оптимальный маршрут, найденный алгоритмом 1, в разные моменты времени. Можно видеть, что длина маршрута, построенного алгоритмом 1, меньше представленного маршрута в работе [32].

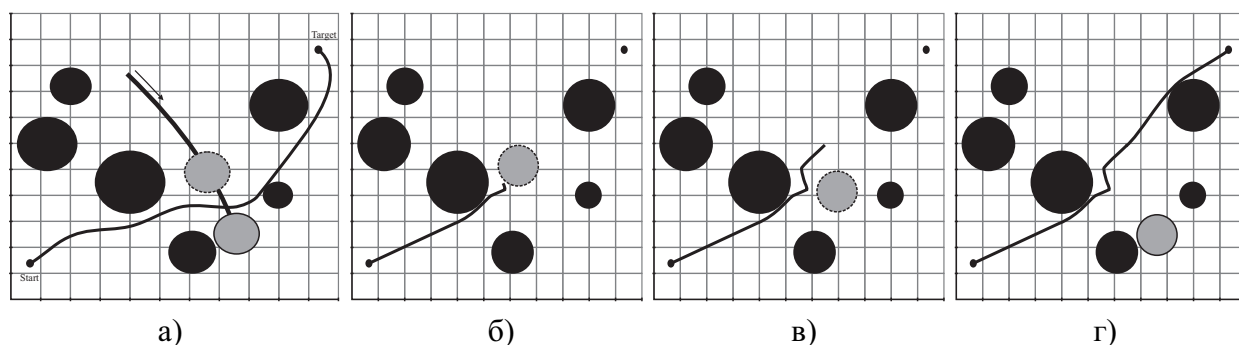


Рис. 2. Результаты расчетов в случае подвижного препятствия

Пример 2. Среда описывается линейной функцией $f(t, x, y) = 1 + a_t x$. Рассмотрим следующие случаи.

А. Среда является статической, коэффициент $a_t = 1$. Построенные маршруты представлены на рис. 3. Здесь и далее, рисунок а соответствует первому алгоритму, рисунок б — второму.

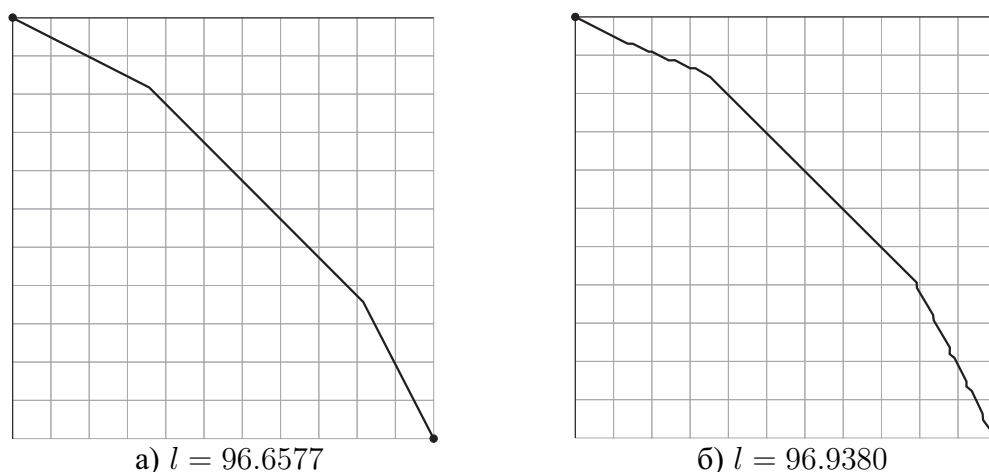


Рис. 3. Маршруты в линейной статической среде

Из рис. 3 можно видеть, что маршрут, построенный алгоритмом 2, не оптимален и имеет изломы. Тем не менее, маршруты имеют похожую конфигурацию и сопоставимое время преодоления: 96.6577 и 96.9380 для первого и второго алгоритмов, соответственно.

Б. Среда изменяется через интервал времени $\Delta t = 5$ следующим образом: $a_0 = 1$; $a_{t+\Delta t} = a_t + \Delta a$. Результаты расчетов представлены в таблице 2, здесь T — время, требуемое на преодоление маршрута.

Из таблицы 2 видно, что с увеличением коэффициента a_t растет относительная погрешность, то есть чем быстрее изменяется среда, тем хуже работает алгоритм 2.

Пример 3. Функция среды определяется формулами:

$$R = 32\sqrt{(x - a_t)^2 + (y - b_t)^2} + 0.001, \quad f(t, x, y) = 1 + 4\frac{\sin(R)}{R}. \quad (3)$$

Таблица 2. Результаты вычислений для динамической среды

Δa	Алгоритм 1		Алгоритм 2		Относительная погрешность %
	T	Число точек переключения	T	Число точек переключения	
0.01	91.3969	21	93.3569	22	2.14
0.02	87.2273	20	90.3618	21	3.59
0.03	83.2703	20	87.6626	21	5.27
0.04	79.6980	20	85.2378	20	6.95
0.05	77.3283	19	83.1172	20	7.49
0.10	66.2915	18	75.0979	18	13.28
0.15	59.2706	17	69.6506	18	17.51
0.20	54.5402	16	65.4354	16	19.98

Рассмотрим следующие случаи.

А. Среда является статической: $a_t = 0.5$; $b_t = 0.5$.

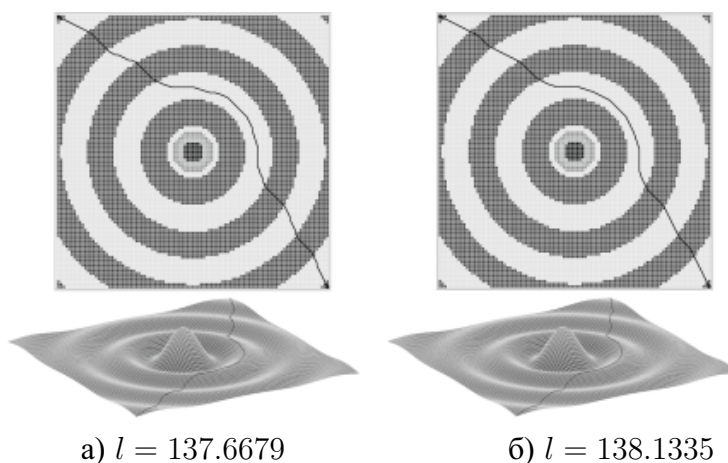


Рис. 4. Маршруты в статической среде

Б. Функция среды изменяется следующим образом: $b_t = 0.5$; $a_0 = 0$; $a_{t+\Delta t} = a_t + 0.02$. Построенные маршруты показаны на рис. 5.

Отметим, что в случае статической среды конфигурация построенных маршрутов различаются незначительно. Напротив, для динамической среды траектории существенно отличаются. Также в последнем случае растет и погрешность.

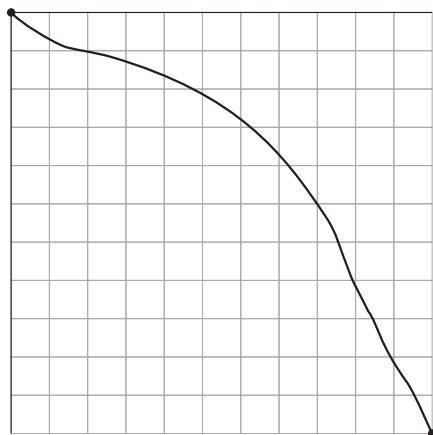
Пример 4. Зададим среду следующим образом:

- на интервале времени $[0, 50]$ среда статическая, то есть $f(t, x, y) \equiv 1$;
- начиная с $t = 50$, функция среды определяется формулой

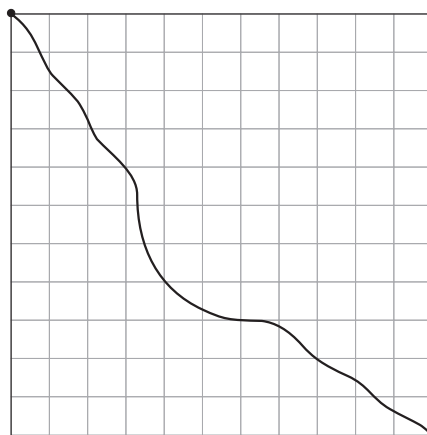
$$f(t, x, y) = 1 - e^{-a_t((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}, \quad (4)$$

где $a_{50} = 80$, $a_{t+\Delta t} = a_t - 1$.

Подобное задание среды означает, что скорость движения тем меньше, чем ближе к центру области, точка $(0.5, 0.5)$ является непроходимой. С течением времени скорость движения возрастает. Оптимальный маршрут показан на рис. 6.

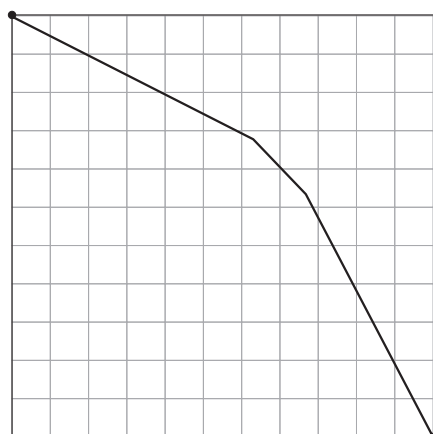


а) $l = 133.4887$

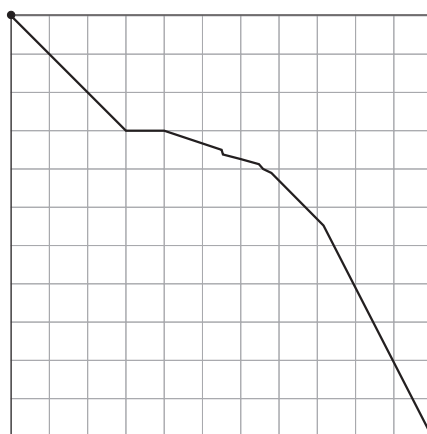


б) $l = 136.9403$

Рис. 5. Маршруты в динамической среде



а) $l = 150.5003$



б) $l = 153.2397$

Рис. 6. Маршруты в динамической среде

Из рис. 6 можно видеть, что на отрезке времени $[0, 50]$ путь, найденный алгоритмом 2, является отрезком прямой, соединяющей точки A и B ; когда же скорость движения замедляется, алгоритм начинает обходить «медленный» участок. Алгоритм 1 за счет нахождения всего фронта волны сразу корректирует траекторию, чтобы обойти медленный участок по более выигрышному маршруту.

§ 3. Заключение

В ходе работы были рассмотрены известные задачи о построении оптимального маршрута между двумя пунктами в динамической среде. Тематика весьма актуальная и востребованная, в первую очередь, в связи с многочисленными приложениями. Особенностью настоящего исследования, отличающей его от большинства аналогичных (см. библиографический обзор), является то, что в качестве расстояния между точками рассматривается минимальное время, необходимое для перемещения между ними. Кроме того, авторы при построении маршрутов использовали решения уравнения эйконала, что позволило отказаться от рассмотрения задачи на графе.

Для построения решения авторы предложили два алгоритма на основе оптико-геометрического подхода, которые позволяют строить маршруты не только в обычной среде, но и в динамической среде с неевклидовой метрикой. При этом первый алгоритм обеспечивает оптимальное решение, второй же позволяет быстро находить допустимое решение. В ходе проведенных вычислительных экспериментов эти алгоритмы показали свою работо-

способность в различных случаях. Более того, при решении тестовых задач предложенный подход в ряде случаев показал преимущество перед известными, хотя, строго говоря, авторы не ставили перед собой задачу разработки наилучшего метода построения решения рассмотренной задачи. Главной целью исследования являлся перенос разработанного ранее для статической среды модельно-алгоритмического инструментария на новый класс задач, что и было успешно реализовано.

В дальнейшем авторы планируют развивать предложенные алгоритмы для учета размера движущегося объекта в динамической среде с подвижными препятствиями. Стратегической целью работ, началом которых, как рассчитывают авторы, станет настоящая статья, является построение оптимальных покрытий и упаковок в динамической среде.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований», № гос. регистрации: 121041300065-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutin G., Punnen A. The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/b101971>
2. Toth P., Vigo D. Vehicle routing: problems, methods, and applications. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973594>
3. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
4. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. К вопросу об оптимизации точки старта в задаче маршрутизации с ограничениями // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 135–154. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-09>
5. Beresneva E., Avdoshin S. Analysis of mathematical formulations of capacitated vehicle routing problem and methods for their solution // Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS. 2018. Vol. 30. Issue 3. P. 233–250. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30\(3\)-17](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30(3)-17)
6. Atyabi A., Powers D. M. W. Review of classical and heuristic-based navigation and path planning approaches // International Journal of Advancements in Computing Technology. 2013. Vol. 5. P. 1–14.
7. Yang L., Qi J., Song D., Xiao J., Han J., Xia Y. Survey of robot 3D path planning algorithms // Journal of Control Science and Engineering. 2016. Vol. 2016. Article ID: 7426913. <https://doi.org/10.1155/2016/7426913>
8. Injarapu A. S. H. H. V., Gawre S. K. A survey of autonomous mobile robot path planning approaches // 2017 International Conference on Recent Innovations in Signal processing and Embedded Systems (RISE). 2017. P. 624–628. <https://doi.org/10.1109/RISE.2017.8378228>
9. Youakim D., Ridaou P. Motion planning survey for autonomous mobile manipulators underwater manipulator case study // Robotics and Autonomous Systems. 2018. Vol. 107. P. 20–44. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.05.006>
10. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische mathematik. 1959. Vol. 1. No. 1. P. 269–271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
11. Floyd R. W. Algorithm 97: Shortest path // Communications of the ACM. 1962. Vol. 5. No. 6. P. 345. <https://doi.org/10.1145/367766.368168>
12. Warshall S. A theorem on boolean matrices // Journal of the ACM. 1962. Vol. 9. No. 1. P. 11–12. <https://doi.org/10.1145/321105.321107>
13. Matthews J. Basic A* pathfinding made simple // AI Game Programming Wisdom. Boston: Charles River Media, 2002. P. 105–113.
14. Stentz A. Optimal and efficient path planning for partially-known environments // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1994. P. 3310–3317. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351061>

15. Kunz T., Reiser U., Stilman M., Verl A. Real-time path planning for a robot arm in changing environments // 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2010. P. 5906–5911. <https://doi.org/10.1109/IROS.2010.5653275>
16. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Алгоритмы оптимизации маршрутов движения с учетом погодных условий // International Journal of Open Information Technologies. 2016. Т. 4. № 3. С. 55–61. <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/247/222>
17. Shin Y. W., Abebe M., Noh Y., Lee S., Lee I., Kim D., Bae J., Kim K. C. Near-optimal weather routing by using improved A* algorithm // Applied Sciences. 2020. Vol. 10. Issue 17. 6010. <https://doi.org/10.3390/app10176010>
18. Pennino S., Gaglione S., Innac A., Piscopo V., Scamardella A. Development of a new ship adaptive weather routing model based on seakeeping analysis and optimization // Journal of Marine Science and Engineering. 2020. Vol. 8. Issue 4. 270. <https://doi.org/10.3390/jmse8040270>
19. El Khaili M. Path planning in a dynamic environment // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2014. Vol. 5. Issue 8. P. 86–92. <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2014.050813>
20. Сарапулов А. В. Методы решения задачи построения траектории для беспилотного летательного аппарата в динамической среде // Ракетно-космическая техника. 2017. Т. 1. № 2 (10). С. 92–99. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32544216>
21. Vemula A., Muelling K., Oh J. Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality // arXiv: 1605.06853 [cs.RO]. 2016. <https://arxiv.org/abs/1605.06853v1>
22. Gochev K., Cohen B., Butzke J., Safonova A., Likhachev M. Path planning with adaptive dimensionality // The Fourth International Symposium on Combinatorial Search (SoCS-2011). 2011. <https://repository.upenn.edu/hms/175>
23. Jia D., Hu C., Qin K., Cui X. Planar waypoint generation and path finding in dynamic environment // 2014 International Conference on Identification, Information and Knowledge in the Internet of Things. 2014. P. 206–211. <https://doi.org/10.1109/IIKI.2014.49>
24. Zhu W., Jia D., Wan H., Yang T., Hu C., Qin K., Cui X. Waypoint graph based fast pathfinding in dynamic environment // International Journal of Distributed Sensor Networks. 2015. Vol. 11. Issue 8. Article ID: 238727. <https://doi.org/10.1155/2015/238727>
25. Ng M.-K., Chong Y.-W., Ko K.-m., Park Y.-H., Leau Y.-B. Adaptive path finding algorithm in dynamic environment for warehouse robot // Neural Computing and Applications. 2020. Vol. 32. P. 13155–13171. <https://doi.org/10.1007/s00521-020-04764-3>
26. Masehian E., Katebi Y. Robot motion planning in dynamic environments with moving obstacles and target // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2007. Vol. 29. P. 107–112.
27. Du Toit N. E., Burdick J. W. Robot motion planning in dynamic, uncertain environments // IEEE Transactions on Robotics. 2012. Vol. 28. No. 1. P. 101–115. <https://doi.org/10.1109/TRO.2011.2166435>
28. Abiyev R. H., Akkaya N., Aytac E. Navigation of mobile robot in dynamic environments // 2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE). 2012. P. 480–484. <https://doi.org/10.1109/CSAE.2012.6272997>
29. Гилимьянов Р. Ф., Рапопорт Л. Б. Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий // Проблемы управления. 2012. Вып. 1. С. 70–76. <http://mi.mathnet.ru/pu698>
30. Бычков И. В., Кензин М. Ю., Максимкин Н. Н. Двухуровневый эволюционный подход к маршрутизации группы подводных роботов в условиях периодической ротации состава // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 2. С. 267–301. <https://doi.org/10.15622/sp.18.2.267-301>
31. Ulyanov S., Bychkov I., Maksimkin N. Event-based path-planning and path-following in unknown environments for underactuated autonomous underwater vehicles // Applied Sciences. 2020. Vol. 10. Issue 21. 7894. <https://doi.org/10.3390/app10217894>
32. Гэн К., Чулин Н. А. Алгоритм наведения движения для квадрокоптера с возможностью облета препятствий и отслеживания запланированного маршрута на основе управления нормальным ускорением // Проблемы современной науки и образования. 2016. № 31 (73). С. 6–28.

33. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57. <http://mi.mathnet.ru/at2243>
34. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 3. Излучение. Волны. Кванты. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
35. Cassel K. W. Variational methods with applications in science and engineering. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
36. Боровских А. В. Двумерное уравнение эйконала // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47. № 5. С. 993–1018. <http://mi.mathnet.ru/smj926>
37. Borovskikh A. V. Eikonal equation for anisotropic media // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 197. P. 248–289. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1714-5>
38. Кабанихин С. И., Криворотько О. И. Численное решение уравнения эйконала // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 28–34. <http://mi.mathnet.ru/semr435>

Поступила в редакцию 25.10.2021

Казаков Александр Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>

E-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9562-7903>

E-mail: lempert@icc.ru

Цитирование: А. Л. Казаков, А. А. Лемперт. О построении маршрутов в динамической среде с использованием решений уравнения эйконала // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 59–72.

Keywords: vehicle routing problem, optimization, optical-geometric approach, eikonal equation, computational algorithm.

MSC2020: 65K10, 90C59

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-04

The article deals with the vehicle routing problem in an environment with dynamically changing properties. The problem is relevant in current conditions when the delivery cost has a steady upward trend and is often comparable to the cost of the product itself. A central feature of the study is that the optimality criterion is the minimum delivery time, but not the distance traveled. The optical-geometric approach developed by the authors, based on the analogy between the propagation of light in an optically inhomogeneous medium and the minimization of the integral functional, is used as a research tool. We use exact and approximate solutions of the eikonal equations to describe wave fronts. Two original numerical algorithms for route construction are proposed and implemented as software. A computational experiment is performed that justified the effectiveness of the proposed model-algorithmic tools.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. 121041300065-9.

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A. *The traveling salesman problem and its variations*, Boston: Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/b101971>
2. Toth P., Vigo D. *Vehicle routing: problems, methods, and applications*, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973594>
3. Gimadi E. Kh., Khachai M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
4. Chentsov A. G., Chentsov P. A. To the question of optimization of the starting point in the routing problem with restrictions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 135–154 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-09>
5. Beresneva E., Avdoshin S. Analysis of mathematical formulations of capacitated vehicle routing problem and methods for their solution, *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 2018, vol. 30, issue 3, pp. 233–250. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30\(3\)-17](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30(3)-17)
6. Atyabi A., Powers D. M. W. Review of classical and heuristic-based navigation and path planning approaches, *International Journal of Advancements in Computing Technology*, 2013, vol. 5, pp. 1–14.
7. Yang L., Qi J., Song D., Xiao J., Han J., Xia Y. Survey of robot 3D path planning algorithms, *Journal of Control Science and Engineering*, 2016, vol. 2016, article ID: 7426913. <https://doi.org/10.1155/2016/7426913>
8. Injarapu A. S. H. H. V., Gawre S. K. A survey of autonomous mobile robot path planning approaches, *2017 International Conference on Recent Innovations in Signal processing and Embedded Systems (RISE)*, 2017, pp. 624–628. <https://doi.org/10.1109/RISE.2017.8378228>
9. Youakim D., Ridao P. Motion planning survey for autonomous mobile manipulators underwater manipulator case study, *Robotics and Autonomous Systems*, 2018, vol. 107, pp. 20–44. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.05.006>
10. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische mathematik*, 1959, vol. 1, no. 1, pp. 269–271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
11. Floyd R. W. Algorithm 97: Shortest path, *Communications of the ACM*, 1962, vol. 5, no. 6, pp. 345. <https://doi.org/10.1145/367766.368168>

12. Warshall S. A theorem on boolean matrices, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, no. 1, pp. 11–12. <https://doi.org/10.1145/321105.321107>
13. Matthews J. Basic A* pathfinding made simple, *AI Game Programming Wisdom*, Boston: Charles River Media, 2002, pp. 105–113.
14. Stentz A. Optimal and efficient path planning for partially-known environments, *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1994, pp. 3310–3317. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351061>
15. Kunz T., Reiser U., Stilman M., Verl A. Real-time path planning for a robot arm in changing environments, *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010, pp. 5906–5911. <https://doi.org/10.1109/IROS.2010.5653275>
16. Veremei E. I., Sotnikova M. V. Optimal routing based on weather forecast, *International Journal of Open Information Technologies*, 2016, vol. 4, no. 3, pp. 55–61 (in Russian). <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/247/222>
17. Shin Y. W., Abebe M., Noh Y., Lee S., Lee I., Kim D., Bae J., Kim K. C. Near-optimal weather routing by using improved A* algorithm, *Applied Sciences*, 2020, vol. 10, issue 17, 6010. <https://doi.org/10.3390/app10176010>
18. Pennino S., Gaglione S., Innac A., Piscopo V., Scamardella A. Development of a new ship adaptive weather routing model based on seakeeping analysis and optimization, *Journal of Marine Science and Engineering*, 2020, vol. 8, issue 4, 270. <https://doi.org/10.3390/jmse8040270>
19. El Khaili M. Path planning in a dynamic environment, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2014, vol. 5, issue 8, pp. 86–92. <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2014.050813>
20. Sarapulov A. V. Methods for solving the problem of constructing a trajectory for an unmanned aerial vehicle in a dynamic environment, *Raketno-kosmicheskaya Tekhnika*, 2017, vol. 1, no. 2 (10), pp. 92–99 (in Russian). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32544216>
21. Vemula A., Mueller K., Oh J. Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality, *arXiv: 1605.06853 [cs.RO]*, 2016, <https://arxiv.org/abs/1605.06853v1>
22. Gochev K., Cohen B., Butzke J., Safonova A., Likhachev M. Path planning with adaptive dimensionality, *The Fourth International Symposium on Combinatorial Search (SoCS-2011)*, 2011, <https://repository.upenn.edu/hms/175>
23. Jia D., Hu C., Qin K., Cui X. Planar waypoint generation and path finding in dynamic environment, *2014 International Conference on Identification, Information and Knowledge in the Internet of Things*, 2014, pp. 206–211. <https://doi.org/10.1109/IINKI.2014.49>
24. Zhu W., Jia D., Wan H., Yang T., Hu C., Qin K., Cui X. Waypoint graph based fast pathfinding in dynamic environment, *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2015, vol. 11, issue 8, article ID: 238727. <https://doi.org/10.1155/2015/238727>
25. Ng M.-K., Chong Y.-W., Ko K.-m., Park Y.-H., Leau Y.-B. Adaptive path finding algorithm in dynamic environment for warehouse robot, *Neural Computing and Applications*, 2020, vol. 32, pp. 13155–13171. <https://doi.org/10.1007/s00521-020-04764-3>
26. Masehian E., Katebi Y. Robot motion planning in dynamic environments with moving obstacles and target, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2007, vol. 29, pp. 107–112.
27. Du Toit N. E., Burdick J. W. Robot motion planning in dynamic, uncertain environments, *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, vol. 28, no. 1, pp. 101–115. <https://doi.org/10.1109/TRO.2011.2166435>
28. Abiyev R. H., Akkaya N., Aytac E. Navigation of mobile robot in dynamic environments, *2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE)*, 2012, pp. 480–484. <https://doi.org/10.1109/CSAE.2012.6272997>
29. Gilimyanov R. F., Rapoport L. B. Path deformation method for robot motion planning problems in the presence of obstacles, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 12, pp. 2163–2172. <https://doi.org/10.1134/S0005117913120187>
30. Bychkov I., Kenzin M., Maksimkin N. Two-level evolutionary approach to persistent surveillance for multiple underwater vehicles with energy constraints, *SPIIRAS Proceedings*, 2019, vol. 18, no. 2, pp. 267–301 (in Russian). <https://doi.org/10.15622/sp.18.2.267-301>
31. Ulyanov S., Bychkov I., Maksimkin N. Event-based path-planning and path-following in unknown

- environments for underactuated autonomous underwater vehicles, *Applied Sciences*, 2020, vol. 10, issue 21, 7894. <https://doi.org/10.3390/app10217894>
32. Geng K., Chulin N. A. Algorithm guidance for movement with possibility of quadcopters avoiding obstacles and tracking planned route based on the normal acceleration controlling, *Problemy Sovremennoi Nauki i Obrazovaniya*, 2016, no. 31 (73), pp. 6–28 (in Russian).
 33. Kazakov A. L., Lempert A. A. An approach to optimization in transport logistics, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, issue 7, pp. 1398–1404. <https://doi.org/10.1134/S0005117911070071>
 34. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. *Feynman lectures on physics. Vol. 3. Quantum mechanics*, Addison Wesley, 1971.
 35. Cassel K. W. *Variational methods with applications in science and engineering*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
 36. Borovskikh A. V. The two-dimensional eikonal equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, issue 5, pp. 813–834. <https://doi.org/10.1007/s11202-006-0091-9>
 37. Borovskikh A. V. Eikonal equation for anisotropic media, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, pp. 248–289. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1714-5>
 38. Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I. Numerical solution eikonal equation, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2013, vol. 10, pp. 28–34 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/semr435>

Received 25.10.2021

Aleksandr Leonidovich Kazakov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>

E-mail: kazakov@icc.ru

Anna Anan'evna Lempert, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9562-7903>

E-mail: lempert@icc.ru

Citation: A. L. Kazakov, A. A. Lempert. On the route construction in changing environments using solutions of the eikonal equation, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 59–72.