Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2021. Том 58. С. 94–126

УДК 517.958, 530.145.6

© *А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, А. Н. Сесекин*

ОДНА ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ РАБОТ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ РАДИАЦИИ

Исследуется задача последовательного обхода мегаполисов, ориентированная на проблему демонтажа системы радиационно опасных объектов при ограничениях в виде условий предшествования. Радиационное воздействие на исполнителей оценивается дозами, получаемыми при перемещениях и при выполнении работ по демонтажу. Рассматривается маршрутная задача минимизации дозовой нагрузки работников, осуществляющих демонтаж в той или иной последовательности операций. Исследуется процедура построения оптимального решения с использованием варианта динамического программирования. На этой основе построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ. Приведены примеры численного решения модельной задачи на минимум дозовой нагрузки.

Ключевые слова: динамическое программирование, демонтаж, маршрут.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-06

Введение

Задачи, связанные с маршрутизацией перемещений возникают в самых различных сферах человеческой деятельности. Можно отметить задачу управления инструментом при фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ (см. [1–3]), задачу авиапожарного патрулирования лесов, транспортные задачи. В настоящей работе мы ориентируемся на применения, связанные с атомной энергетикой; имеется в виду задача минимизации дозовой нагрузки при демонтаже системы радиационно опасных элементов. Эта задача может возникать в связи с авариями на АЭС, подобных Чернобылю и Фукусиме, а также в связи с необходимостью демонтажа энергоблока, выведенного из эксплуатации. В своих построениях мы ставим своей целью оптимизацию процессов, включающих выбор точки старта, варианта очередности выполнения заданий по демонтажу и конкретной траектории. Возникает очень сложная задача маршрутизации, в которой даже насчитывание функций стоимости (здесь — совокупных доз радиации) составляет серьезную проблему; см. в этой связи [4, 5]. В этой связи в статье уделяется данной проблеме серьезное внимание; предполагается, что построение функций затрат осуществляется в значительной степени по мере их использования для целей решения основной задачи. Используемые методы восходят к [6]. Монография [4] содержит необходимую детализацию в части применения в атомной энергетике; имеется в виду задача минимизации дозовой нагрузки исполнителей при выполнении комплекса работ по демонтажу радиационно опасных элементов.

Отметим, что рассматриваемая задача маршрутизации, ориентированная на инженерные приложения, имеет своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (см. [7–9] и др.), однако содержит целый ряд существенных особенностей. Среди методов решения задачи коммивояжера (TSP в англоязычной литературе) отметим сейчас метод ветвей и границ [10] и динамическое программирование (ДП) [11, 12]. Отметим также обстоятельный обзор [13–15]. Существенный момент настоящего исследования связан с условиями предшествования, когда для некоторых пар объектов посещения требуется, чтобы один из этих объектов посещался раньше другого. Данное ограничение удается использовать для снижения вычислительной сложности (см. [6, § 4.9]). В исследуемой задаче о минимизации дозовой нагрузки появление условий предшествования может быть связано, например, с тем, что один из демонтируемых объектов размещается на другом и поэтому верхний объект должен демонтироваться раньше нижнего (имеются и другие условия содержательного характера, приводящие к требованиям предшествования).

В настоящей работе при исследовании задачи демонтажа, включая часть, связанную с конкретными вычислениями, используется достаточно подробная детализация функций стоимости, значениями которых являются дозы радиации. Как уже отмечалось, само построение функций стоимости является достаточно сложным. В статье предполагается, что критерий отвечает аддитивному агрегированию затрат (в связи с «неаддитивными» задачами такого типа см. [3]), при котором естественным образом выделяются компоненты, оценивающие внешние перемещения, и работы, проводимые в пределах объектов посещения (здесь мегаполисов, то есть непустых конечных множеств) и именуемые внутренними, а также компонента, оценивающая терминальное состояние. Дозы, получаемые при перемещениях (здесь — прямолинейных), находятся всякий раз интегрированием зависимости, обратно пропорциональной квадрату расстояния до источника. Дозы, получаемые при выполнении внутренних работ получаются суммированием динамической компоненты, оценивающей перемещения (при этом раздельно оценивается перемещение к источнику с целью демонтажа и перемещение после демонтажа), и статической, оценивающей дозу, получаемую вблизи источника при непосредственном проведении демонтажа. Терминальная компонента может учитывать остаточный фон, но, возможно, и воздействие оставшихся после выполнения всех заданий источников, осуществляющееся на этапе перемещения работника к пункту эвакуации (в примерах, однако, терминальная компонента предполагалась тождественно равной нулю).

Представляется, что решение упомянутой задачи в ее оптимизационной постановке может быть полезным на этапе планирования работ по демонтажу. В частности, это касается вопросов замены исполнителей в связи с получением достаточно высоких доз радиации, когда «одним составом» удается демонтировать лишь часть радиационно опасных объектов. Эта проблема, однако, требует дополнительного исследования.

§ 1. Общие понятия

В дальнейшем используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и т. п.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ есть их неупорядоченная пара, то есть множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для всякого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z: $z \in \{z\}$. Если u и v — объекты, то [16, с. 67] $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом u и вторым элементом v. Если h есть какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h; $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Каждым трем объектам a, b и c сопоставляем их упорядоченный триплет $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$. Соответственно, полагаем $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ для трех любых множеств A, B и C. В связи с последними определениями см. [16, гл. II] и [17, с. 17]. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м H и полагаем, что $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H); через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех непустых множеств из $\mathcal{P}'(H)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м H. Если A и B — непустые множества, то через B^A обозначаем (см. [16, гл. II, § 6]) множество всех функций, действующих из A в B; если $\mathbf{f} \in B^A$ (а это означает, что $\mathbf{f}\colon A \to B$) и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $\mathbf{f}^1(C) \triangleq \{\mathbf{f}(x)\colon x \in C\}$ есть образ множества C при действии $\mathbf{f}$. В случае, когда G и H — непустые множества,

$$(\mathrm{Bi})[G, H] \triangleq \{\mathbf{f} \in H^G \mid (f^1(G) = H) \& (\forall g_1 \in G \ \forall g_2 \in G \ \ (\mathbf{f}(g_1) = \mathbf{f}(g_2)) \Rightarrow (g_1 = g_2))\}$$

есть множество всех биекций множества G на H; см. [18, с. 86]. Тогда для всякого непустого множества S в виде $(\mathrm{Bi})[S;S]$ имеем [18, с. 87] множество всех перестановок S. Как обычно, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\} = [0, \infty[$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$; при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant k)\&(k \leqslant q)\}$$

(ясно, что $\overline{p,q} = \varnothing$ при $q < p$). Для всякого непустого множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S, то есть $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$. Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое множество $(\mathrm{bi})[K] \triangleq (\mathrm{Bi})[\overline{1,|K|};K]$; как обычно, полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$. Ясно, что $(\mathrm{bi})[\overline{1,m}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1,m};\overline{1,m}]$ при $m \in \mathbb{N}$ есть множество всех перестановок $\overline{1,m}$; если $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$, то $\alpha^{-1} \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ есть по определению перестановка, обратная к α: $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \ \ \forall k \in \overline{1,m}$.

§ 2. Постановка задачи

Мы введем общую постановку и кратко обсудим некоторые детализации, связанные с задачей о демонтаже радиационно опасных элементов. Фиксируем непустое множество X и (непустое конечное) его п/м $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$. Элементы X^0 играют роль стартовых точек; в пределах X могут осуществляться рассматриваемые ниже перемещения. Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $2 \leqslant N$, заданы множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

то есть мегаполисы, подлежащие посещению, а также

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N) \tag{2.2}$$

((2.2) — система непустых отношений: $\varnothing \neq \mathbb{M}_j \subset M_j \times M_j$ при $j \in \overline{1,N}$). Полагаем, что

$$(X^0 \cap M_j = \varnothing \ \ \forall j \in \overline{1,N})\&(M_p \cap M_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{2.3}$$

Условия (2.3) типичны для задач маршрутизации. Отношения (2.2) будут определять условия выполнения работ, связанных с посещением мегаполисов (см. (2.1)) и именуемых внутренними. При $j \in \overline{1,N}$ полагаем, что

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\})\&(\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\}); \tag{2.4}$$

ясно, что $\mathfrak{M}_j \in \mathcal{P}'(M_j)$ и $\mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(M_j)$. Кроме того, имеем, что

$$\Big(\mathbb{X} \triangleq X^0 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X)\Big)\&\Big(\mathbf{X} \triangleq X^0 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X)\Big). \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Рассматриваемые ниже системы перемещений содержательно характеризуются схемой

$$(x^0 \in X^0) \to (x_{1,1} \in \mathfrak{M}_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_{N,1} \in \mathfrak{M}_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(N)}), \tag{2.6}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$, $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}$, $\ldots$, $(x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$. Выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ может быть стеснен условиями предшествования, для введения которых зафиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$, элементы последнего называем адресными парами (напомним, что $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$). Полагаем далее, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_0. \tag{2.7}$$

Данное условие типично для практических задач (см. обсуждение в [6, ч. 2]). Называя перестановки из $\mathbb{P}$ маршрутами, полагаем, что маршрут допустим, если при всяком выборе адресной пары $z \in \mathbf{K}$ мегаполис с номером $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ посещается раньше чем мегаполис с номером $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$. Тогда (см. [6, ч. 2])

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \forall t_1 \in \overline{1,N}\ \ \forall t_2 \in \overline{1,N}\ \ ((\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \in \mathbf{K}) \Rightarrow (t_1 < t_2)\} \\ = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})\end{aligned} \tag{2.8}$$

есть множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию. Возвращаясь к (2.6), введем траектории, согласованные с маршрутами. В силу условий, отмеченных после (2.6), уместно рассматривать перемещения в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Итак, траекториями называем перемещения в пространстве УП. В силу (2.5), (2.6) в качестве фазового пространства процесса логично теперь рассматривать $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$.

Отметим, что траектории, используемые ниже, являются кортежами, а точнее, функциями, определенными на конечных п/м $\mathbb{N}_0$. В этой связи введем множество $\mathbb{Z}$ всех отображений из $\overline{0,N}$ в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x))\&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}) \tag{2.9}$$

есть пучок траекторий со стартом в x, согласованных с маршрутом α (следуя традиции задачи коммивояжера, называем перестановку индексов маршрутом). Тогда при $x \in X^0$

$$\tilde{D}[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z}) \tag{2.10}$$

есть множество всех допустимых решений (ДР) задачи со стартом в x. Наконец,

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0 \mid (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{D}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0). \tag{2.11}$$

Триплеты, являющиеся элементами $\mathbf{D}$ (2.11), будем называть (допустимыми) маршрутными процессами.

Функции стоимости. Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Множества — элементы семейства $\mathfrak{N}$ — называем далее списками (заданий). Используем (2.5) и фиксируем следующие $N+2$ функции:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_N \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}], \tag{2.12}$$

где $\mathbf{M}$ есть по определению объединение всех множеств $\mathbf{M}_i$, $i \in \overline{1,N}$. Используем $\mathbf{c}$ для оценивания внешних перемещений, $c_1, \ldots, c_N$ — для оценивания внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния (точки $x_{N,2}$ в (2.6)). Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$, то полагаем (см. (2.4), (2.5), (2.9)), что

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t,N}))] \\ + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(N))).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Полагаем, что (2.13) определяет аддитивный критерий. Тогда при $x \in X^0$ в виде

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \to \min, (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{D}[x], \tag{2.14}$$

получаем x-задачу, характеризуемую экстремумом

$$V[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\alpha,\mathbf{z}) \in \tilde{D}[x]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.15}$$

а также (непустым конечным) множеством

$$(\mathrm{SOL})[x] \triangleq \{(\alpha^0, \mathbf{z}^0) \in \tilde{D}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha^0}[\mathbf{z}^0] = V[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{D}[x]) \tag{2.16}$$

оптимальных решений. Соответственно, полная задача

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \to \min, (\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}, \tag{2.17}$$

характеризуется глобальным экстремумом

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\alpha,\mathbf{z},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.18}$$

а также множеством

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x_0) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}) \tag{2.19}$$

всех оптимальных маршрутных процессов. Отметим, наконец, задачу

$$V[x] \to \min, \quad x \in X^0, \tag{2.20}$$

оптимизации точки старта, для которой $\mathbb{V}$ (2.18) является экстремумом, а

$$X^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x^0 \in X^0 \mid V[x^0] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(X^0) \tag{2.21}$$

есть множество всех оптимальных точек старта. Нашей основной целью является решение задачи (2.17); задачи (2.14) и (2.20) являются по смыслу вспомогательными, но их роль в последующих построениях весьма существенна.

§ 3. Динамическое программирование, 1

В этом параграфе мы конструируем систему частичных задач, которую рассматриваем как расширение основной задачи маршрутизации. Для построения этого расширения напомним прежде всего определение специального оператора вычеркивания (заданий из списка), связанного с реализацией условий предшествования; см. [2–6] и др. Итак, следуя [6, ч. 2] определяем оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$ посредством правила: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Xi[K]\}, \tag{3.1}$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Итак, $\mathbf{I}$ сопоставляет каждому списку заданий некоторый подсписок. Отметим, что (см. [19, замечание 3.2]) при $t \in \overline{1,N}$ одноэлементный список $\{t\}$ является неподвижной точкой $\mathbf{I}$, то есть $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$; подчеркнем, что данное свойство следует из того, что (при условии (2.7)) $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$ (см. [19, (3.13)]).

С (3.1) связана схема построения частичных маршрутов со свойством допустимости по вычеркиванию. Итак, при $K \in \mathfrak{N}$ мы имеем значение $|K| \in \overline{1,N}$ и получаем (см. [19, (3.16)]) множество

$$(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{m,|K|})) \ \ \forall m \in \overline{1,|K|}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[K]). \tag{3.2}$$

Напомним важное свойство [19, (3.17)]: справедливо равенство

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}]. \tag{3.3}$$

В (3.2) определены частичные маршруты, допустимые по вычеркиванию. Далее, рассмотрим траектории, согласованные с этими маршрутами. Пусть $\tilde{\mathbb{X}} \triangleq \mathbb{X} \cup \mathbf{X}$.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $\mathbb{Z}_K$ обозначим множество всех отображений из $\overline{0, |K|}$ в $\tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$; итак, $\mathbb{Z}_K$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}$, где $z_j \in \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}\ \ \forall j \in \overline{0, |K|}$. Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то полагаем, что

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x))\&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t \in \overline{1, |K|})\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K); \tag{3.4}$$

отметим, что при $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$ и $t \in \overline{1, |K|}$ непременно $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$, $\mathbf{z}(0) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ и, в частности, $\mathbf{z}(0) \in \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$. В связи с (3.3) представляется важным случай $K = \overline{1, N}$. Кроме того, при $x \in X^0$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$ имеем, что $\mathcal{Z}(x, \overline{1, N}, \alpha) \subset \mathbb{Z}$. Иными словами, как видно из (3.3) и (3.4), при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$ определено (см. (2.5)) множество

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(x, \overline{1, N}, \alpha) &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{\overline{1,N}} \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x))\&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t \in \overline{1, N})\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x))\&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t \in \overline{1, N})\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

(мы учитываем, что $|\overline{1, N}| = N$ и $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$); тогда, как видно из (2.9) и (3.5),

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] = \mathcal{Z}(x, \overline{1, N}, \alpha). \tag{3.6}$$

Полезно учитывать (3.3) и (3.6) в их естественной совокупности.

Введем в рассмотрение варианты аддитивного критерия частичных задач. Итак, при $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$ полагаем, что

$$\begin{gathered}\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid K] \triangleq \sum_{t=1}^{|K|} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \\ \alpha^1(\overline{t, |K|})) + c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, |K|}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(|K|))).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Заметим, что (3.7) определено, в частности, при $x \in X^0$, $K = \overline{1, N}$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$ (здесь мы учитываем, конечно, что $\mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$, и (3.6)); получаем тогда, что (см.(2.13))

$$\begin{gathered}\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid \overline{1, N}] \triangleq \sum_{t=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \\ \alpha^1(\overline{t, N})) + c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, N}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(N))) = \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}].\end{gathered} \tag{3.8}$$

Введем теперь в рассмотрение частичные (укороченные) задачи, учитывая (3.2), (3.5) и (3.7). Итак, при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ рассматриваем задачу

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid K] \to \min, \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K], \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha). \tag{3.9}$$

В связи с (3.9) удобно ввести в рассмотрение ДР частичных задач, полагая при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\tilde{D}_K[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)\} \in \mathrm{Fin}((\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K). \tag{3.10}$$

Тогда при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ задача (3.9) может быть переписана в виде

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid K] \to \min, \qquad (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{D}_K[x]; \tag{3.11}$$

сопоставляем данной задаче ее экстремум

$$v(x, K) \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{D}_K[x]} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid K] = \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]} \ \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid K] \in \mathbb{R}_+, \tag{3.12}$$

а также (непустое) множество оптимальных решений

$$(\mathrm{sol})[x \mid K] \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{D}_K[x] \mid \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0 \mid K] = v(x, K)\} \in \mathcal{P}'(\tilde{D}_K[x]). \tag{3.13}$$

Задачу (3.11) можно рассматривать при $x \in X^0$ и $K = \overline{1, N}$; тогда согласно (3.3) и (3.6) получаем после простых преобразований

$$\tilde{D}_{\overline{1,N}}[x] = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} = \tilde{D}[x]. \tag{3.14}$$

Далее, учтем (3.8). Тогда при $x \in X^0$ и $K = \overline{1, N}$ имеем, что (см.(2.15), (3.8), (3.14))

$$v(x, \overline{1, N}) = \min_{(\alpha,\mathbf{z}) \in \tilde{D}[x]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = V[x] \tag{3.15}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}(\mathrm{sol})[x \mid \overline{1, N}] &= \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{D}_{\overline{1,N}}[x] \mid \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[z_0 \mid \overline{1, N}] = v(x, \overline{1, N})\} \\ &= \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{D}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = V[x]\} = (\mathrm{SOL})[x].\end{aligned} \tag{3.16}$$

Свойства (3.15), (3.16) показывают, что система задач (3.11) действительно может рассматриваться как расширение системы задач (2.14); иными словами, при $x \in X^0$ задачи (2.14) и (3.11), где $K = \overline{1, N}$, совпадают: см. (3.8), (3.14). Введем, наконец, значения $v(x, \varnothing)$, $x \in \mathbf{M}$. А именно, полагаем, что

$$v(x, \varnothing) \triangleq f(x) \;\; \forall x \in \mathbf{M}. \tag{3.17}$$

Теперь определена функция (см. (3.12), (3.17))

$$v\colon (\mathbf{X} \times \mathfrak{N}) \cup (\mathbf{M} \times \{\varnothing\}) \to \mathbb{R}_+ \tag{3.18}$$

(заметим, что $(\mathbf{X} \times \mathfrak{N}) \cap (\mathbf{M} \times \{\varnothing\}) = \varnothing$)). Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$, то

$$((\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}) \vee ((\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{M} \times \{\varnothing\}). \tag{3.19}$$

З а м е ч а н и е 1. В целях полноты изложения проверим (3.19), фиксируя $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$. Пусть $n \triangleq |K|$. Тогда $(n = 1) \vee (n \in \overline{2, N})$. Рассмотрим два этих случая отдельно.

1) Пусть $n = 1$. Тогда $K = \{\tau\}$, где $\tau \in \overline{1, N}$ и, как уже отмечалось, $\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{\tau\}) = \{\tau\}$. Поэтому $j = \tau$ и $K \setminus \{j\} = \{\tau\} \setminus \{\tau\} = \varnothing$. При этом

$$\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_\tau,$$

где $\mathbf{M}_\tau \subset \mathbf{M}$. Тогда $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}$. Кроме того $K \setminus \{j\} = \{\tau\} \setminus \{\tau\} = \varnothing$. Поэтому в рассматриваемом сейчас случае

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{M} \times \{\varnothing\}.$$

Получили следующую импликацию

$$(n = 1) \Rightarrow ((\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{M} \times \{\varnothing\}). \tag{3.20}$$

2) Пусть $n \in \overline{2, N}$. Тогда, поскольку $\mathbf{I}(K) \subset K$, имеем по выбору j, что $|K \setminus \{j\}| \neq 0$, а потому $K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}$. Далее, поскольку $z \in \mathbb{M}_j$, то в силу (2.4) $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_j$ и, в частности, согласно (2.5) $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{X}$. В итоге

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$$

в рассматриваемом случае 2). Итак, имеем импликацию

$$(n \in \overline{2, N}) \Rightarrow ((\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}).$$

С учетом (3.20) получаем теперь требуемое свойство (3.19). $\square$

Отметим, что согласно (3.18) при $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$ определено значение

$$v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+.$$

Т е о р е м а 3.1. *Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{3.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$. Пусть

$$(n \triangleq |K|) \& (\omega \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]). \tag{3.22}$$

Тогда $n \in \overline{1, N}$ и $\omega \in \mathbb{R}_+$. Получаем, что

$$(n = 1) \vee (n \in \overline{2, N}). \tag{3.23}$$

Оба случая в (3.23) рассмотрим отдельно.

1) Пусть $n = 1$. Здесь рассуждение соответствует [19, с. 66]. Тем не менее напомним его в краткой форме. Имеем с очевидностью, что $K = \{\mathbf{r}\}$, где $\mathbf{r} \in \overline{1, \mathbf{N}}$. Далее, как уже отмечалось,

$$\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{\mathbf{r}\}) = \{\mathbf{r}\} = K.$$

Из (3.22) следует поэтому, что справедливо равенство $\omega = \min\limits_{z \in \mathbb{M}_\mathbf{r}} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{\mathbf{r}\}) + c_\mathbf{r}(z, \{\mathbf{r}\}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \varnothing)]$, где $(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}), \varnothing) \in \mathbf{M}_\mathbf{r} \times \{\varnothing\}$ при $\tilde{z} \in \mathbb{M}_\mathbf{r}$ и $\mathbf{M}_\mathbf{r} \subset \mathbf{M}$. Тогда в силу (3.17) имеем, что

$$\omega = \min_{z \in \mathbb{M}_\mathbf{r}} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{\mathbf{r}\}) + c_\mathbf{r}(z, \{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))]. \tag{3.24}$$

Рассмотрим представление $v(x, K) = v(x, \{\mathbf{r}\})$. Прежде всего заметим, что $(\mathrm{bi})[K] = (\mathrm{bi})[\{\mathbf{r}\}]$ есть одноэлементное множество, содержащее биекцию $\mathbf{a} \colon \overline{1, 1} \to \{\mathbf{r}\}$, для которой $\mathbf{a}(1) = \mathbf{r}$. При этом $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[K])$, где $(\mathrm{bi})[K] = \{\mathbf{a}\}$. Тогда $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing$ и $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \subset \{\mathbf{a}\}$, а потому $\mathbf{a} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и, более того, $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] = \{\mathbf{a}\}$. Поэтому в силу (3.12) имеем равенство

$$v(x, K) = \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \mathbf{a})} \hat{\mathfrak{C}}_\mathbf{a}[\mathbf{z} \mid K]. \tag{3.25}$$

Согласно (3.4) и определению $\mathbf{a}$ имеем, что

$$\mathcal{Z}(x, K, \mathbf{a}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x)) \& (\mathbf{z}(1) \in \mathbb{M}_{\mathbf{a}(1)})\}. \tag{3.26}$$

В то же время согласно (3.7) и (3.26) при $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \mathbf{a})$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{C}}_\mathbf{a}[\mathbf{z} \mid K] &= \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(1)), \mathbf{a}^1(\{1\}) + c_{\mathbf{a}(1)}(\mathbf{z}(1), \mathbf{a}^1(\{1\})) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(1))) \\ &= \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(1)), \{\mathbf{r}\}) + c_\mathbf{r}(\mathbf{z}(1), \{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(1))). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Из (3.26) и (3.27) получаем, что (см. (3.25))

$$v(x,K) = \min_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}(x,K,\mathbf{a})}[\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(1)),\{\mathbf{r}\}) + c_{\mathbf{a}(1)}(\mathbf{z}(1),\{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(1)))] \tag{3.28}$$
$$= \min_{z\in\mathcal{Z}^{(1)}(x,K,\mathbf{a})}[\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\{\mathbf{r}\}) + c_{\mathbf{r}}(z,\{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))],$$

где множество $\mathcal{Z}^{(1)}(x,K,\mathbf{a}) \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{z}(1)\colon \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x,K,\mathbf{a})\}$. С учетом (3.26) получаем, однако, что $\mathcal{Z}^{(1)}(x,K,\mathbf{a}) = \mathbb{M}_{\mathbf{a}(1)}$ (легкопроверяемое равенство). Поэтому (см. (3.28))

$$v(x,K) = \min_{z\in\mathbb{M}_{\mathbf{a}(1)}}[\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\{\mathbf{r}\}) + c_{\mathbf{r}}(z,\{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))].$$

С учетом (3.24) получаем, что справедливо равенство $v(x,K) = \omega$ в случае 1). Итак, истинна импликация

$$(n = 1) \Rightarrow (v(x,K) = \omega). \tag{3.29}$$

2) Рассмотрим теперь случай

$$n \in \overline{2,N}. \tag{3.30}$$

Тогда получаем (см. (3.30)) очевидное свойство

$$n - 1 \in \overline{1, N-1}. \tag{3.31}$$

При этом определены множества

$$\overline{0,n-1} = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid k \leqslant n-1\} \quad \text{и} \quad \overline{1,n-1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n-1\},$$

причем

$$\overline{0,n-1} = \{0\} \cup \overline{1,n-1}. \tag{3.32}$$

Поскольку $|K| = n \geqslant 2$, то (см. (3.1)) имеем с очевидностью, что

$$|K \setminus \{j\}| = n - 1 \ \ \forall j \in \mathbf{I}(K). \tag{3.33}$$

С учетом (3.13) выберем $(\alpha^0, \mathbf{z}^0) \in (\mathrm{sol})[x \mid K]$, получая при этом, что $(\alpha^0, \mathbf{z}^0) \in \tilde{D}_K[x]$ и, кроме того,

$$\hat{\mathfrak{C}}_{\alpha^0}[\mathbf{z}^0 \mid K] = v(x,K). \tag{3.34}$$

Из (3.10) вытекает, что справедливы свойства

$$\alpha^0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]\colon \mathbf{z}^0 \in \mathcal{Z}(x,K,\alpha^0). \tag{3.35}$$

Тогда, в частности (см. (3.2)), $\alpha^0 \in (\mathrm{bi})[K]$ и с учетом (3.22)

$$\alpha^0\colon \overline{1,n} \to K,$$

причем α^0 биективно. Кроме того, в силу (3.2)

$$\alpha^0(m) \in \mathbf{I}((\alpha^0)^1(\overline{m,n})) \ \ \forall m \in \overline{1,n}. \tag{3.36}$$

Далее, из (3.4) и (3.35) имеем с очевидностью,что $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{Z}_K$, а потому (см. (3.22))

$$\mathbf{z}^0\colon \overline{0,n} \to \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X};$$

при этом согласно (3.4) и (3.35) реализуются свойства

$$(\mathbf{z}^0(0) = (x, x))\&(\mathbf{z}^0(t) \in \mathbb{M}_{\alpha^0(t)} \quad \forall t \in \overline{1, n}). \tag{3.37}$$

По выбору α^0 и $\mathbf{z}^0$ имеем, что $(\alpha^0)^1(\overline{1,n}) = K$, а потому (см. (3.36)) $\alpha^0(1) \in \mathbf{I}(K)$. Кроме того, из (3.37) вытекает, что $\mathbf{z}^0(1) \in \mathbb{M}_{\alpha^0(1)}$. Из (3.22) получаем, как следствие, что

$$\omega \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(1)), K) + c_{\alpha^0(1)}(\mathbf{z}^0(1), K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathbb{K}), \tag{3.38}$$

где $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\alpha^0(1)\}$. Заметим, что согласно (3.33) имеем равенство

$$|\mathbb{K}| = n - 1. \tag{3.39}$$

Введем в рассмотрение следующее отображение:

$$\alpha_0 \stackrel{\triangle}{=} (\alpha^0(i+1))_{i \in \overline{1, n-1}}; \tag{3.40}$$

$\alpha_0 \colon \overline{1, n-1} \to K$ и при этом $\alpha_0(j) = \alpha^0(j+1) \quad \forall j \in \overline{1, n-1}$. Тогда по выбору α^0 (см. (3.35)) имеем из (3.40) свойство

$$\alpha_0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}]. \tag{3.41}$$

Данное свойство установлено в [20]. Итак, мы получили новый частичный маршрут. Заметим теперь, что $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)) \in \mathbf{X}$, а потому определено (см. (3.4), (3.39), (3.41)) множество

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathbb{K}, \alpha_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \mid (\mathbf{z}(0) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)))) \\ \&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(t)} \quad \forall t \in \overline{1, n-1})\}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Отметим, что $\mathbf{z}^0(t+1) \in \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$ при $t \in \overline{0, n-1}$. Из (3.37) вытекает, что $\mathbf{z}^0(t+1) \in$ $\in \mathbb{M}_{\alpha^0(t+1)} \quad \forall t \in \overline{0, n-1}$. С учетом (3.40) получаем теперь, что

$$\mathbf{z}^0(t+1) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(t)} \quad \forall t \in \overline{1, n-1}. \tag{3.43}$$

Введем в рассмотрение картеж $\mathbf{z}^\natural \colon \overline{0, n-1} \to \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$ по следующему правилу

$$(\mathbf{z}^\natural(0) \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1))))\&(\mathbf{z}^\natural(t) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{z}^0(t+1) \quad \forall t \in \overline{1, n-1}) \tag{3.44}$$

(учитываем, что $\mathbf{X} \subset \tilde{\mathbb{X}}$). Тогда согласно (3.43), (3.44) $\mathbf{z}^\natural(t) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(t)} \quad \forall t \in \overline{1, n-1}$. Заметим, что (см. (3.39), (3.42), (3.44))

$$\mathbf{z}^\natural \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathbb{K}, \alpha_0), \tag{3.45}$$

а тогда (см. (3.41), (3.45)) имеем из (3.10), что $(\alpha_0, \mathbf{z}^\natural) \in \tilde{D}_{\mathbb{K}}[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1))]$. В силу (3.12)

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathbb{K}) \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[\mathbf{z}^\natural \mid \mathbb{K}]. \tag{3.46}$$

В связи с (3.46) напомним, что $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(1)), \mathbb{K}) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$. Напомним (3.7). Тогда

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[\mathbf{z}^\natural \mid \mathbb{K}] = \sum_{t=1}^{n-1} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^\natural(t)), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1})) \\ + c_{\alpha_0(t)}(\mathbf{z}^\natural(t), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(n-1))).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Из (3.38), (3.46) вытекает, что справедливо неравенство

$$\omega \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(1)), K) + c_{\alpha^0(1)}(\mathbf{z}^0(1), K) + \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[\mathbf{z}^\natural \mid \mathbb{K}]. \tag{3.48}$$

Рассмотрим (3.47), учитывая (3.31) и (3.44). Прежде всего отметим, что $f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(n-1))) = f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\circ(n))$. Кроме того, из (3.44) вытекает, что

$$c_{\alpha_0(t)}(\mathbf{z}^\natural(t), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1})) = c_{\alpha^0(t+1)}(\mathbf{z}^\circ(t+1), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1})) \;\; \forall t \in \overline{1, n-1}. \tag{3.49}$$

Пусть $\tau \in \overline{1, n-1}$. Тогда $\tau + 1 \in \overline{2, n}$. Имеем с очевидностью (см. (3.40))

$$\begin{aligned}(\alpha_0)^1(\overline{\tau, n-1}) = \{\alpha_0(j) \colon j \in \overline{\tau, n-1}\} = \{\alpha^0(j+1) \colon j \in \overline{\tau, n-1}\} \\ = \{\alpha^0(k) \colon k \in \overline{\tau+1, n}\} = (\alpha^0)^1(\overline{\tau+1, n}),\end{aligned} \tag{3.50}$$

где учитывается то, что по выбору τ в силу (3.35) $\alpha_0(j) = \alpha^0(j+1)$ при $j \in \overline{\tau, n-1}$. Поскольку выбор τ был произвольным, установлено, что

$$(\alpha_0)^1(\overline{t, n-1}) = (\alpha^0)^1(\overline{t+1, n}) \;\; \forall t \in \overline{1, n-1}. \tag{3.51}$$

Поэтому из (3.49) вытекает свойство

$$c_{\alpha_0(t)}(\mathbf{z}^\natural(t), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1})) = c_{\alpha^0(t+1)}(\mathbf{z}^\circ(t+1), (\alpha^0)^1(\overline{t+1, n})) \;\; \forall t \in \overline{1, n-1}. \tag{3.52}$$

Пусть $\tilde{\tau} \in \overline{1, n-1}$. Рассмотрим представление значения

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau})), (\alpha_0)^1(\overline{\tilde{\tau}, n-1}))$$

При этом в силу (3.44) $\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}) = \mathbf{z}^0(\tilde{\tau}+1)$ и согласно (3.51)

$$(\alpha_0)^1(\overline{\tilde{\tau}, n-1}) = (\alpha^0)^1(\overline{\tilde{\tau}+1, n}). \tag{3.53}$$

Отметим, что $(\tilde{\tau} - 1 = 0) \vee (\tilde{\tau} - 1 \in \overline{1, n-2})$. При этом (см. (3.44)) $(\tilde{\tau} - 1 = 0) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}-1)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(\tilde{\tau})))$; кроме того, из (3.44) имеем также импликацию

$$(\tilde{\tau} - 1 \in \overline{1, n-2}) \Rightarrow (\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}-1) = \mathbf{z}^0(\tilde{\tau})).$$

В итоге во всех возможных случаях $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}-1)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(\tilde{\tau}))$. Итак, получили, что (во всех возможных случаях)

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau}-1), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^\natural(\tilde{\tau})), (\alpha_0)^1(\overline{\tilde{\tau}, n-1})) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(\tilde{\tau})), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(\tilde{\tau}+1)), (\alpha^0)^1(\overline{\tilde{\tau}+1, n})).$$

Поскольку $\tilde{\tau}$ выбиралось произвольно, установлено, что $\forall t \in \overline{1, n-1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^\natural(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^\natural(t)), (\alpha_0)^1(\overline{t, n-1})) = \\ = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(t)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(t+1)), (\alpha^0)^1(\overline{t+1, n})).\end{aligned} \tag{3.54}$$

Из (3.47), (3.51), (3.52) и (3.54) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}[\mathbf{z}^\natural \mid \mathbb{K}] = \sum_{t=1}^{n-1} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(t)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(t+1)), (\alpha^0)^1(\overline{t+1, n})) + \\ + c_{\alpha^0(t+1)}(\mathbf{z}^0(t+1), (\alpha^0)^1(\overline{t+1, n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(n))) = \\ = \sum_{t=2}^{n} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(t)), (\alpha^0)^1(\overline{t, n})) + c_{\alpha^0(t)}(\mathbf{z}^0(t), (\alpha^0)^1(\overline{t, n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(n))).\end{aligned}$$

Тогда в силу (3.37) и (3.48) получаем неравенство

$$\omega \leqslant \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(0)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(1)), (\alpha^0)^1(\overline{1,n})) + c_{\alpha^0(1)}(\mathbf{z}^0(1), (\alpha^0)^1(\overline{1,n})) +$$
$$+ \sum_{t=2}^{n} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(t)), (\alpha^0)^1(\overline{t,n})) + c_{\alpha^0(t)}(\mathbf{z}^0(t), (\alpha^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(n))) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^0(t)), (\alpha^0)^1(\overline{t,n})) + c_{\alpha^0(t)}(\mathbf{z}^0(t), (\alpha^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0(n))).$$

Из (3.7), (3.22) и последнего неравенства получаем, что $\omega \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha^0}[\mathbf{z}^0 \mid K]$, и, как следствие (см. (3.34)), имеем неравенство

$$\omega \leqslant v(x, K). \tag{3.55}$$

Вернемся к (3.22). Используя (3.22), выберем и зафиксируем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{M}_q$, для которых при

$$Q \overset{\triangle}{=} K \setminus \{q\} \tag{3.56}$$

справедливо следующее равенство

$$\omega = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q). \tag{3.57}$$

Тогда (см. (3.33), (3.56)) имеем, что справедливо равенство

$$|Q| = n - 1 \in \overline{1, N-1}. \tag{3.58}$$

Ясно, что $Q \in \mathfrak{N}$. При этом по выбору $\mathbf{u}$ имеем, что

$$(\mathrm{pr}_1(\mathbf{u}) \in \mathfrak{M}_q) \wedge (\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{M}_q). \tag{3.59}$$

Тогда в силу (2.5) и (3.59) $\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{X}$. Поэтому $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$. Тогда согласно (3.4) имеем при $\alpha \in (\mathrm{bi})[Q]$ равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q, \alpha) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_Q \mid (\mathbf{z}(0) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_2(\mathbf{u}))) \\ \&(\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1, n-1})\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_Q), \end{aligned} \tag{3.60}$$

где $\mathbb{Z}_Q$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,n-1}} \colon \overline{0, n-1} \to \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$. Кроме того, согласно (3.2) имеем, что

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q] = \{\alpha \in (\mathrm{bi})[Q] \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{m, n-1})) \ \ \forall m \in \overline{1, n-1}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[Q]). \tag{3.61}$$

Согласно (3.7) имеем при $\alpha \in (\mathrm{bi})[Q]$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q, \alpha)$, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid Q] = \sum_{t=1}^{n-1} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(\overline{t, n-1})) + \\ + c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, n-1}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(n-1))). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Из (3.10) следует в рассматриваемом случае, что

$$\begin{aligned} \tilde{D}_Q[\mathrm{pr}_2(\mathbf{u})] = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q] \times \mathbb{Z}_Q \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q, \alpha)\} \\ \in \mathrm{Fin}((\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q] \times \mathbb{Z}_Q). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Согласно (3.12) имеем следующее равенство

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q) = \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{D}_Q[\mathrm{pr}_2(\mathbf{u})]} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z} \mid Q].$$

С учетом этого выберем $(\beta_0, w) \in \tilde{D}_Q[\mathrm{pr}_2(\mathbf{u})]$ со свойством

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q) = \hat{\mathfrak{C}}_{\beta_0}[w \mid Q]. \tag{3.64}$$

Тогда в силу (3.63) имеем, что

$$\beta_0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q] \tag{3.65}$$

и, кроме того, справедливо свойство

$$w \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q, \beta_0). \tag{3.66}$$

Из (3.61) и (3.65) следует, что $\beta_0 \in (\mathrm{bi})[Q]$ и при этом

$$\beta_0(m) \in \mathbf{I}((\beta_0)^1(\overline{m, n-1})) \ \ \forall m \in \overline{1, n-1}. \tag{3.67}$$

С учетом (3.58) получаем, что

$$\beta_0 \colon \overline{1, n-1} \to Q$$

таково, что справедливы свойства

$$(Q = (\beta_0)^1(\overline{1, n-1}))\&(\forall i_1 \in \overline{1, n-1} \ \ \forall i_2 \in \overline{1, n-1} \ \ (\beta_0(i_1) = \beta_0(i_2)) \Rightarrow (i_1 = i_2)). \tag{3.68}$$

Далее, из (3.60) и (3.66) вытекает, что $w \in \mathbb{Z}_Q$, то есть

$$w \colon \overline{0, n-1} \to \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}.$$

При этом согласно (3.60) и (3.66) имеем также, что

$$(w(0) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_2(\mathbf{u})))\&(w(t) \in \mathbb{M}_{\beta_0(t)} \ \ \forall t \in \overline{1, n-1}). \tag{3.69}$$

Заметим, что $t - 1 \in \overline{1, n-1}$ при $t \in \overline{2, n}$. Поэтому определены значения

$$\beta_0(t-1) \in Q \ \ \forall t \in \overline{2, n}.$$

Из (3.56) получаем, как следствие, что $\beta_0(t-1) \in K \ \ \forall t \in \overline{2, n}$. С учетом этого введем в рассмотрение отображение

$$\beta^0 \colon \overline{1, n} \to K$$

посредством следующего правила:

$$(\beta^0(1) \triangleq q)\&(\beta^0(t) \triangleq \beta_0(t-1) \ \ \forall t \in \overline{2, n}). \tag{3.70}$$

Тогда, как нетрудно проверить, имеет место

$$\beta^0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \tag{3.71}$$

(в связи с проверкой (3.71) отметим подробное рассуждение в [6, с. 67-69]; имеется в виду обоснование свойства [6, (3.2.88)]). Отметим теперь, что согласно (3.69) при $t \in \overline{2, n}$ имеет место $t-1 \in \overline{1, n-1}$, а потому (см. (3.70)) $w(t-1) \in \mathbb{M}_{\beta^0(t)}$. Введем в рассмотрение вспомогательный кортеж

$$\tilde{w} \colon \overline{1, n} \to \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X},$$

определяемый по следующему правилу

$$(\tilde{w}(1) \triangleq \mathbf{u}) \& (\tilde{w}(t) \triangleq w(t-1) \ \ \forall t \in \overline{2, n}). \tag{3.72}$$

Заметим, что по выбору $\mathbf{u}$ имеем в силу (3.70), что $\tilde{w}(1) \in \mathbb{M}_{\beta^0(1)}$; кроме того, согласно (3.69) и (3.70) имеем при $t \in \overline{2, n}$ свойство $\tilde{w}(t) = w(t-1) \in \mathbb{M}_{\beta^0(t)}$. Следовательно, у нас

$$\tilde{w}(t) \in \mathbb{M}_{\beta^0(t)} \ \ \forall t \in \overline{1, n}. \tag{3.73}$$

С учетом (3.73) дополним кортеж $\tilde{w}$ начальной УП (x, x). Итак, введем кортеж $\hat{w} \in \mathbb{Z}_K$, полагая (см. (3.22)), что

$$(\hat{w}(0) \triangleq (x, x)) \& (\hat{w}(t) \triangleq \tilde{w}(t) \ \ \forall t \in \overline{1, n}).$$

Из (3.4), (3.22) и (3.73) вытекает следующее очевидное свойство

$$\hat{w} \in \mathscr{Z}(x, K, \beta^0), \tag{3.74}$$

а тогда (см. (3.10), (3.71)) получаем включение

$$(\beta^0, \hat{w}) \in \tilde{\mathbf{D}}_K[x].$$

Тогда в силу (3.12) реализуется следующее неравенство:

$$v(x, K) \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_{\beta^0}[\hat{w} \mid K]. \tag{3.75}$$

С учетом (3.7) и (3.22) имеем (см. (3.71), (3.74)), что

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{C}}_{\beta^0}[\hat{w} \mid K] = \sum_{t=1}^{n} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t, n})) + \\ + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t, n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(n))).\end{aligned}$$

Поэтому с учетом (3.75) получаем неравенство

$$\begin{aligned}v(x, K) \leqslant \sum_{t=1}^{n} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t, n})) + \\ + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t, n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(n))).\end{aligned} \tag{3.76}$$

Отметим, что в силу биективности β^0 (см. (3.71)) справедливо равенство

$$(\beta^0)^1(\overline{1, n}) = K. \tag{3.77}$$

При этом по построению $\hat{w}$ имеем, что $\mathrm{pr}_2(\hat{w}(0)) = x$ и $\mathrm{pr}_1(\hat{w}(1)) = \mathrm{pr}_1(\tilde{w}(1))$; с учетом (3.72) и (3.77) получаем теперь, что

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(0)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(1)), (\beta^0)^1(\overline{1, n})) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\tilde{w}(1)), K) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K),$$

а тогда в силу (3.76) реализуется неравенство

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_{\beta^0(1)}(\hat{w}(1), (\beta^0)^1(\overline{1,n})) + \sum_{t=2}^{n}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \\ \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(n))). \tag{3.78}$$

Заметим, что согласно (3.70), (3.77) имеем по построению $\hat{w}$, что

$$c_{\beta^0(1)}(\hat{w}(1), (\beta^0)^1(\overline{1,n}) = c_q(\hat{w}(1), K).$$

Поэтому из (3.78) вытекает неравенство

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\hat{w}(1), K) + \sum_{t=2}^{n}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) + \\ + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(n))).$$

Учитывая (3.72) и то, что $n \in \overline{1,n}$, получаем теперь, что

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + \sum_{t=2}^{n}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) + \\ + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(\tilde{w}(n))).$$

Но в нашем случае $n \in \overline{2,n}$ (см. (3.30)), а потому (см. (3.72)) $\tilde{w}(n) = w(n-1)$ и, следовательно,

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + \sum_{t=2}^{n}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) + \\ + c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t,n}))] + f(\mathrm{pr}_2(w(n-1))). \tag{3.79}$$

Заметим, что при $t \in \overline{2,n}$ имеем $\overline{t,n} \subset \overline{2,n}$, а потому согласно (3.70)

$$(\beta^0)^1(\overline{t,n})) = \{\beta^0(\tau) \colon \tau \in \overline{t,n}\} = \{\beta_0(\tau-1) \colon \tau \in \overline{t,n}\} = \\ = \{\beta_0(\xi) \colon \xi \in \overline{t-1, n-1}\} = (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1}). \tag{3.80}$$

Далее по построению $\tilde{w}$ имеем, что (см. (3.72))

$$(\hat{w}(1) = \tilde{w}(1) = \mathbf{u}) \,\&\, (\hat{w}(2) = \tilde{w}(2) = w(1)).$$

Поэтому имеем следующее равенство

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(2)), (\beta^0)^1(\overline{2,n})) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_1(w(1)), (\beta_0)^1(\overline{1,n-1})),$$

где учтено также (3.80). Вместе с тем, используя (3.69) получаем теперь, что

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(2)), (\beta^0)^1(\overline{2,n})) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(0)), \mathrm{pr}_1(w(1)), (\beta_0)^1(\overline{1,n-1})). \tag{3.81}$$

С другой стороны, при $t \in \overline{2,n} \setminus \{2\}$ имеем, что $t \in \overline{3,n}$, а потому (см. определение $\hat{w}$)

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\tilde{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\tilde{w}(t)), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})) = \\ = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(t-2)), \mathrm{pr}_1(w(t-1)), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})).$$

С учетом (3.81) получаем теперь, что

$$\begin{gathered}\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{w}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\hat{w}(t)), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) = \\ = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(t-2)), \mathrm{pr}_1(w(t-1)), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})) \ \ \forall t \in \overline{2,n}.\end{gathered} \tag{3.82}$$

Заметим теперь, что при $t \in \overline{2,n}$ согласно (3.70), (3.72) и определению $\hat{w}$

$$\begin{gathered}c_{\beta^0(t)}(\hat{w}(t), (\beta^0)^1(\overline{t,n})) = c_{\beta_0(t-1)}(\tilde{w}(t), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})) = \\ = c_{\beta_0(t-1)}(w(t-1), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})).\end{gathered}$$

С учетом (3.79) и (3.82) получаем теперь, что

$$\begin{gathered}v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + \sum_{t=2}^{n}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(t-2)), \mathrm{pr}_1(w(t-1)), \\ (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1})) + c_{\beta_0(t-1)}(w(t-1), (\beta_0)^1(\overline{t-1,n-1}))] + f(\mathrm{pr}_2(w(n-1))) = \\ = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + \sum_{\tau=1}^{n-1}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(\tau-1)), \mathrm{pr}_1(w(\tau)), (\beta_0)^1(\overline{\tau,n-1})) + \\ + c_{\beta_0(\tau)}(w(\tau), (\beta_0)^1(\overline{\tau,n-1}))] + f(\mathrm{pr}_2(w(n-1))).\end{gathered} \tag{3.83}$$

Вместе с тем согласно (3.62), (3.65) и (3.66) имеем равенство

$$\begin{gathered}\hat{\mathfrak{C}}_{\beta_0}[w \mid Q] = \sum_{\tau=1}^{n-1}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(\tau-1)), \mathrm{pr}_1(w(\tau)), (\beta_0)^1(\overline{\tau,n-1})) + \\ + c_{\beta_0(\tau)}(w(\tau), (\beta_0)^1(\overline{\tau,n-1}))] + f(\mathrm{pr}_2(w(n-1))).\end{gathered}$$

Тогда из (3.83) вытекает следующее неравенство:

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + \hat{\mathfrak{C}}_{\beta_0}[w \mid Q].$$

В силу (3.64) получаем неравенство

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q).$$

С учетом (3.57) получаем следующее неравенство

$$v(x,K) \leqslant \omega,$$

откуда в силу (3.55) имеем, что $v(x,K) = \omega$ и при условии (3.30). Итак, установлена импликация

$$(n \in \overline{2,N}) \Rightarrow (v(x,K) = \omega). \tag{3.84}$$

Тогда согласно (3.23), (3.29) и (3.84) имеем во всех возможных случаях равенство $v(x,K) = \omega$, а потому (см. (3.22)) получаем требуемое равенство (3.21). □

С учетом (3.15) и теоремы 3.1 получаем, что

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j}[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})] \ \ \forall x \in X^0. \tag{3.85}$$

§ 4. Динамическое программирование, 2

В этом параграфе конструируется оптимальный алгоритм на базе ДП. Основная идея состоит в том, чтобы при наличии условий предшествования подменить построение всего массива значений функции Беллмана построением системы некоторых ее слоев, которые получаются насчитыванием ее значений на некоторых специальных п/м области определения (данной функции). Эти п/м будем называть слоями пространства позиций. Упомянутая процедура восходит к [6, § 4.9]. Ее расмотрение начинаем с введения существенных (для дальнейшего) списков заданий. Итак, следуя [6, (4.9.1)] полагаем, что

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}; \tag{4.1}$$

множества — элементы семейства (4.1) — называем существенными списками (заданий); см. также [19, (6.1)]. Данные списки ранжируем по мощности, полагая, что

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{4.2}$$

Семейства (4.2) составляют разбиение $\mathcal{G}$ (4.1). Легко видеть, что

$$(\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\})\&(\mathcal{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbf{K}\}$. Кроме того (см. [21]),

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2,N}. \tag{4.4}$$

Посредством (4.3), (4.4) определена рекурентная процедура

$$\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1. \tag{4.5}$$

Перейдем к построению слоев пространства позиций. Пусть (см. [3, (3.4.18)])

$$\tilde{\mathbf{M}} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{M}). \tag{4.6}$$

Введем в рассмотрение множества $D_0, D_1, \ldots, D_N$ в пространстве позиций; эти множества именуем слоями пространства позиций. Проще всего определяются D_0 и D_N — крайние слои:

$$(D_0 \triangleq \{(x, \varnothing)\colon x \in \tilde{\mathbf{M}}\})\&(D_N \triangleq \{(x, \overline{1,N})\colon x \in X^0\}). \tag{4.7}$$

Если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то последовательно определяем

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\},$$

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s[K]} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K)\colon x \in \mathcal{M}_s[K]\}.$$

Тогда при $s \in \overline{1,N-1}$ слой D_s определяем правилом

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K]. \tag{4.8}$$

Данное построение слоев $D_0, D_1, \ldots, D_N$ соответствует [22, раздел 2.9]. Все упомянутые слои — суть непустые множества (см. [22, (2.73)]). При этом $D_0 \subset \mathbf{M} \times \{\varnothing\}$, $D_N = X^0 \times \times \{\overline{1,N}\}$ и $D_s \subset \mathbf{M} \times \mathcal{G}_s$ при $s \in \overline{1, N-1}$. Отметим важное свойство [22, (2.74)]: если $s \in \overline{1,N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbf{M}_j$, то

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{4.9}$$

Слои функции Беллмана: построение и анализ. Рассмотрим сначала алгоритм построения функций

$$v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0], \quad v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \quad \ldots, \quad v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]. \tag{4.10}$$

Затем будет показано, что построенные функции являются сужениями функции Беллмана (3.18). Наконец, совсем кратко обсудим вариант построения только одной функции v_N.

Итак, возвращаясь к (4.10), полагаем, что функция $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется правилом

$$v_0(x, \varnothing) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathbf{M}} \tag{4.11}$$

(учитываем (4.7)). Дальнейшее построение осуществляется посредством рекуррентной процедуры, использующей (4.9).

Итак, пусть $s \in \overline{1,N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена. Тогда согласно (4.9) определены значения

$$v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall (x, K) \in D_s \ \ \forall j \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall z \in \mathbb{M}_j.$$

С учетом этого при $s \in \overline{1,N}$ полагаем, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяется правилом

$$v_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{4.12}$$

Таким образом (см. (4.11), (4.12)) реализуется рекуррентная процедура

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N. \tag{4.13}$$

В связи с (4.13) отметим, что при $s \in \overline{0,N}$ и $(x, K) \in D_s$ определено согласно (3.18) значение $v(x, K) \in \mathbb{R}_+$.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если $s \in \overline{0,N}$ и $(x, K) \in D_s$, то $v_s(x, K) = v(x, K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.17), (4.7) и (4.11) следует, что $v_0(x, K) = v(x, K) \ \forall (x, K) \in \in D_0$. Пусть теперь

$$\bar{\mathfrak{N}} \stackrel{\triangle}{=} \{s \in \overline{0,N} \mid v_s(x, K) = v(x, K) \ \ \forall (x, K) \in D_s\}. \tag{4.14}$$

Тогда $0 \in \bar{\mathfrak{N}}$. Покажем, что $\bar{\mathfrak{N}} = \overline{0,N}$. В самом деле, допустим противное: пусть $\bar{\mathfrak{N}} \neq \overline{0,N}$. Тогда в силу (4.14) $\overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}} \neq \varnothing$. В силу конечности множества $\overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}$ имеем, что

$$n \stackrel{\triangle}{=} \inf(\overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}) \in \overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}. \tag{4.15}$$

Тогда $n \in \overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}$ и при этом $n \leqslant k \ \ \forall k \in \overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}$. Поскольку $0 \in \bar{\mathfrak{N}}$, то $n \neq 0$. Это означает, что $n \in \overline{1,N}$. Далее, $n - 1 \notin \overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}$ по выбору n. Следовательно,

$$n - 1 \in \overline{0,N} \setminus (\overline{0,N} \setminus \bar{\mathfrak{N}}),$$

то есть $n-1 \in \bar{\mathfrak{N}}$. Поэтому $n-1 \in \overline{0,N}$ и согласно (4.14)

$$v_{n-1}(x,K) = v(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_{n-1}. \tag{4.16}$$

При этом (см. (4.9)) $\forall (x,K) \in D_n \ \forall j \in \mathbf{I}(K) \ \forall z \in \mathbb{M}_j$

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{n-1}. \tag{4.17}$$

Поэтому согласно (4.16), (4.17) имеем, что

$$v_{n-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) = v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \ \ \forall (x,K) \in D_n \ \forall j \in \mathbf{I}(K) \ \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{4.18}$$

При этом согласно (4.12) и (4.18) получаем представление

$$\begin{aligned} v_n(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + \\ + v_{n-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + \\ + c_j(z,K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \ \forall (x,K) \in D_n. \end{aligned} \tag{4.19}$$

При этом $D_n \subset \mathbf{X} \times \mathcal{G}_n \subset \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$. Поэтому согласно теореме 3.1

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] = v(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_n.$$

С учетом (4.19) получаем, что $v_n(x,K) = v(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_n$. В силу (4.14) получаем, что $n \in \bar{\mathfrak{N}}$, что противоречит выбору n. Полученное противоречие показывает, что свойство $\bar{\mathfrak{N}} \neq \overline{0,N}$ невозможно и, следовательно, $\bar{\mathfrak{N}} = \overline{0,N}$. Поэтому (см. (4.14)) $v_s(x,K) = v(x,K) \ \ \forall s \in \overline{0,N} \ \ \forall (x,K) \in D_s$. Предложение доказано. □

Итак, при $s \in \overline{0,N}$ функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ есть сужение функции v на множество D_s. В частности,

$$v_N(x,K) = v(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_N. \tag{4.20}$$

Из (3.15) и (4.20) вытекает следующее свойство:

$$V[x] = v_N(x, \overline{1,N}) \ \ \forall x \in X^0. \tag{4.21}$$

С учетом (4.7), (4.12) и (4.21) получаем, что

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})] \tag{4.22}$$
$$\forall x \in X^0;$$

при этом, конечно, в силу (4.7) и (4.9) при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1} \tag{4.23}$$

(здесь полезно учитывать свойство $X^0 \neq \varnothing$). Итак, рекуррентная процедура (4.13) приводит, в частности, к функции

$$V[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} (V[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0], \tag{4.24}$$

что позволяет достаточно просто решить задачу (2.20) и определить глобальный экстремум $\mathbb{V}$ (2.18) и множество X^0_{opt} (2.21). В этой связи, однако, полезно следующее замечание.

З а м е ч а н и е 2. Отметим естественную аналогию с конструкцией [23], применяемой для решения другой задачи. Для этого заметим, что согласно (4.12) для построения функции v_s, где $s \in \overline{1,N}$, требуется (помимо $\mathbf{c}$ и $c_1, \ldots, c_N$) только функция v_{s-1}, то есть предыдущий слой функции Беллмана. В этой связи возникает следующий алгоритм решения задачи (2.20).

Итак, используя (4.11), определяем функцию $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$. Пусть $s \in \overline{1,N}$ таково, что функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена. Тогда определяем функцию $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу (4.12). Если при этом $s = N$, то построение v_N завершено. Если же $s < N$, то массив значений функции v_{s-1} уничтожается и заменяется массивом значений построенной функции v_s, который используется для построения v_{s+1} по правилу

$$v_{s+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_s(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \ \forall (x, K) \in D_{s+1},$$

после чего данный массив (значений функции v_s) уничтожается. Как видно из построения, в памяти вычислителя при данном варианте находится всякий раз только один слой функции Беллмана, что доставляет определенную экономию ресурсов памяти (см. в этой связи [24]).

Результатом данной процедуры является уже функция v_N (а не кортеж $v_0, v_1, \ldots, v_N$), что, однако, вполне достаточно для определения функции $V[\cdot]$ (4.24) и последующего решения задачи (2.20), включая определение $\mathbb{V}$ и построения множества (2.21). $\square$

Вернемся к основной задаче (2.17), предполагая завершенной процедуру (4.13) с нахождением всех функций $v_0, v_1, \ldots, v_N$. Рассмотрим схему построения решения из множества $\mathbf{SOL}$, то есть схему построения оптимального решения полной задачи (2.17).

Прежде всего мы решаем задачу (2.20), располагая функцией v_N (см. (4.21)). Итак, (2.20) сводится к задаче

$$v_N(x, \overline{1,N}) \to \min, \quad x \in X^0. \tag{4.25}$$

Поскольку функция v_N известна, определяем $\mathbb{V}$ и (оптимальную) точку старта $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$:

$$v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{x \in X^0} v_N(x, \overline{1,N}) = \mathbb{V}. \tag{4.26}$$

Итак, задача (4.25) доставляет решение задачи (2.20) и мы фиксируем, наряду с $\mathbb{V}$, точку $x^0 \in X^0$ со свойством (4.26) (это и означает, что $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$). Мы полагаем, что

$$\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0). \tag{4.27}$$

В силу (4.22), (4.26) имеем следующую цепочку равенств

$$\mathbb{V} = V[x^0] = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})].$$

С учетом этого находим $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$, для которых

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) \tag{4.28}$$

(решаем задачу на минимум); при этом согласно (4.23)

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}.$$

Поэтому согласно (4.12) имеем равенство

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; j\})].$$

С учетом этого определяем (из решения задачи на минимум) $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$ со свойством

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{4.29}$$

Теперь из (4.28) и (4.29) получаем следующее равенство

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) = \\ = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{4.30}$$

З а м е ч а н и е 3. При $N = 2$ имеем свойство

$$((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\mathbf{z}^{(i)}_{i \in \overline{0,2}}) \in (\mathrm{SOL})[x^0].$$

Проверим данное простое следствие (4.30). Прежде всего, по выбору η_2 имеем (см. (3.1)), что $\eta_1 \neq \eta_2$, а тогда в силу цепочки равенств $\overline{1,N} = \overline{1,2} = \{1; 2\}$ имеем, что $\{\eta_1; \eta_2\} = \overline{1,2} = \overline{1,N}$, а $(\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}$ есть перестановка $\overline{1,N} = \overline{1,2}$, то есть $(\eta_i)_{i \in \overline{1,2}} \in (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Далее, отметим, что $\eta_1 \in \mathbf{I}(\{\eta_i \colon i \in \overline{1,2}\})$ и $\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\} = \overline{1,2} \setminus \{\eta_1\} = \{\eta_2\}$, а потому $\eta_2 \in \mathbf{I}(\{\eta_2\})$. Поэтому в нашем случае $\eta_m \in \mathbf{I}(\{\eta_i \colon i \in \overline{m,N}\})\ \ \forall m \in \overline{1,N}$. Тогда согласно (3.2) $(\eta_i)_{i \in \overline{1,2}} \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, а потому (см. (3.3)) $(\eta_i)_{i \in \overline{1,2}} \in \mathbf{A}$. Далее, $\mathbf{z}^{(0)} = (x^0, x^0) \in X^0 \times X^0$, $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$, а потому согласно (2.9) $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,2}} \in \mathcal{Z}_{(\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}}[x^0]$. В итоге (см. (2.10))

$$((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,2}}) \in \tilde{D}[x^0].$$

Вернемся к (4.30) (при $N = 2$). При этом $\overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\} = \varnothing$, а тогда

$$v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) = v_0(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \varnothing) = f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)})).$$

Поэтому в нашем случае из (4.30) следует, что

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)})) = \\ = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \{\eta_i \colon i \in \overline{1,N}\}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \{\eta_2\}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \{\eta_i \colon i \in \overline{1,N}\}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \{\eta_2\}) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)})).$$

С учетом (2.13) получаем (при $N = 2$) равенство $\mathbb{V} = \mathfrak{C}_{(\eta_i)_{i \in \overline{1,N}}}[(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}]$. В силу (2.19) это означает, что

$$((\eta_i)_{i \in \overline{1,N}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}, x^0) = ((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,2}}, x^0) \in \mathbf{SOL},$$

где учитывается, конечно, равенство (2.11). Итак, в нашем простейшем случае $N = 2$ построения (4.28), (4.29) непосредственно приводят к оптимальному решению. $\square$

Отметим, что в общем случае N, $N \geqslant 2$, процедуры решения локальных задач, подобные (4.28), (4.29), следует продолжать вплоть до исчерпывания полного списка $\overline{1,N}$. В результате будут построены

$$\eta = (\eta_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}, (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta[x^0]$$

со свойством $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V} = V[x^0]$. Тогда

$$(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}) \in (\mathrm{SOL})[x^0]. \tag{4.31}$$

При этом, в частности, $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}) \in \tilde{D}[x^0]$ согласно (2.10), а потому $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}, x^0) \in$ $\in \mathbf{D}$. Более того, поскольку $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}$, имеем из (2.19), что (см. (4.31))

$$(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}. \tag{4.32}$$

Итак, определены глобальный экстремум $\mathbb{V}$ и оптимальное решение (4.32) нашей основной (полной) задачи.

§ 5. К вопросу о планировании системы работ в условиях повышенной радиации

В этом параграфе на содержательном уровне обсудим одну особенность задачи о последовательном демонтаже системы радиационно опасных элементов. Это обсуждение позволяет и несколько дополнить весьма общие построения предыдущего параграфа. Речь идет о том, что в условиях упомянутой конкретной задачи демонтажа исполнитель по достижении некоторого уровня $\mathbf{d}$ суммарной радиации должен сниматься с выполнения работ и выводиться из зоны повышенной радиации. В этой связи существенным является соотношение $\mathbb{V}$ и $\mathbf{d}$. Если $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$, то ранее упомянутая система работ по демонтажу может быть завершена при использовании оптимального ДР (4.32). В случае, когда $\mathbf{d} < \mathbb{V}$, осуществить все намеченные работы не предоставляется возможным, так как их проведение в любом случае (то есть при использовании любых ДР) будет сопряжено с недопустимо высокой дозовой нагрузкой. В этой связи представляется важным уже на этапе постановки осуществление прогноза в вопросе соотношения значений $\mathbb{V}$ и $\mathbf{d}$. Представляется, что построения предыдущего раздела и на этом этапе могут быть полезны; в частности, здесь представляется полезным вариант процедуры, отмеченный в замечании 2.

Будем предполагать, что после завершения всех работ, связанных с посещением мегаполисов, или по достижении дозы радиации, определяемой значением $\mathbf{d}$, исполнитель перемещается в заданный пункт эвакуации $x^* \in X$. В случае демонтажа всех источников в процессе этого перемещения он уже не испытывает ощутимого радиационного воздействия; имеется лишь некоторый остаточный фон, которым на данном этапе рассмотрения будем пренебрегать. Если же $\mathbf{d} < \mathbb{V}$, то есть исполнитель не может выполнить всех работ в рамках предъявляемых требований безопасности, то следует сократить число мегаполисов, подлежащих обслуживанию, выбирая из N мегполисов первоначальной задачи некоторое меньшее их число N_1, $N_1 < N$. В этом случае решая по методу ДП задачу о демонтаже N_1 источников мы сталкиваемся с той ситуацией, что после выполнения работ по демонтажу этих N_1 источников при перемещении к пункту эвакуации x^* исполнитель будет находиться под ощутимым радиационным воздействием тех источников, которые соответствуют мегаполисам, исключенным из списка заданий в связи с неравенством $\mathbf{d} < \mathbb{V}$. Это повлечет изменение терминальной компоненты f нашего аддитивного критерия: «нулевая функция» для случая выполнения всех работ по демонтажу N мегаполисов должна быть заменена функцией, оценивающей дозу, получаемую исполнителем на этапе эвакуации. Новое значение глобального экстремума $\mathbb{V}_1$ с ненулевой терминальной функцией не должно превосходить $\mathbf{d}$. Это условие должно, конечно, обеспечиваться рациональным выбором N_1 мегаполисов.

Приведенные выше рассуждения показывают, насколько важна задача (2.20) на этапе планирования работ: к построению решения задачи (2.17) следует (по большому счету) приступать лишь тогда, когда удается обеспечить неравенство $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$, а это можно проверить, используя только процедуру отмеченную в замечании 2 и реализуемую с некоторой экономией ресурсов памяти вычислителя. Итак, данная процедура может быть весьма полезной на этапе планирования работ и, в частности, для целей отбраковки недопустимых (по степени радиационного воздействия на работников) вариантов набора заданий.

§ 6. Некоторые особенности системы целевых функций в задаче о демонтаже

Отметим, что конструкция решения задачи маршрутизации на основе ДП, изложенная в §§ 2–4, является весьма общей и применимой для самых различных инженерных задач. В частности, это отражено в [1,2,25], где рассматривалось применение данной конструкции для решения задачи управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Возможны и другие применения упомянутой схемы решения на основе ДП.

В предыдущем параграфе, однако, было обращено внимание на одну особенность, присущую именно задаче о последовательном демонтаже радиационно опасных элементов. Сейчас мы продолжаем детализацию общих построений, ориентируясь на последнюю задачу. В дальнейшем полагаем, что X есть конечномерное арифметическое пространство фиксированной размерности (два или три), выпуклые оболочки мегаполисов $M_1, \ldots, M_N$ попарно дизъюктны, и при каждом $j \in \overline{1,N}$ источник с номером j есть точка из выпуклой оболочки M_j. В этой связи напомним прежде всего (2.12), учитывая, что в данной конкретизации общих положений значения функций $\mathbf{c}$, $c_1, \ldots, c_N$, f имеют смысл доз радиации, получаемых исполнителем при выполнении операций по демонтажу. Отметим, что в части, определяющей зависимость от списка заданий (то есть множества семейства $\mathfrak{N}$), имеет место следующее свойство аддитивности:

$$(\mathbf{c}(x,y,K) = \sum_{k \in K} \mathbf{c}(x,y,\{k\}) \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall y \in \mathbb{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N}) \tag{6.1}$$
$$\&(c_j(z,K) = \sum_{k \in K} c_j(z,\{k\}) \ \ \forall j \in \overline{1,N} \ \ \forall z \in \mathbb{M}_j \ \ \forall K \in \mathfrak{N}).$$

Иными словами, первые $N+1$ функции в (2.12) полностью определяются той «частью» этих функций, которая отвечает воздействию одиночных источников. Следовательно, в данной задаче определяющими являются функции

$$(x,y,k) \to \mathbf{c}(x,y,\{k\})\colon \mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \overline{1,N} \to \mathbb{R}_+, \tag{6.2}$$

$$(z,k) \mapsto c_1(z,\{k\})\colon \mathbb{M}_1 \times \overline{1,N} \to \mathbb{R}_+, \quad \ldots, \quad (z,k) \mapsto c_N(z,\{k\})\colon \mathbb{M}_N \times \overline{1,N} \to \mathbb{R}_+. \tag{6.3}$$

Итак (см. (6.2), (6.3)), определяющими являются функции, характеризующие всякий раз радиационное воздействие того или иного одиночного источника (реализуется естественный вариант декомпозиции). Заметим, что подробный анализ таких функций, включая их построения, был проведен в [26], куда мы и отсылаем за подробностями. Сейчас же отметим на содержательном уровне некоторые особенности функций (6.3) в сравнении с (6.2). Функция (6.2) оценивает внешние перемещения без выполнения каких-либо работ; ее значения при фиксации $k \in \overline{1,N}$ получаются интегрированием нелинейной зависимости (имеется в виду обратная пропорциональность квадрату расстояния до источника с номером k) при перемещении с достаточно большой скоростью; имеются некоторые особенности типа прохождения через источник, которые учитываются введением соответствующих штрафов.

При $j \in \overline{1,N}$ значения функции

$$(z,k) \mapsto c_j(z,\{k\})\colon \mathbb{M}_j \times \overline{1,N} \to \mathbb{R}_+ \tag{6.4}$$

имеют более сложную структуру. При $k \in \overline{1,N} \setminus \{j\}$ и $z = (x, y) \in \mathbb{M}_j$ значение $c_j(z, \{k\})$ реализуется в виде суммы трех слагаемых, отвечающих «далекому» воздействию источника с номером k на исполнителя, выполняющего работы, связанные с посещением M_j. Речь идет о дозе радиации, получаемой при перемещении из $x \in \mathfrak{M}_j$ к точке вблизи источника с номером j, дозе, получаемой при выполнении собственно демонтажа без каких-либо существенных перемещений, и, наконец, о дозе, получаемой в результате воздействия источника с номером k при перемещении исполнителя от демонтированного j-го источника к точке y. Если же $k = j$, то $c_j(z, \{k\}) = c_j(z, \{j\})$ реализуется в виде суммы дозы, получаемой при перемещении от x к точке вблизи источника («близкое» воздействие) и дозы, получаемой при осуществлении демонтажа самого источника с номером j. В рассматриваемой ниже модели предполагается, что скорость перемещений при выполнении внутренних работ существенно меньше скорости внешних перемещений.

Терминальная компонента критерия f в простейшем случае может полагаться тождественно равной нулю. Это соответствует случаю, когда $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$, и все задания по демонтажу могут быть выполнены (см. § 5). Если же это не так, то после выполнения части работ по демонтажу остаются излучающие элементы. Будем сейчас для простоты считать, что эта часть работ исчерпывается нашими мегаполисами $M_1, \ldots, M_N$ (в противном случае следует сделать необходимые переобозначения). Вместе с тем остаются источники (их влияние, конечно, должно учитываться и при построении $\mathbf{c}$, $c_1, \ldots, c_N$ так же, как и влияние источников, связанных с $M_1, \ldots, M_N$), которые продолжают оказывать воздействие на исполнителя при его движении к пункту эвакуации. Это воздействие оценивается функцией f, построение которой подобно в идейном отношении построению $\mathbf{c}$; имеется в виду определение конкретной дозы радиации при перемещении от последнего из обслуживаемых мегаполисов к пункту эвакуации.

Заметим, что в последнем случае мы фактически рассматриваем задачу с большим количеством радиационно опасных источников, часть из которых, допускающую обслуживание с непревышением дозы $\mathbf{d}$, мы выделяем для демонтажа, но в построении функций (2.12) учитываем при этом влияние уже всех радиационно опасных объектов. С этой постановкой связана, конечно, следующая проблема: какие именно источники из имеющейся полной совокупности следует выбрать для осуществления демонтажа? Решение этого вопроса можно связать с построениями по схеме замечания 2, выполняемыми для различных вариантов заданий по демонтажу. В последующих построениях мы данную детализацию f не рассматриваем, ориентируясь в примерах на вариант, связанный с выполнением всех заданий, то есть по сути на ситуацию $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$.

Вернемся к (6.1)–(6.4), используя построения [5, раздел 3]. Совсем кратко обсудим первое выражение в (6.1). Точнее, при $k \in \overline{1,N}$ полагаем, что $\mathbf{c}^{(k)} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X}]$ определяется следующими условиями: при $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbb{X}$

$$\mathbf{c}^{(k)}(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}(x, y, \{k\}). \tag{6.5}$$

Итак, в (6.5) мы рассматриваем дозу, создаваемую (одним) источником с номером k при перемещении исполнителя из x в y. Конкретное значение (6.5) вычисляется по формулам, приведенным в [26, раздел 6] (отметим, что в [26] исследовался вопрос о построении оптимизирующих вставок в эвристические решения, но представления [26, раздел 6] касаются нахождения значений (6.5) с выделением регулярного и аномального случаев). Итак (см. (6.1), (6.5)), при $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbb{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{c}(x, y, K) = \sum_{k \in K} \mathbf{c}^{(k)}(x, y). \tag{6.6}$$

Функции стоимости внутренних работ.

Рассмотрим построение функции c_j, фиксируя для сокращения формулировок $j \in \overline{1,N}$. Мы исходим при этом из второго соотношения в (6.1). В этой связи полагаем, что при $k \in \overline{1,N}$ и $j \in \overline{1,N}$

$$(\bar{c}_{j,1}^{(k)} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{M}_j])\&(\bar{c}_{j,2}^{(k)} \in \mathbb{R}_+)\&(\bar{c}_{j,3}^{(k)} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_j]) \tag{6.7}$$

таковы, что реализуется представление

$$c_j(z, \{k\}) = \bar{c}_{j,1}^{(k)}(\mathrm{pr}_1(z)) + \bar{c}_{j,2}^{(k)} + \bar{c}_{j,3}^{(k)}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{6.8}$$

Кроме того, полагаем, что при $k \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$ и $x \in \mathfrak{M}_j$ значение $\bar{c}_{j,1}^{(k)}(x)$ есть доза радиации, определяемая действием источника с номером k на исполнителя при перемещении последнего из пункта x в точку (демонтажа), близкую к источнику с номером j. Эту последнюю точку фиксируем на сегменте прямой, проходящей через x и j-й источник и отстоящую от последнего на заданном малом расстоянии, зависящим от j. Конкретные значения $\bar{c}_{j,1}^{(k)}$ определяются по аналогии со значениями функций $\mathbf{c}^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}^{(N)}$ посредством представлений [26, раздел 6] (см. регулярный случай внешнего перемещения в [26, с. 99]).

Далее, при $k \in \overline{1,N}$ и $j \in \overline{1,N}$ константа $\bar{c}_{j,2}^{(k)}$ имеет вид [5, (3.7)], то есть $\bar{c}_{j,2}^{(k)} \triangleq \gamma_{j,k}\,\Delta\,t_j$. Здесь Δt_j есть время, необходимое для демонтажа j-го источника, а $\gamma_{j,k} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ при $j \neq k$ есть коэффициент, зависящий от интенсивности источника с номером k и расстояния между источниками; при $j = k$ в виде $\gamma_{j,k} = \gamma_{j,j}$ имеем константу, зависящую как от интенсивности j-го источника, так и от расстояния между точкой вблизи этого источника (точка демонтажа), в которую прибывает исполнитель из пункта x, и точкой, где расположен сам источник. Итак, $\bar{c}_{j,2}^{(k)} \in \mathbb{R}_+$ есть доза радиации, получаемая при демонтаже; исполнитель останавливается, не доходя до источника и, с применением соответствующих технических средств «выключает» источник, затрачивая на это время Δt_j.

Значение $\bar{c}_{j,3}^{(k)}(y)$, где $k \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$ и $y \in \mathbf{M}_j$, определяется по разному для случаев, когда $j \neq k$ и $j = k$. Если $j \neq k$, то данное значение находится подобно значениям функций $\mathbf{c}^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}^{(N)}$ и соответствует регулярному случаю внешнего перемещения в [26, раздел 6] (случай «дальнего» воздействия на исполнителя). Если же $j = k$, то $\bar{c}_{j,3}^{(k)}(y) = \bar{c}_{j,3}^{(j)}(y) \triangleq 0$.

В последующем изложении мы ограничиваемся случаем, когда $f(y) \equiv 0$, считая, что удается демонтировать все источники, и пренебрегая остаточным фоном при перемещении исполнителя к пункту эвакуации.

Таким образом, получаем задачу маршрутизации с достаточно сложными функциями стоимости. Ниже рассматриваются варианты решения модельных задач; в каждом из них найден глобальный экстремум $\mathbb{V}$ и оптимальный маршрутный процесс в ситуации, когда терминальная функция тождественно равна нулю.

§ 7. Вычислительный эксперимент

В этом параграфе сначала мы продолжим детализацию общей постановки. Прежде всего условимся, что в рассматриваемых ниже задачах $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то есть рассматривается плоский случай. Мы следуем при этом соглашениям предыдущего параграфа. В рассматриваемых вариантах были выбраны «большие» мегаполисы (первый пример) и «малые» мегаполисы (второй пример). Было обнаружено, что во втором примере время счета уменьшалось более чем в два раза, что косвенно говорит о том, что в вопросах, связанных с размерностью, допускающей эффективное решение, существенно не только значение N, но и мощности $|M_1|, \ldots, |M_N|$ (прочие основные численные параметры совпадают в обоих примерах).

Рассматриваемые в данной работе алгоритмические конструкции были реализованы в виде программы для ПЭВМ (написана на языке программирования C++), работающей под управлением 64-хразрядной операционной системы Windows (начиная с Windows 7). Вычислительная часть программы выполняется в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Исходные данные и результаты счета хранятся в текстовом файле специальной структуры. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического отображения «мегаполисов», а также маршрута и трассы их посещения, при этом масштаб выбранного участка графика может быть увеличен; возможно сохранение графика в файл графического формата bmp в цветном или черно-белом виде.

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с центральным процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1. Рассматривалась задача оптимизации обхода «мегаполисов», представляющих собой равномерные «сетки», получаемые размещением точек на равных угловых расстояниях на окружностях. Источники излучения, ассоциированные с «мегаполисами», расположены в пределах контуров вышеупомянутых окружностей. Задано несколько начальных точек траектории для выбора оптимальной точки старта. Предполагается, что в нашей модели после выполнения всех работ исполнитель остается в последней точке траектории. это соответствует предположению о том, что перемещения в точку эвакуации происходят при нулевом фоне и потому не оцениваются. Количество мегаполисов и количество адресных пар, накладывающих ограничения на порядок посещения «мегаполисов», во всех примерах равно 33. Предполагается, что скорость перемещения вне контуров «мегаполисов» (внешние перемещения) в 4 раза больше скорости перемещения исполнителя внутри «мегаполисов» (внутренние работы). Интенсивности излучения, длительности выполнения внутренних работ непосредственно возле источников излучения, а также радиусы окрестностей вокруг источников для выбора точек производства работ по демонтажу задаются в качестве параметров задачи независимо для каждого «мегаполиса».

Пусть в рассматриваемых примерах интенсивности излучения варьируются в пределах от 1.3 до 5.5, радиусы окрестностей источников излучения от 1.1 до 1.4, длительности выполнения работ по демонтажу источников находятся в пределах от 1.1 до 1.7. На рисунках значком $*$ отмечены источники излучения, а $\bigtriangledown$ — точки выполнения работ по демонтажу возле источников. Полагаем далее, что $\mathbb{M} = M_j \times M_j$ при $j \in \overline{1,N}$.

Рассмотрим пример с «мегаполисами», каждый из которых состоит из 12 точек на окружности. Множество допустимых начальных точек траектории:

$$\big\{(90,40);(0,0);(-60,-5);(-70,-100);(70,-50)\big\}.$$

Получены следующие результаты:
Величина совокупных затрат (суммарная доза) составила 226.797.
Выбрана начальная точка траектории $(-60,-5)$.
Первая упорядоченная пара траектории $\big((-85,-28.66);(-98.66,-25)\big) \in M_{23} \times M_{23}$.
Финальная упорядоченная пара перемещений $\big((-24,-96.93);(-12,-90)\big) \in M_{19} \times M_{19}$.
Время счета составило 22 час. 58 мин. 3 сек.
График маршрута и трасса приведены на рис. 1.

В следующем примере «мегаполисы» содержат 6 точек на окружности. Задано следующее множество допустимых начальных точек траектории:

$$\big\{(90,45);(0,0);(-70,-100);(40,0);(-80,35)\big\}.$$

Получены следующие результаты:
Величина совокупных затрат составила 227.755.
Выбрана начальная точка траектории (-80,35).

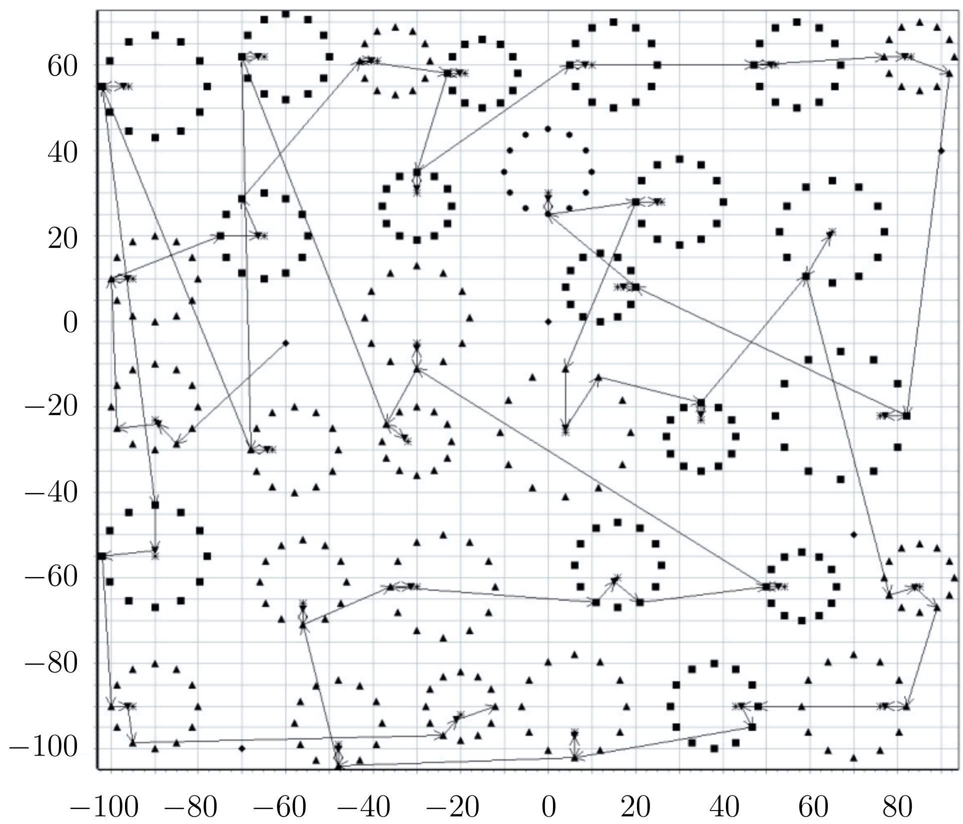

Рис. 1. Траектория движения по мегаполисам (пример 1)

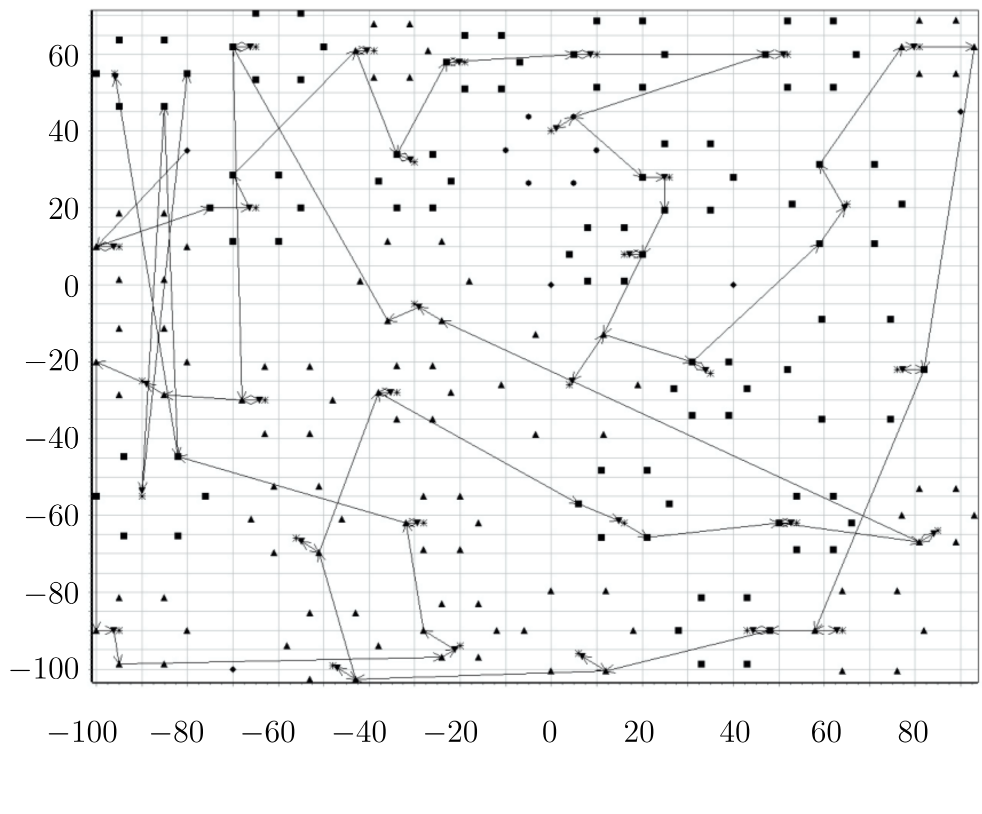

Рис. 2. Траектория движения по мегаполисам (пример 2)

Первая упорядоченная пара траектории $\big((-100, 10); (-100, 10)\big) \in M_{31} \times M_{31}$.
Финальная упорядоченная пара перемещений $\big((-85, 46.34); (-80, 55)\big) \in M_{16} \times M_{16}$.
Время счета составило 5 час. 53 мин. 43 сек.
График маршрута и трасса приведены на рис. 2.

§ 8. Заключение

В статье построены метод и, на его основе, алгоритм нахождения оптимального решения задачи маршрутизации, ориентированной на инженерные приложения. В основе подхода находится широко понимамое динамическое программирование (ДП); по постановке допускаются ограничения в виде условий предшествования и функции стоимости, зависящие от списка заданий (здесь имеется в виду список заданий, не выполненных на текущий момент). Объектами посещения являются непустые конечные множества — мегаполисы. При построении расширения основной задачи (для последующего использования аппарата ДП) допустимость маршрутов по предшествованию подменяется допустимостью в смысле вычеркивания заданий из списка. В задаче с условиями предшествования построение всего массива значений функции Беллмана подменяется построением системы ее слоев, что приводит к увеличению размерности задач, допускающих эффективное решение. Построенный оптимальный алгоритм реализован на ПЭВМ.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петунин А. А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286. https://elibrary.ru/item.asp?id=15134316
2. Chentsov A. G., Chentsov P. A., Petunin A. A., Sesekin A. N. Model of megalopolises in the tool path optimisation for CNC plate cutting machines // International Journal of Production Research. 2018. Vol. 56. Issue 14. P. 4819–4830. https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1421784
3. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: URSS, 2020.
4. Коробкин В. В., Сесекин А. Н., Ташлыков О. Л., Ченцов А. Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2002.
5. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. О задаче последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 219–234. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-219-234
6. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.
7. Gutin G., Punnen A. P. The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
8. Cook W. J. In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University, 2012.
9. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
10. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.

11. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Вып. 9. С. 219–228.
12. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Вып. 9. С. 202–218.
13. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33. http://mi.mathnet.ru/at6414
14. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 10. С. 3–29. http://mi.mathnet.ru/at6433
15. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 11. С. 3–26. http://mi.mathnet.ru/at6463
16. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
17. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
18. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
19. Ченцов А. Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82. https://doi.org/10.20537/vm130107
20. Чеблоков И. Б., Ченцов А. Г. Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 96–119. https://doi.org/10.20537/vm120109
21. Ченцов А. Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2012. Вып. 12. С. 53–76. http://mi.mathnet.ru/vyuru57
22. Chentsov A. A., Chentsov A. G., Sesekin A. N. An extremal routing problem with constraints and complicated cost functions // Advanced Control Systems: Theory and Applications. River Publishers, 2021. P. 21–52.
23. Lawler E. L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Stichting Mathematisch Centrum, 1979.
24. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.
25. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020.
26. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 83–109. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08

Поступила в редакцию 05.07.2021

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра информационных технологий и систем управления, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Сесекин Александр Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19; ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1339-9044
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, А. Н. Сесекин. Одна задача маршрутизации работ в условиях повышенной радиации // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 94–126.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, A. N. Sesekin

One task of routing jobs in high radiation conditions

Keywords: dynamic programming, dismantling, route.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-06

The problem of sequential bypass of megalopolises is investigated, focused on the problem of dismantling a system of radiation hazardous objects under constraints in the form of precedence conditions. The radiation impact on the performers is assessed by the doses received during movements and during the performance of dismantling works. The route problem of minimizing the dose load of workers carrying out dismantling in one or another sequence of operations is considered. The procedure for constructing an optimal solution using a variant of dynamic programming is investigated. On this basis, an algorithm is built, implemented on a PC. Examples of the numerical solution of a model problem for the minimum dose load are given.

Funding. The work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

REFERENCES

1. Petunin A. A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=15134316
2. Chentsov A. G., Chentsov P. A., Petunin A. A., Sesekin A. N. Model of megalopolises in the tool path optimisation for CNC plate cutting machines, *International Journal of Production Research*, 2018, vol. 56, issue 14, pp. 4819–4830. https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1421784
3. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. *Zadachi marshrutizatsii peremeshchenii s neadditivnym agregirovaniem zatrat* (Move routing problems with non-additive cost aggregation), Moscow: URSS, 2020.
4. Korobkin V. V., Sesekin A. N., Tashlykov O. L., Chentsov A. G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in improving the safety and efficiency of nuclear power plants operation), Moscow: Novye Tekhnologii, 2002.
5. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. On the problem of sequential traversal of megalopolises with precedence conditions and cost functions depending on a list of tasks, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 219–234. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-219-234
6. Chentsov A. G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii: voprosy teorii* (Extreme problems of routing and distribution of tasks: theoretical questions), Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008.
7. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations*, Boston: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
8. Cook W. J. *In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation*, Princeton: Princeton University, 2012.
9. Gimadi E. Kh., Khachai M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
10. Little G. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, issue 6, pp. 972–989. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972
11. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. https://doi.org/10.1145/321105.321111

12. Held M., Karp R. M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. https://doi.org/10.1137/0110015
13. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173. https://zbmath.org/?q=an:0705.90070
14. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. II: Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324. https://zbmath.org/?q=an:0705.90071
15. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479. https://zbmath.org/?q=an:0704.90095
16. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
17. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
18. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. *Introduction to algorithms*, Cambridge, MA: MIT Press, 1990.
19. Chentsov A. G. To question of routing of works complexes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130107
20. Cheblokov I. B., Chentsov A. G. About one route problem with interior works, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 1, pp. 96–119 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120109
21. Chentsov A. G. A parallel procedure of constructing Bellman function in the generalized courier problem with interior works, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Ser. Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2012, issue 12, pp. 53–76. http://mi.mathnet.ru/eng/vyuru57
22. Chentsov A. A., Chentsov A. G., Sesekin A. N. An extremal routing problem with constraints and complicated cost functions, *Advanced Control Systems: Theory and Applications*, River Publishers, 2021, pp. 21–52.
23. Lawler E. L. *Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems*, Stichting Mathematisch Centrum, 1979.
24. Chentsov A. G., Chentsov A. A. On the question of finding the value of the route problem with restrictions, *Problemy upravleniya i informatiki*, 2016, issue 1, pp. 41–54 (in Russian).
25. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi listovoi rezki s chislovym programmnym upravleniem. Matematicheskie modeli i algoritmy* (Optimal tool routing of CNC shaped sheet cutting machines. Mathematical models and algorithms), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2020.
26. Chentsov A. G., Chentsov A. A. A model variant of the problem about radiation sources utilization (iterations based on optimization insertions), *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 83–109 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08

Received 05.07.2021

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Aleksei Aleksandrovich Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Aleksandr Nikolaevich Sesekin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;
Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1339-9044
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Citation: A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, A. N. Sesekin. One task of routing jobs in high radiation conditions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 94–126.