

УДК 514.74

© *О. А. Кувшинов***О ГЕОМЕТРИИ ОВАЛА КАССИНИ, ЕГО МЕРЕ НЕВЫПУКЛОСТИ И ε -СЛОЕ**

В работе изучается геометрия замкнутой невыпуклой гладкой односвязной кривой на плоскости — овала Кассини, а также геометрия ε -слоя вокруг множества, границей которого является овал Кассини. Сформированы различные аналитические представления границы ε -слоя, описаны особенные точки этой границы. Определена мера невыпуклости α односвязного множества, границей которого является овал Кассини, и угловая характеристика невыпуклости его ε -окрестности.

Ключевые слова: овал Кассини, α -множества, ε -слой, невыпуклое множество, аппроксимационное вычисление.

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-03

Введение

В работе представлены некоторые свойства овала Кассини и его ε -окрестностей. Выделены некоторые характерные точки овала Кассини и вычислена его мера невыпуклости α . Понятие α -множества введено в 2004 г. [1] для численного описания степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в задачах оптимального управления и дифференциальных играх. α -множества относятся к более широкому классу обобщенно выпуклых множеств, среди которых могут быть выделены слабо и сильно выпуклые множества по Виалю и Ефимову–Стечкину [2], линейно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел, а также α -паравыпуклые множества по Майклу [3]. Как и α -множества, такие классы множеств обладают мерой невыпуклости. С тех пор большое внимание уделяется исследованию особенностей α -множеств. Особый интерес представляет вопрос о справедливости применения положений выпуклого анализа на невыпуклые множества на примере α -множеств.

Так, в работе [4] представлены доказательства теорем об отделимости α -множеств. В работе [5] введен ряд понятий и определений для конкретизации в описании α -множеств: α -гиперплоскость, свойство мажорируемости α -множеств, регулярные и нерегулярные α -множества в \mathbb{R}^n . Получена оценка погрешности при подмене невыпуклого α -множества с малым значением α на его выпуклую оболочку на плоскости [6, 7]. Эта оценка выражена в зависимости хаусдорфова расстояния между α -множеством и его выпуклой оболочкой от значения α .

В работе [8] представлены некоторые не очевидные примеры проявления свойств α -множеств, а именно, показано, что отдельно взятый односвязный участок несамопересекающейся кривой может иметь меру α меньше, чем вся кривая целиком. Другое свойство означает, что существует кривая со сколь угодно малой мерой α , не представимая в виде графика функций. В работе [9] изучается взаимосвязь меры невыпуклости α односвязного пересечения двух α -множеств с мерой α исходного пересекаемого α -множества. Показано, что мера невыпуклости α пересечения может быть больше, чем мера исходного множества.

Сформулирована и доказана теорема о соотношении меры невыпуклости α и коэффициента вогнутости Мордала [10]. Установлена взаимосвязь α -множеств со слабо выпуклыми множествами по Ефимову–Стечкину [11] и по Виалю [12]. Впервые получена оценка роста меры невыпуклости α -множеств достижимости с течением времени для управляемой системы в двумерном фазовом пространстве.

В настоящей работе вычислена аналитически мера невыпуклости α односвязного множества, границей которого является овал Кассини. В процессе рассуждений изучена и описана геометрия ε -слоев, окружающих овал Кассини. А именно, описана ситуация, в которой возникает негладкость границы ε -окрестности овала Кассини, и получено также асимптотическое поведение границ ε -окрестностей при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Исследована асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ площади ε -слоев, окружающих овал Кассини. Показано, что при достаточно малых $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ формула площади ε -слоя такая же, как и формула площади ε -слоя, окружающего выпуклый компакт на плоскости. Для числа ε^* получено аналитическое представление.

Представлен более общий случай (включающий овал Кассини) гладких замкнутых кривых на плоскости, ограничивающих односвязные области. Для широкого класса таких кривых показано, что площади ε -слоев при достаточно малых $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$, окружающих снаружи эти кривые, описываются той же формулой, что и в случае выпуклых компактов на плоскости. Высказано предположение о том, что эта формула верна для более широкого класса гладких кривых на плоскости.

§ 1. Основные аналитические выражения

Овал Кассини образует множество всех точек в плоскости \mathbb{R}^2 , произведение расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек в плоскости (фокусов) есть постоянная величина.

Форма овала Кассини определяется двумя параметрами: a — квадратный корень из произведения расстояний от точки на овале Кассини до фокусов, c — расстояние от каждого из фокусов до начала координат $\mathbf{0} = (0, 0)$ в \mathbb{R}^2 .

Так, например, при рассмотрении n точек $\varphi_i = (x^{(i)}, y^{(i)})$, $i = \overline{1, n}$, на овале Кассини, имеем

$$p_i q_i = a^2, \quad i = \overline{1, n},$$

где p_i и q_i — расстояния от точки φ_i овала Кассини до фокусов (см. рис. 2).

Овал Кассини представим в виде:

$$\Phi = \{\varphi = (x, y) \in \mathbb{R}^2: y = \pm \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2 x^2} - c^2 - x^2}, \quad -\sqrt{a^2 + c^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 + c^2}\}. \quad (1.1)$$

При условии $c < a < \sqrt{2}c$ овал Φ представляет собой замкнутую кривую в плоскости \mathbb{R}^2 , ограничивающую односвязную невыпуклую область, симметричную относительно начала координат. Иначе, при $a < c$ овал Φ имеет вид неодносвязной гладкой кривой, при $a = c$ овал Φ вырождается в лемнискату Бернулли, при $a \geq \sqrt{2}c$ вырождается в выпуклый овал. На рис. 1 представлены все случаи формы Φ .

Отметим, что форма Φ зависит от отношения параметров $\frac{a}{c}$, в то время как их абсолютные значения определяют лишь размеры Φ .

Выделим следующие характерные точки (см. рис. 2).

1. Точки с максимальным и минимальным значением ординаты:

$$A_i = (x_{A_i}, y_{A_i}) = \left(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c} \right), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (1.2)$$

2. Точки на оси y :

$$B_i = (x_{B_i}, y_{B_i}) = (0, \pm \sqrt{a^2 - c^2}), \quad i = \overline{1, 2}.$$

3. Точки на оси x :

$$C_i = (x_{C_i}, y_{C_i}) = (\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0), \quad i = \overline{1, 2}.$$

4. Точки перегиба на Φ :

$$D_i = (x_{D_i}, y_{D_i}) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a^4 - c^4}{3}} - \frac{a^4 - c^4}{3c^2} \right)}, y(x_{D_i}) \right), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (1.3)$$

5. Фокусы Φ :

$$F_i = (x_{F_i}, y_{F_i}) = (\pm c, 0), \quad i = \overline{1, 2}.$$

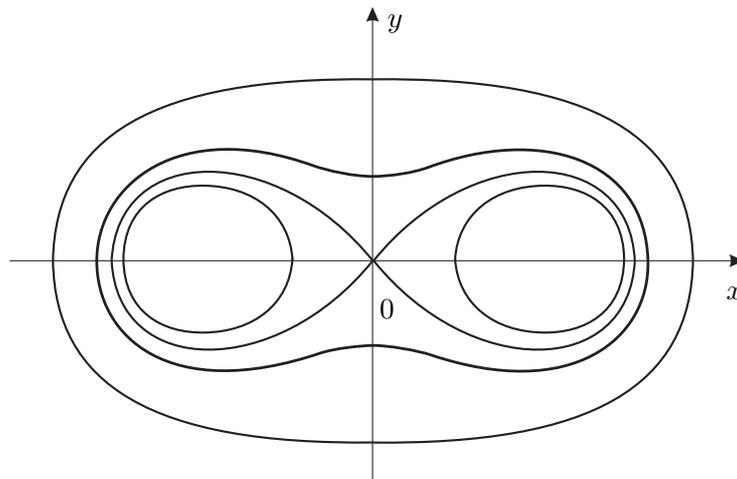


Рис. 1. Различные геометрии овала Кассини

На рис. 2 изображен Φ с параметрами $a = 5.5$, $c = 5$ и характерными точками 1–5. Здесь и далее будут представлены примеры именно для такого набора параметров, однако все рассуждения и полученные выражения справедливы и для других наборов.

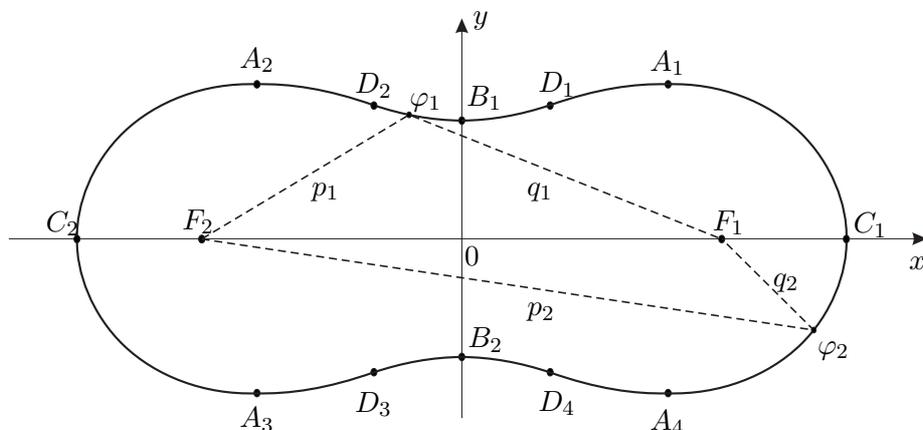


Рис. 2. Овал Кассини и его ключевые точки

Для точек $(x, y) \in \Phi$, отличных от $C_i, i = \overline{1, 2}$, справедливо равенство:

$$y'(x) = \mp \frac{2x - \frac{4c^2x}{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2}}}{2\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2}}, \quad (1.4)$$

где знак производной $y'(x)$ определяется положением точки (x, y) на Φ относительно оси x .

Приведем определения и представления некоторых множеств в плоскости \mathbb{R}^2 , связанных с Φ :

$\Pi(X^{(0)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (y - y^{(0)}) = y'(x^{(0)})(x - x^{(0)})\}$ — касательная к Φ в точке $X^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \Phi$.

$N(X^{(0)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (y - y^{(0)})y'(x^{(0)}) = (x - x^{(0)})\}$ — нормаль к Φ в точке $X^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \Phi$.

$\Phi^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) \notin \Phi, |y| < \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2}, -\sqrt{a^2 + c^2} < x < \sqrt{a^2 + c^2}\}$ — множество точек плоскости \mathbb{R}^2 , лежащих строго внутри Φ .

$H^\varepsilon = \{h \in \mathbb{R}^2: h \notin \Phi^0, \rho(h, \Phi) \leq \varepsilon\}$, где $\rho(h, \Phi) = \min_{\varphi \in \Phi} \|\varphi - h\|$ — множество всех точек плоскости \mathbb{R}^2 , не принадлежащих Φ^0 и отстоящих от Φ на расстоянии, не превосходящем числа $\varepsilon > 0$. Множество H^ε будем называть ε -слоем, окружающим множество Φ . Абсолютное значение ε , образующее ε -слой, будем называть величиной H^ε слоя.

$\partial^+ H^\varepsilon = \{h^\varepsilon \in \mathbb{R}^2: h^\varepsilon \notin \Phi^0, \rho(h^\varepsilon, \Phi) = \varepsilon\}$ — внешний участок границы ε -слоя (см. рис. 3).

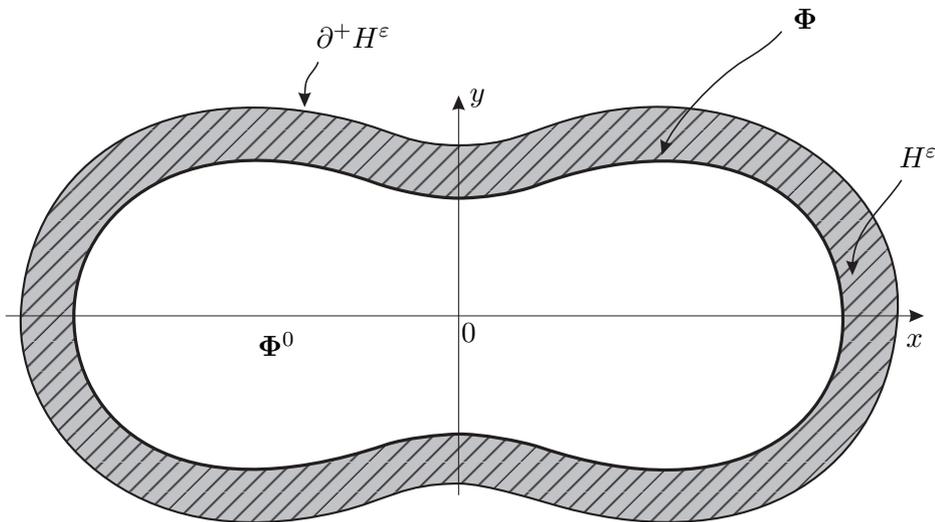


Рис. 3. Различные множества точек

Нас интересует площадь слоя H^ε . Для этого мы представим точки h^ε множества $\partial^+ H^\varepsilon(\varepsilon)$ в аналитическом виде:

$$h^\varepsilon = \varphi^{(0)} + \varepsilon \cdot n(\varphi^{(0)}),$$

где $h^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon)$, $n(\varphi^{(0)}) = (n_x(\varphi^{(0)}), n_y(\varphi^{(0)}))$ — единичный вектор ($\|n(\varphi^{(0)})\| = 1$) внешней нормали к Φ в точке $\varphi^{(0)}$ (см. рис. 4).

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} h^\varepsilon - \varphi^{(0)} &= (x^\varepsilon - x^{(0)}, y^\varepsilon - y^{(0)}) = \left(x^\varepsilon - x^{(0)}, -\frac{1}{y'(x^{(0)})}(x^\varepsilon - x^{(0)}) \right) = \\ &= \left(1, -\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) (x^\varepsilon - x^{(0)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$\|h^\varepsilon - \varphi^{(0)}\| = |x^\varepsilon - x^{(0)}| \cdot \left\| \left(1, -\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right\| = |x^\varepsilon - x^{(0)}| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}} = \varepsilon. \quad (1.6)$$

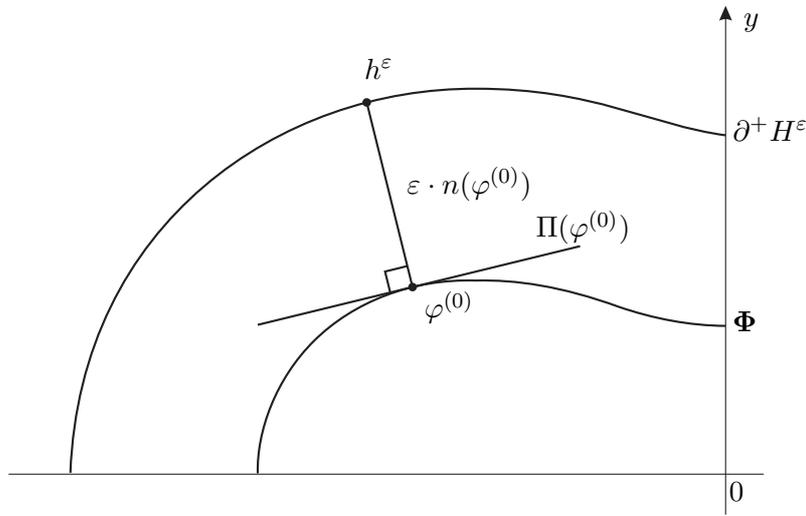


Рис. 4. К определению границы ε -слоя

Поскольку Φ является гладкой невыпуклой кривой, то $\partial^+ H^\varepsilon$ в зависимости от значения ε может быть как гладкой, так и негладкой кривой. По возможности мы должны получить такое универсальное выражение для h^ε , которое описывает одновременно гладкий и негладкий случаи.

По мере увеличения значения ε от 0 до некоторого значения ε^* , кривая $\partial^+ H^\varepsilon$ является гладкой. Если $\varepsilon \geq \varepsilon^*$, на границе $\partial^+ H^\varepsilon$ в двух точках, лежащих на оси y и симметричных относительно оси x , возникает негладкость. Такие точки будем называть точками негладкости $E^\varepsilon = (x_{E^\varepsilon}, y_{E^\varepsilon})$. Ввиду симметрии овала Кассини относительно начала координат, в дальнейших рассуждениях будем рассматривать только точку E^ε , лежащую выше оси x .

Рассмотрим два ε -слоя, величины которых равны $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ соответственно. При этом $\varepsilon^{(2)} > \varepsilon^{(1)} > \varepsilon^*$. Значениям $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ соответствуют точки негладкости $E^{\varepsilon^{(1)}}$ и $E^{\varepsilon^{(2)}}$. Из точки $E^{\varepsilon^{(1)}}$ восстановим нормаль к Φ и обозначим точку пересечения этой нормали с Φ символом $G_1^{\varepsilon^{(1)}} = (x_{G_1^{\varepsilon^{(1)}}}, y_{G_1^{\varepsilon^{(1)}}})$. Отрезок $E^{\varepsilon^{(1)}} G_1^{\varepsilon^{(1)}}$ назовем отрезком негладкости и введем соответствующее определение.

Отрезок негладкости Λ^ε — отрезок длины ε некоторой нормали к Φ , один конец которого есть точка негладкости $E^\varepsilon \in \partial^+ H^\varepsilon$, а другой конец есть точка $G_1^\varepsilon = (x_{G_1^\varepsilon}, y_{G_1^\varepsilon}) \in \Phi$.

Ввиду симметрии овала Кассини относительно начала координат в дальнейшем также будем приводить рассуждения для отрезков Λ^ε , лежащих правее оси y .

Выберем значение $\varepsilon^{(2)}$ таким, что конец $G_1^{\varepsilon^{(2)}}$ отрезка $\Lambda^{\varepsilon^{(2)}}$ совпадает с точкой перегиба D_1 . Такое значение $\varepsilon^{(2)}$ обозначим ε_D . Границу ε -слоя, образованного величиной $\varepsilon = \varepsilon_D$, обозначим $\partial^+ H^{\varepsilon_D}$, а точку негладкости $E^{\varepsilon^{(2)}}$ в данном случае обозначим E^{ε_D} .

Слой H^ε при $\varepsilon = \varepsilon^*$ является минимальным по величине ε слоем с негладкой внешней границей. Его внешнюю границу обозначим $\partial^+ H^{\varepsilon^*}$, а точку негладкости при таком значении — E^{ε^*} (см. рис. 5).

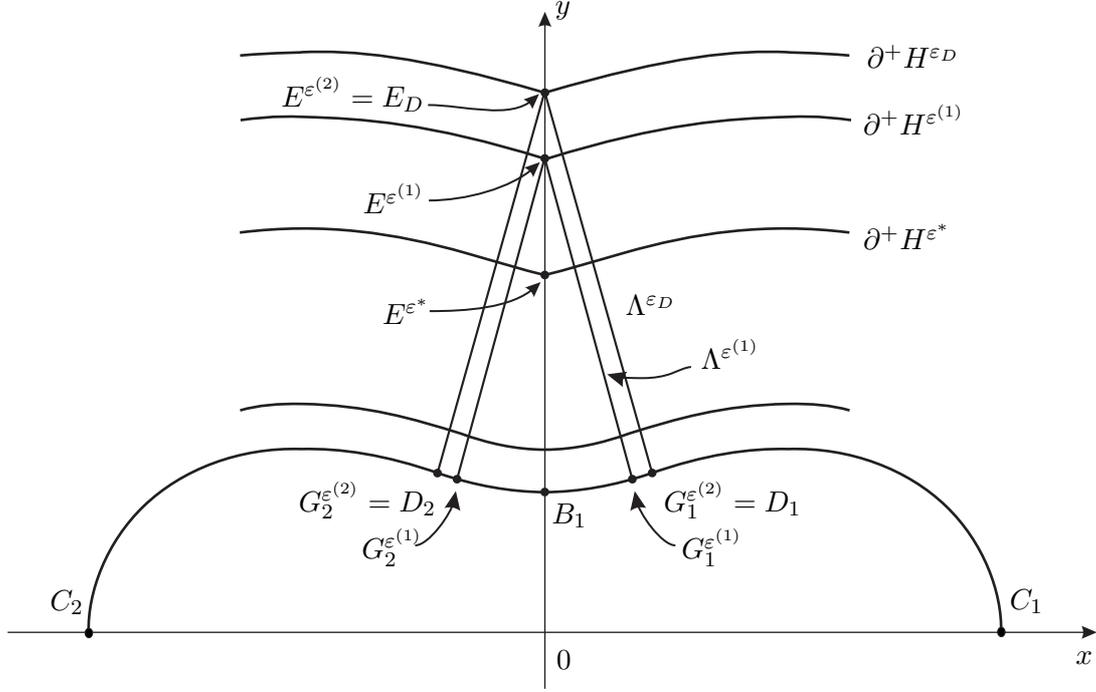


Рис. 5. Различные геометрии границы ε -слоя

По мере уменьшения значения ε до значения ε^* , точка G_1^ε смещается к точке B_1 , координата x которой равна 0. Координата y точки E^ε при этом также уменьшается до значения E^* . В связи с этим точные координаты точки $E^{\varepsilon^*} = (x_{E^{\varepsilon^*}}, y_{E^{\varepsilon^*}})$ могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 x_{E^{\varepsilon^*}} &= 0, \\
 y_{E^{\varepsilon^*}} &= \lim_{x_{G_1^\varepsilon} \rightarrow 0} \left(y(x_{E^{\varepsilon^*}}) - \frac{1}{y'(x_{G_1^\varepsilon})} (x_{E^{\varepsilon^*}} - x_{G_1^\varepsilon}) \right) = \\
 &= \lim_{x_{G_1^\varepsilon} \rightarrow 0} \left(\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{E^{\varepsilon^*}}^2} - c^2 - x_{E^{\varepsilon^*}}^2} - \frac{x_{G_1^\varepsilon} \cdot 2\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^\varepsilon}^2} - c^2 - x_{G_1^\varepsilon}^2}}{2x_{G_1^\varepsilon} - \frac{4c^2 x_{G_1^\varepsilon}}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^\varepsilon}^2}}} \right) = \quad (1.7) \\
 &= \sqrt{a^2 - c^2} - \frac{2\sqrt{a^2 - c^2}}{2 - \frac{4c^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 - c^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2c^2}{a^2}} \right) = \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{2c^2}{2c^2 - a^2} \right).
 \end{aligned}$$

Значение ε^* равно

$$\varepsilon^* = y_{E^*} - y_{B_1} = \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{2c^2}{2c^2 - a^2} - 1 \right).$$

Координаты упомянутой выше точки негладкости $E^\varepsilon = (x_{E^\varepsilon}, y_{E^\varepsilon})$ для произвольного значения ε по аналогии с (1.7) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{E^\varepsilon} &= 0, \\ y_{E^\varepsilon} &= y(x_{E^\varepsilon}) - \frac{1}{y'(x_{G_1^\varepsilon})} (x_{E^\varepsilon} - x_{G_1^\varepsilon}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В общем случае координаты точки $G_1^\varepsilon = (x_{G_1^\varepsilon}, y(x_{G_1^\varepsilon}))$ могут быть найдены из равенства, выражающего длину отрезка Λ^ε (см. с. 38)

$$\sqrt{(x_{E^\varepsilon} - x_{G_1^\varepsilon})^2 + (y_{E^\varepsilon} - y(x_{G_1^\varepsilon}))^2} = \varepsilon, \quad (1.9)$$

откуда после подстановки известных значений

$$\begin{aligned} & \left(x_{G_1^\varepsilon}^2 + \left(\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2} - c^2 - x_{G_1^\varepsilon}^2} - \frac{2x_{G_1^\varepsilon} \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2} - c^2 - x_{G_1^\varepsilon}^2}}{2x_{G_1^\varepsilon} - \frac{4c^2x_{G_1^\varepsilon}}{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2} - c^2 - x_{G_1^\varepsilon}^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Приведем подобные, выполним доступные сокращения и возведем обе части уравнения в квадрат

$$x_{G_1^\varepsilon}^2 + \left(-\frac{\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2} - c^2 - x_{G_1^\varepsilon}^2}}{1 - \frac{2c^2}{\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2}}} \right)^2 = \varepsilon^2.$$

Введем замену

$$\begin{aligned} t &= x_{G_1^\varepsilon}^2, \\ s &= \sqrt{a^4 + 4c^2t}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид

$$t + \left(\frac{\sqrt{s - c^2 - t}}{1 - \frac{2c^2}{s}} \right)^2 = \varepsilon^2.$$

Выполним преобразование

$$s - c^2 - t = \left(1 - \frac{2c^2}{s} \right)^2 \cdot (\varepsilon^2 - t).$$

Избавимся от дроби в правой части уравнения и раскроем скобки

$$s^3 - s^2c^2 - s^2t = s^2\varepsilon^2 - s^2t - 4c^2s\varepsilon^2 + 4c^2st + 4c^4\varepsilon^2 - 4c^4t.$$

Приведем подобные, а также из замены $s = \sqrt{a^4 + 4c^2t}$ выразим $t = \frac{s^2 - a^4}{4c^2}$ и подставим в текущее уравнение

$$s^3 - s^2c^2 = s^2\varepsilon^2 - 4c^2s\varepsilon^2 + s^3 - sa^4 + 4c^4\varepsilon^2 - c^2s^2 + c^2a^4.$$

Приведем подобные и перенесем все слагаемые в левую часть:

$$\varepsilon^2s^2 - (4c^2\varepsilon^2 + a^4)s + (4c^4\varepsilon^2 + c^2a^4) = 0.$$

Мы получили обыкновенное квадратное уравнение. Его корень s равен

$$s = \frac{4c^2\varepsilon^2 + a^4 - \sqrt{(4c^2\varepsilon^2 + a^4)^2 - 4\varepsilon^2(4c^4\varepsilon^2 + c^2a^4)}}{2\varepsilon^2}.$$

Выполнив обратную замену для s и t и раскрыв скобки в правой части равенства, имеем

$$\sqrt{a^4 + 4c^2x_{G_1^\varepsilon}^2} = \frac{4c^2\varepsilon^2 + a^4 - \sqrt{4c^2\varepsilon^2a^4 + a^8}}{2\varepsilon^2}.$$

Откуда искомое значение $x_{G_1^\varepsilon}$ равно

$$x_{G_1^\varepsilon} = \sqrt{\frac{\left(\frac{4c^2\varepsilon^2 + a^4 - a^2\sqrt{4c^2\varepsilon^2 + a^4}}{2\varepsilon^2}\right)^2 - a^4}{4c^2}}.$$

После окончательного упрощения итоговое значение $x_{G_1^\varepsilon}$ равно

$$x_{G_1^\varepsilon} = \frac{\sqrt{4c^4\varepsilon^4 + 3c^2\varepsilon^2a^4 + \frac{1}{2}a^2(a^6 - (4c^2\varepsilon^2 + a^4)^{\frac{3}{2}}) - \varepsilon^4a^4}}{2c\varepsilon^2}. \quad (1.10)$$

Анализ выражения (1.10) показал, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ результат состоит только из мнимой части комплексного числа, в то время как для остальных случаев результат состоит только из действительной части. Это означает, что, принимая во внимание только действительную часть результата выражения (1.10), мы получим выражение, справедливое как для гладких, так и негладких случаев $\partial^+ H^\varepsilon$.

На рис. 6 представлен график зависимости $x_{G_1^\varepsilon}$. Также нетрудно убедиться в справедливости выражения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} x_{G_1^\varepsilon} = x_{A_1}.$$

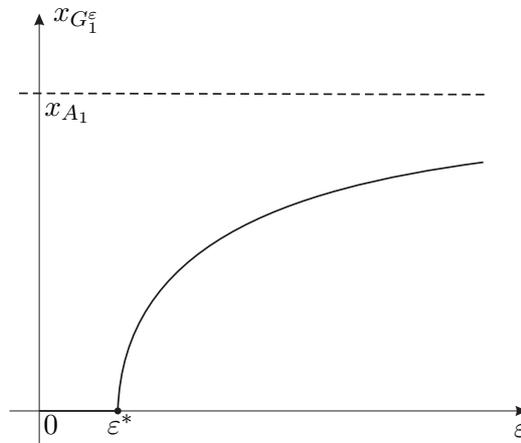


Рис. 6. Зависимость значения $x_{G_1^\varepsilon}$ от ε

З а м е ч а н и е 1. Изначально предполагалось, что $\partial^+ H^{\varepsilon D}$ есть негладкая внешняя граница минимального по величине ε -слоя. Иными словами, предполагалось, что $E^{\varepsilon^*} = E^{\varepsilon D}$. Однако это оказалось неверно из-за того, что вогнутость овала Кассини превосходит вогнутость дуги окружности.

Это продемонстрировано на рис. 7, на котором содержится фрагмент вогнутой части Φ , а также фрагмент окружности O с центром в точке $E^{\varepsilon D}$ и радиусом ε_D .

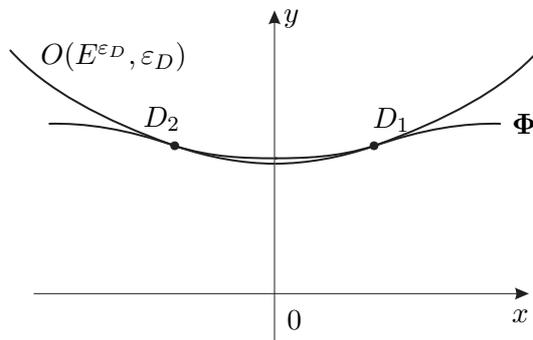


Рис. 7. Степень вогнутости овала Кассини в сравнении с окружностью

Докажем это аналитически. Окружность O имеет место быть при $\varepsilon < \infty$. Как будет показано далее, это справедливо тогда, когда радиус этой окружности пересекает Φ в точке G_1^ε , координата $x_{G_1^\varepsilon}$ которой содержится в полуинтервале $0 \leq x_{G_1^\varepsilon} < x_{A_1}$.

Объединив (1.3) и (1.8), получим выражение для ординаты $y_{E^{\varepsilon D}}$ точки $E^{\varepsilon D}$:

$$y_{E^{\varepsilon D}} = \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - x^2 - c^2} \cdot \left(\frac{2c^2}{2c^2 - \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}} \right). \quad (1.11)$$

Необходимо доказать, что значение этого выражения больше значения выражения (1.7) для ординаты $y_{E^{\varepsilon^*}}$ точки E^{ε^*} :

$$y_{E^{\varepsilon^*}} = \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{2c^2}{2c^2 - a^2} \right).$$

Для этого отметим следующее.

1. Знаменатель дроби в правом множителе правой части выражения (1.11), равный $2c^2 - \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}$, меньше знаменателя дроби в правом множителе правой части выражения (1.7), равного $2c^2 - a^2$, при $x > 0$. Это значит, что вся дробь в правой части выражения (1.11) больше дроби в правой части выражения (1.7).
2. Первый множитель правой части выражения (1.11) больше первого множителя правой части выражения (1.7), равного $\sqrt{a^2 - c^2}$ и являющегося ординатой точки B_1 (рис. 2). Эта точка является локальным минимумом выражения овала Φ (1.1) на указанном выше полуинтервале $0 \leq x_{G_1^\varepsilon} < x_{A_1}$. Предварительно отметим, что перед правой частью выражения овала Φ (1.1) и правой частью производной этого выражения (1.4) стоят знаки \pm и \mp соответственно. Это обусловлено тем, что каждой точке на оси x из отрезка $x_{C_2} \leq x \leq x_{C_1}$ соответствуют две симметричные относительно оси x точки на овале Φ , определяющиеся выражением (1.1). В дальнейших рассуждениях будем учитывать только тот вариант правой части выражения (1.1), перед которым стоит знак «плюс» и соответствующий ему вариант правой части выражения (1.4), перед которым стоит знак «минус», то есть только ту часть овала Φ , которая находится выше оси x . Тогда, приравняв выражение (1.4) к нулю и решив полученное уравнение, окажется, что оно имеет три корня. Два корня являются координатами x_{A_1} и x_{A_2} точек A_1 и A_2 овала Φ (рис. 2; (1.2)), и они не содержатся в рассматриваемом полуинтервале $0 \leq x_{G_1^\varepsilon} < x_{A_1}$. Третий корень, равный нулю, содержится в этом полуинтервале и является координатой x_{B_1} точки B_1 . Это означает, что первый множитель правой

части выражения (1.11) $\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - x^2 - c^2}$ больше первого множителя в правой части выражения (1.7) $\sqrt{a^2 - c^2}$ на полуинтервале $0 \leq x < x_{A_1}$.

Объединяя положения 1 и 2, заключаем, что оба множителя правой части выражения (1.11) превосходят соответствующие множители правой части выражения (1.7). Это значит, что точка $y_{E^{\varepsilon D}}$ расположена выше точки $y_{E^{\varepsilon^*}}$.

На рис. 8 показаны зависимости ординат $y_{E^{\varepsilon^*}}$ и $y_{E^{\varepsilon D}}$ при различных значениях $\frac{a}{c}$, где $c = 5$, $a \in [c, \sqrt{2}c]$.

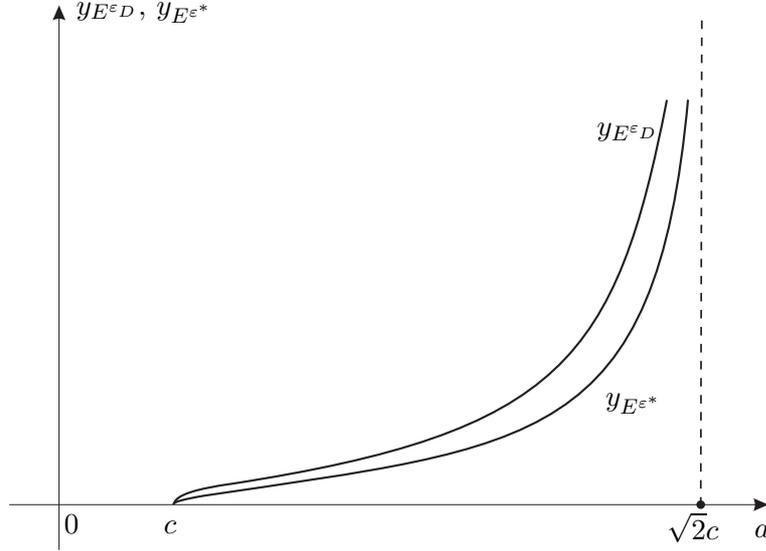


Рис. 8. Взаимное расположения точек $E^{\varepsilon D}$ и E^{ε^*} на оси y при различных соотношениях a и c

Каждой точке $h^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ границы $\partial^+ H^\varepsilon$ соответствует своя точка на кривой Φ . Причем при $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ каждой точке на кривой Φ соответствует единственная точка h^ε . Однако при $\varepsilon > \varepsilon^*$ не для всех точек кривой Φ найдется в соответствие точка h^ε . Множество точек кривой Φ , для которых нет соответствующих точек h^ε , есть все точки кривой Φ , заключенные между G_1^ε и G_2^ε .

Точки $h^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ границы $\partial^+ H^\varepsilon$ задаются параметрически. Из (1.5) получаем

$$x^\varepsilon(x^{(0)}) = \begin{cases} x^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}}} \text{ при } x^{(0)} < x_{A_2} \text{ или } x_{G_1^\varepsilon} \leq x^{(0)} < x_{A_1}, \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}}} + x^{(0)} \text{ при } x_{A_2} < x^{(0)} \leq x_{G_2^\varepsilon} \text{ или } x^{(0)} > x_{A_1}, \\ x^{(0)} \text{ при } x^{(0)} = x_{A_1} \text{ или } x^{(0)} = x_{A_2}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Из (1.6) имеем

$$y^\varepsilon(x^{(0)}) = \begin{cases} \pm \left(y^{(0)} - \frac{1}{y'(x^{(0)})} \cdot (x^\varepsilon(x^{(0)}, \varepsilon) - x^{(0)}) \right) \text{ при } x^{(0)} \neq x_{A_1} \text{ или } x^{(0)} \neq x_{A_2}, \\ \pm (y^{(0)} + \varepsilon) \text{ при } x^{(0)} = x_{A_1} \text{ или } x^{(0)} = x_{A_2}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Возможен и другой вариант аналитического представления точек h^ε . Обратимся к схеме на рис. 9.

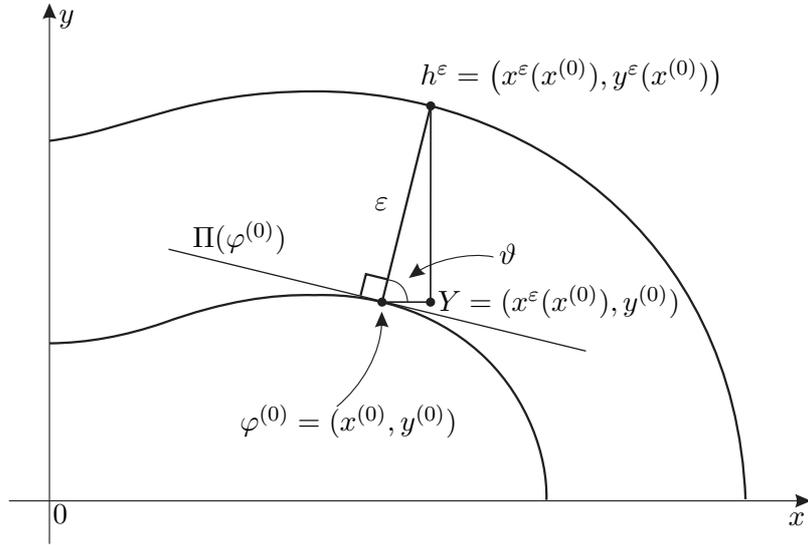


Рис. 9. К определению первой координаты границы ε -слоя

На рисунке рассмотрим прямоугольный треугольник $h^\varepsilon Y \varphi^{(0)}$. Гипотенуза данного треугольника есть отрезок нормали к Φ в точке $\varphi^{(0)}$, длина этого отрезка равна ε . Нас интересует первая координата точки h^ε . Заметим, что абсцисса точки Y равна искомой абсциссе. В свою очередь, абсцисса точки Y равна сумме абсциссы точки $\varphi^{(0)}$ и длины катета $\varphi^{(0)}Y$ рассматриваемого треугольника. Заметим также, что угловой коэффициент прямой, на которой лежит гипотенуза, в соответствии с определением $N(\varphi^{(0)})$ равен $-\frac{1}{y'(x_0)}$. Это значит, что острый угол ϑ рассматриваемого треугольника равен

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right).$$

Введем функцию $l(x)$, где x — известный отрезок (для которого известны координаты его концов), а $l(x)$ — длина отрезка x . Косинус угла ϑ есть отношение искомой длины к длине гипотенузы, откуда длина катета $\varphi^{(0)}Y$ равна

$$l(\varphi^{(0)}Y) = \varepsilon \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right).$$

Тогда искомая абсцисса $x^\varepsilon(x^{(0)})$ в данном случае равна

$$x^\varepsilon(x^{(0)}) = x^{(0)} + l(\varphi^{(0)}Y) = x^{(0)} + \varepsilon \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right).$$

Принимая во внимание значение угла наклона $N(\varphi^{(0)})$ по отношению к оси x , получим выражение для первой координаты $\partial^+ H^\varepsilon$.

$$x^\varepsilon(x^{(0)}) = \begin{cases} x^{(0)} - \varepsilon \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right) & \text{при } x^{(0)} < x_{A_2} \text{ или} \\ & x_{G_1^\varepsilon} \leq x^{(0)} < x_{A_1}, \\ x^{(0)} + \varepsilon \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right) & \text{при } x_{A_2} < x^{(0)} \leq x_{G_2^\varepsilon} \text{ или } x^{(0)} > x_{A_1}, \\ x^{(0)} & \text{при } x^{(0)} = x_{A_1} \text{ или } x^{(0)} = x_{A_2}. \end{cases}$$

Аналогично получим выражение для ординаты границы ε -слоя.

$$y^\varepsilon(x^{(0)}) = \begin{cases} \pm \left(y^{(0)} - \varepsilon \cdot \sin \left(\arctg \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right) \right) & \text{при } x^{(0)} < x_{A_2} \text{ или} \\ & x_{G_1^\varepsilon} \leq x^{(0)} < x_{A_1}(\varepsilon), \\ \pm \left(y^{(0)} + \varepsilon \cdot \sin \left(\arctg \left(-\frac{1}{y'(x^{(0)})} \right) \right) \right) & \text{при } x^{(0)} > x_{A_1} \text{ или} \\ & x_{A_2} < x^{(0)} \leq x_{G_2^\varepsilon}, \\ \pm (y^{(0)} + \varepsilon) & \text{при } x^{(0)} = x_{A_1} \text{ или } x^{(0)} = x_{A_2}. \end{cases}$$

Окончательное общее выражение координат точек $\partial^+ H^\varepsilon$ имеет вид

$$\partial^+ H^\varepsilon = \{h^\varepsilon \in \mathbb{R}^2: h^\varepsilon = (x^\varepsilon(x^{(0)}), y^\varepsilon(x^{(0)}))\}.$$

Негладкость ε -окрестности может быть охарактеризована углом α^ε — углом между симметричными относительно оси y отрезками негладкости. Для нахождения величины данного угла дополним рис. 9 обозначением углов и точкой $G_{12}^\varepsilon = (0, y_{G_1^\varepsilon})$ (рис. 10).

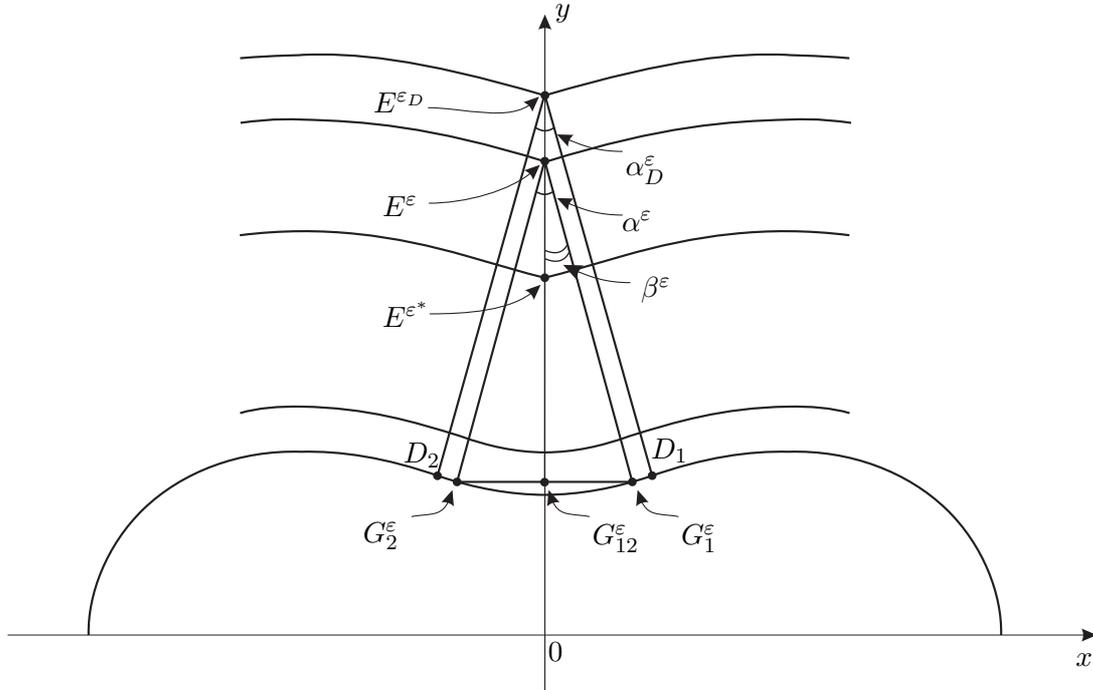


Рис. 10. К определению угла α^ε

Величина данного угла может быть найдена из прямоугольного треугольника $E^\varepsilon G_{12}^\varepsilon G_1^\varepsilon$ через половинный угол $\beta^\varepsilon = \frac{\alpha^\varepsilon}{2}$. Длина отрезка негладкости в этом примере равна

$$l(E^\varepsilon G_1^\varepsilon) = \sqrt{(x_{E^\varepsilon} - x_{G_1^\varepsilon})^2 + (y_{E^\varepsilon} - y_{G_1^\varepsilon})^2} = \sqrt{x_{G_1^\varepsilon}^2 + (y_{E^\varepsilon} - y_{G_1^\varepsilon})^2}.$$

Длина катета $G_{12}^\varepsilon G_1^\varepsilon$ равна

$$l(G_{12}^\varepsilon G_1^\varepsilon) = x_{G_1^\varepsilon}.$$

Тогда величина угла α^ε равна

$$\alpha^\varepsilon = 2 \arcsin \left(\frac{l(G_{12}^\varepsilon G_1^\varepsilon)}{l(E^\varepsilon G_1^\varepsilon)} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{x_{G_1^\varepsilon}}{\sqrt{x_{G_1^\varepsilon}^2 + (y_{E^\varepsilon} - y_{G_1^\varepsilon})^2}} \right). \quad (1.14)$$

На рис. 11 представлена зависимость данного угла от величины ε при $a = 5.5$, $c = 5$.

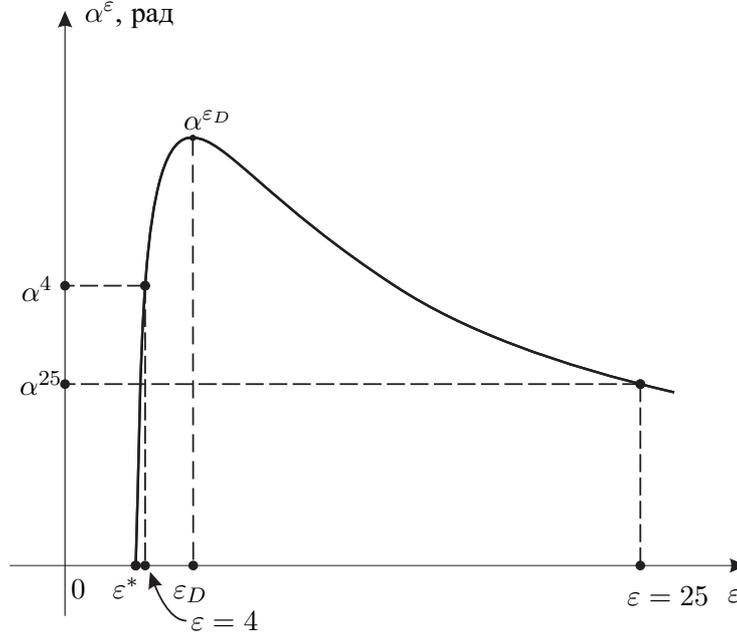


Рис. 11. Зависимость угла α^ε от ε

Из рис. 11 видно, что данная зависимость определена на $[\varepsilon^*, \infty)$, а максимальное значение угла α^ε достигается при $\varepsilon = \varepsilon_D$. Из выражения (1.14) нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \alpha^\varepsilon = 0,$$

что значит, что геометрия границы $\partial^+ H^\varepsilon$ в пределе представляет собой гладкую выпуклую кривую.

Предположим, что мера невыпуклости α множества Φ^0 с границей Φ достигается в точке E^{ε_D} и равна, соответственно, α^{ε_D} . Напомним, что точка E^{ε_D} является такой точкой негладкости, что восстановленная из нее нормаль к множеству Φ^0 пересекает его границу Φ в точке перегиба D_1 (с. 38). Толщина слоя H^{ε_D} и длина отрезка негладкости Λ^{ε_D} в этом случае равна ε_D . Сформулируем теорему.

Т е о р е м а 1.1. *Для односвязного множества Φ^0 , границей Φ которого является овал Кассини с параметрами $c < a < c\sqrt{2}$, мера невыпуклости α достигается в точке негладкости E^{ε_D} , то есть*

$$\alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Phi^0 \cup \Phi)} \alpha^\varepsilon = \alpha^{\varepsilon_D}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что мера невыпуклости α достигается в отличной от E^{ε_D} точке M_1 , не лежащей на оси y (см. рис. 12).

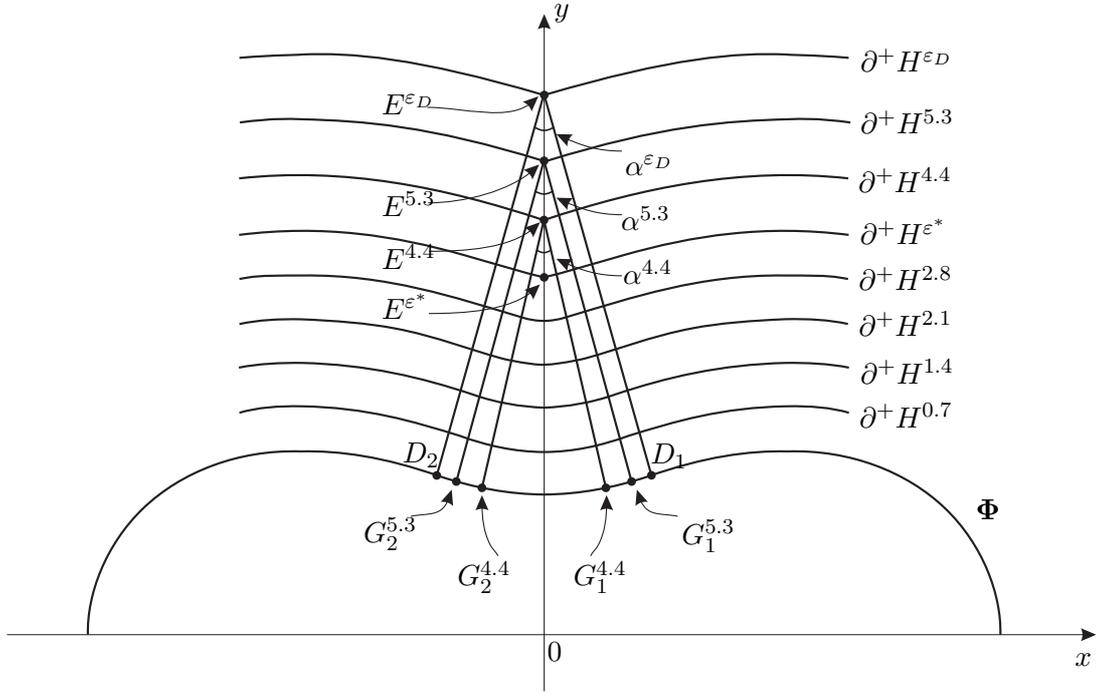


Рис. 13. Изменение геометрии ε -слоя

На рис. 13 представлен фрагмент Φ , множества различных ε -слоев, а также точки негладкости и отрезки негладкости при различных значениях ε .

Особый интерес представляет форма $\partial^+ H^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Обозначим границу нормированного относительно ε слоя $\partial^+ H^\varepsilon$ символом $\partial^+ \hat{H}^{\varepsilon\infty}$.

Напомним, что овал Φ описывается выражением (1.1) вида $y = y(x^{(0)})$, а производная $y'(x^{(0)})$ этого выражения в точке $\varphi^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$ определяется выражением (1.4). В связи с этим параметрические выражения для координат $\partial^+ \hat{H}^{\varepsilon\infty}$ на основании (1.12) и (1.13) имеют следующий вид:

$$x^{\varepsilon\infty}(x^{(0)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{x^\varepsilon(x^{(0)})}{x_{C_1} + \varepsilon} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}}} & \text{при } x^{(0)} < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}}} & \text{при } x^{(0)} > 0, \\ 0 & \text{при } x^{(0)} = 0; \end{cases}$$

$$y^{\varepsilon\infty}(x^{(0)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{y^\varepsilon(x^{(0)})}{x_{C_1} + \varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{y'(x^{(0)})\sqrt{1 + \frac{1}{y'(x^{(0)})^2}}} & \text{при } x^{(0)} \neq 0, \\ 1 & \text{при } x^{(0)} = 0. \end{cases}$$

Тогда аналитическое представление $\partial^+ \hat{H}^{\varepsilon\infty}$ имеет вид

$$\partial^+ \hat{H}^{\varepsilon\infty} = \{h^{\varepsilon\infty} \in \mathbb{R}^2: h^{\varepsilon\infty} = (x^{\varepsilon\infty}(x^{(0)}), y^{\varepsilon\infty}(x^{(0)}))\}.$$

Обозначим символом $\partial^+ \hat{H}^\varepsilon$ границу нормированного ε -слоя величиной ε . $\partial^+ \hat{H}^{\varepsilon\infty}$ представляет собой единичную окружность (см. рис. 14).

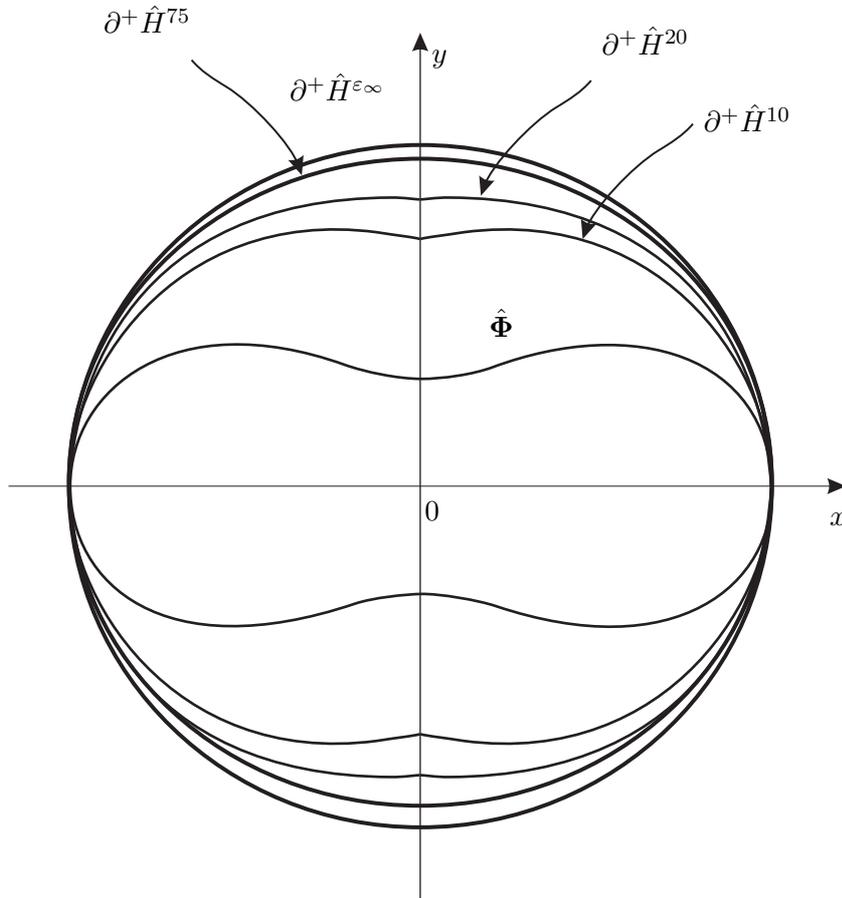


Рис. 14. Геометрия нормированных $\partial^+ H^\varepsilon$ при больших значениях ε в сравнении с $\hat{\Phi}$ — нормированным Φ

§ 2. Площадь H^ε

Известно (см., например, [13, с. 176]), что любой выпуклый компакт Z ($\text{int } Z \neq \emptyset$) в плоскости \mathbb{R}^2 с длиной $l(\partial Z)$ границы ∂Z имеет ε -слой

$$Z(\varepsilon) = Z^\varepsilon \setminus \text{int } Z, \quad Z^\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^2: \rho(z, Z) \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0),$$

площадь $S(\varepsilon)$ которого определяется равенством

$$S(\varepsilon) = l(\partial Z) \cdot \varepsilon + \pi \cdot \varepsilon^2. \quad (2.1)$$

Справедливость формулы (2.1) для выпуклых компактов рассмотрим на примерах окружности радиуса r и квадрата со стороной m , а также их ε -слоев (см. рис. 15).

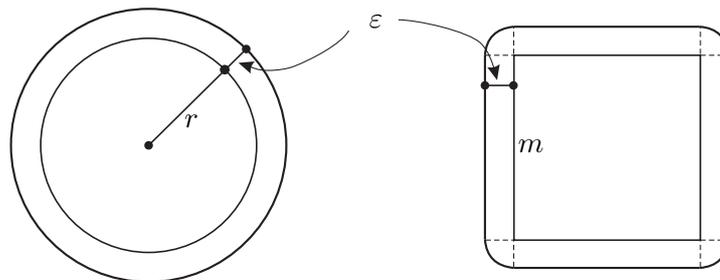


Рис. 15. К доказательству справедливости формулы (2.1)

Окружность и граница ее ε -слоя являются концентрическими окружностями. Радиус второй равен $R = r + \varepsilon$. Тогда площадь H^ε может быть найдена из выражения

$$s_1 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(r + \varepsilon)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

где $2\pi r\varepsilon$ есть длина исходной окружности.

Для квадрата площадь ε -слоя есть сумма площадей четырех прямоугольников со сторонами m и ε и четырех фрагментов окружности, которые при объединении образуют целую окружность радиуса ε . Тогда площадь H^ε квадрата равна

$$s_2 = 4m\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

где $4m$ есть периметр квадрата, то есть длина границы исходного множества.

Возникает естественный вопрос о том, какой формулой представлена площадь $S(\varepsilon)$ ε -слоя, окружающего произвольный (необязательно выпуклый) компакт Z ($\text{int } Z \neq \emptyset$) в \mathbb{R}^2 .

Такой вопрос, заданный в весьма общей формулировке, порождает трудную задачу. Сузим его на невыпуклые компакты Z в \mathbb{R}^2 , имеющие гладкую замкнутую границу. Примером такого компакта является рассматриваемое в настоящей работе множество Φ^0 с границей Φ . Сформулируем теорему.

Т е о р е м а 2.1. Пусть Z — невыпуклый односвязный компакт в \mathbb{R}^2 с $\text{int } Z \neq \emptyset$ и гладкой границей ∂Z , состоящей из конечного числа участков выпуклости и вогнутости. Тогда существует такое $\varepsilon^* \in (0, \infty)$, что площадь $S(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ слоя, окружающего Z , представлена формулой (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схему доказательства приведем для множества, близкого по геометрии к множеству Φ^0 с границей Φ . Рассмотрим невыпуклое множество Φ^c , которое представляет собой односвязное невыпуклое множество на плоскости. Граница $\partial\Phi^c$ этого множества составлена из дуг трех больших окружностей радиуса R и дуг четырех малых окружностей радиуса $r = R(\sqrt{2} - 1)$ так, что эти дуги образуют гладкую замкнутую невыпуклую кривую, симметричную относительно начала координат. Вместе с этим рассмотрим ε -слой вокруг множества Φ^c при условии $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$. Здесь $\varepsilon^* = r$. Учитывая симметрию множества Φ^c относительно начала координат, изобразим на рис. 16 только ту часть Φ^∇ этого множества, которая содержится в первом квадранте. Центры окружностей, дуги которых образуют границу $\partial\Phi^c$ и попадают в первый квадрант, обозначим O_1, O_2 и O_3 .

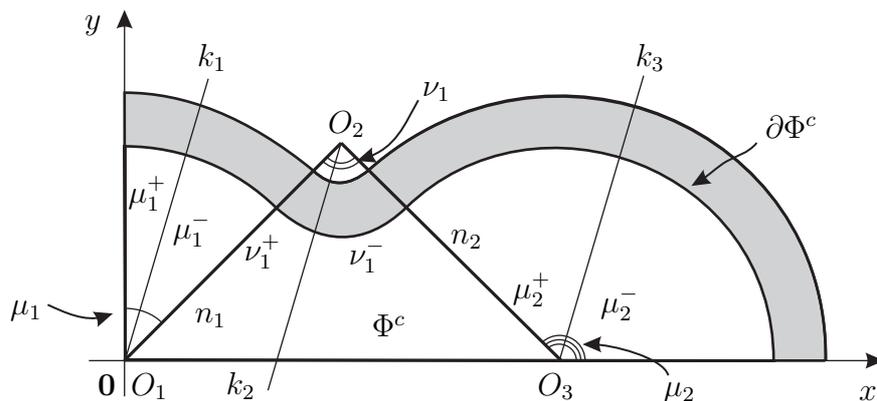


Рис. 16. Фрагмент Φ^∇ множества Φ^c

В точках перегиба границы $\partial\Phi^c$ восстановим нормали n_1 и n_2 до их пересечений с осью x и друг с другом. Обозначим через μ_1 и μ_2 углы, которые составляют n_1 и n_2

с положительными направлениями осей y и x соответственно. Через ν_1 обозначим острый угол между n_1 и n_2 .

Введем также прямые k_1 , k_2 и k_3 , выходящие, соответственно, из центров O_1 , O_2 и O_3 окружностей, параллельные друг другу и лежащие внутри углов μ_1 , ν_1 и μ_2 (см. рис. 16). Эти прямые разбивают углы μ_1 , ν_1 и μ_2 на некоторые пары углов μ_1^+ , μ_1^- ; ν_1^+ , ν_1^- ; μ_2^+ , μ_2^- соответственно.

Рассмотрим дополнительно произвольный круг в \mathbb{R}^2 радиуса R_0 и сектор H ε -слоя этого круга, заключенный между двумя лучами, выходящими из центра круга под углом ϖ . Площадь $S_H(\varepsilon)$ этого сектора слоя определяется равенством

$$S_H(\varepsilon) = \varpi R_0 \cdot \varepsilon + \frac{\varpi}{2} \cdot \varepsilon^2, \quad (2.2)$$

при этом, как видно из (2.2), коэффициент при ε^2 определяется только угловой мерой ϖ . На рис. 16 $\mu_1^- = \nu_1^+$ и $\nu_1^- = \mu_2^+$ как накрест лежащие углы при $k_1 \parallel k_2$ и $k_2 \parallel k_3$ соответственно. Однако, поскольку угол ν_1 является угловой мерой вогнутой дуги, то коэффициент при ε^2 для этого фрагмента имеет отрицательный знак. Это значит, что угловые меры пар (μ_1^-, ν_1^+) и (ν_1^-, μ_2^+) компенсируют друг друга. В таком случае, остаются некомпенсированными только фрагменты с угловыми мерами μ_1^+ и μ_2^- . Сумма этих углов ввиду $k_1 \parallel k_3$ равна $\frac{\pi}{2}$. Значит, коэффициент в формуле площади ε -слоя при ε^2 для множества Φ^∇ равен $\frac{\pi}{4}$. Тогда для множества Φ^c этот коэффициент равен $4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$, так же как в формуле (2.1). Сведение ε -слоев, окружающих Φ^c , к рассмотрению отдельных фрагментов ε -слоев в квадрантах обусловлено их гладкой стыковкой.

Получено, что площадь интересующего ε -слоя вокруг множества Φ^0 с границей Φ может быть также рассчитана с помощью формулы (2.1) при условии $\varepsilon = (0, \varepsilon^*]$. Длина границы Φ определяется выражением

$$L = 4 \int_0^{x_{c_1}} \sqrt{1 + \left(\frac{y(x^{(0)})}{dx^{(0)}} \right)^2} dx^{(0)}.$$

§ 3. Анализ внутреннего слоя $H^{-\varepsilon}$

Введем обозначения

$H^{-\varepsilon} = \{h \in \mathbb{R}^2 : h \in \Phi^0, \rho(h, \Phi) \leq \varepsilon\}$ — множество всех точек плоскости \mathbb{R}^2 , принадлежащих Φ^0 и отстоящих от Φ на расстоянии, не превосходящем числа ε .

$\partial^- H^{-\varepsilon} = \{h^\varepsilon \in \mathbb{R}^2 : h \in \Phi^0, \rho(h, \Phi) = \varepsilon\}$ — внутренний участок границы ε -слоя $H^{-\varepsilon}$.

Получим аналитическое представление $\partial^- H^{-\varepsilon}$. Как и в случае с $\partial^+ H^\varepsilon$ форма $\partial^- H^{-\varepsilon}$ может быть как гладкой, так и негладкой в зависимости от значения ε (рис. 17).

Здесь величина ε_* , формирующая минимальную по величине негладкую границу $\partial^- H^{-\varepsilon}$, равна

$$\varepsilon_* = y_{B_1} = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Координаты точки негладкости $E_1^{-\varepsilon} = (x_{E_1^{-\varepsilon}}, y_{E_1^{-\varepsilon}})$ по аналогии с (1.8) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_{E_1^{-\varepsilon}} &= \frac{2c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}}, \\ y_{E_1^{-\varepsilon}} &= 0. \end{aligned}$$

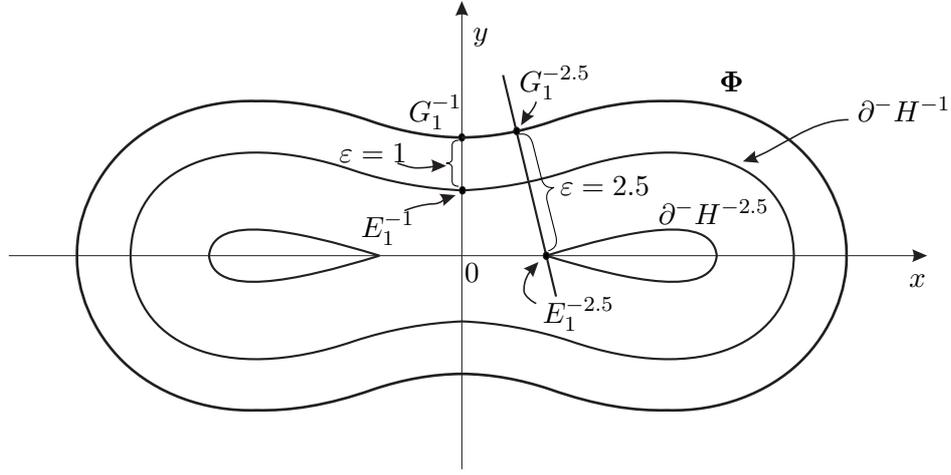


Рис. 17. Различные геометрии $\partial^- H^{-\varepsilon}$

По аналогии с (1.9) координата $x_{G_1^{-\varepsilon}}$ точки $G_1^{-\varepsilon} = (x_{G_1^{-\varepsilon}}, y_{G_1^{-\varepsilon}})$ может быть найдена из равенства

$$\sqrt{(x_{E_1^{-\varepsilon}} - x_{G_1^{-\varepsilon}})^2 + (y_{E_1^{-\varepsilon}} - y(x_{G_1^{-\varepsilon}}))^2} = \varepsilon.$$

Раскроем скобки и возведем в квадрат обе части

$$x_{G_1^{-\varepsilon}}^2 - 2x_{E_1^{-\varepsilon}}x_{G_1^{-\varepsilon}} + x_{E_1^{-\varepsilon}}^2 + y(x_{G_1^{-\varepsilon}})^2 = \varepsilon^2.$$

Подставим известные значения

$$x_{G_1^{-\varepsilon}}^2 - \frac{4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}} + \frac{4c^4 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} - c^2 - x_{G_1^{-\varepsilon}}^2 = \varepsilon^2.$$

Приведем к общему знаменателю, а затем приведем подобные члены

$$\frac{(a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2)^{\frac{3}{2}} - 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2 \sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} - c^2 a^4}{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} = \varepsilon^2.$$

Сгруппируем слагаемые в числителе левой части равенства и получим выражение

$$\frac{a^4 (\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} - c^2)}{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2} = \varepsilon^2.$$

Выполним замену $t = \sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}$ и получим квадратное уравнение

$$\varepsilon^2 t^2 - a^4 t + a^4 c^2 = 0.$$

Решив это уравнение и выполнив обратную подстановку, получим окончательное выражение

$$x_{G_1^{-\varepsilon}} = \frac{a^2}{2c\varepsilon^2} \sqrt{\frac{a^4 - 2\varepsilon^2(\varepsilon^2 + c^2) - a^2 \sqrt{a^4 - 4c^2 \varepsilon^2}}{2}}. \quad (3.1)$$

Анализ выражения (3.1) показал, что для слоев $H^{-\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ результат состоит только из мнимой части комплексного числа, в то время как для остальных случаев результат состоит только из действительной части. Это означает, что, принимая во внимание только действительную часть результата выражения (3.1), мы получим выражение, справедливое как для гладких, так и негладких случаев $\partial^- H^{-\varepsilon}$.

Координаты точки негладкости $E_1^{\varepsilon^*} = (x_{E_1^{\varepsilon^*}}, y_{E_1^{\varepsilon^*}})$, соответствующие минимальной по величине негладкой границе $\partial^- H^{\varepsilon^*}$, определяются соотношениями

$$x_{E_1^{\varepsilon^*}} = \lim_{x_{G_1^{-\varepsilon}} \rightarrow 0} x_{E_1^{-\varepsilon}} = \lim_{x_{G_1^{-\varepsilon}} \rightarrow 0} \frac{2c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x_{G_1^{-\varepsilon}}^2}} = 0,$$

$$y_{E_1^{\varepsilon^*}} = 0.$$

Заметим, что для слоев $H^{-\varepsilon}$ значение ε ограничено. Максимальное значение ε соответствует тому, что $H^{-\varepsilon}$ полностью заполняет внутренность овала Кассини. Это возникает тогда, когда значение точки $x_{G_1^{-\varepsilon}}$ достигает x_{A_1} . Другими словами, максимальное значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ может быть найдено из равенства

$$x_{G_1^{\varepsilon_0}} = x_{A_1},$$

или проще

$$\varepsilon_0 = y_{A_1} = \frac{a^2}{2c}.$$

Запишем универсальное представление $x_{G_1^\varepsilon}$:

$$x_{G_1^\varepsilon} = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{\sqrt{4c^4 \varepsilon^4 + 3c^2 \varepsilon^2 a^4 + \frac{1}{2} a^2 (a^6 - (4c^2 \varepsilon^2 + a^4)^{\frac{3}{2}}) - \varepsilon^4 a^4}}{2c \varepsilon^2} \right) & \text{для } H^\varepsilon, \\ \operatorname{Re} \left(\frac{a^2}{2c \varepsilon^2} \sqrt{\frac{a^4 - 2\varepsilon^2(\varepsilon^2 + c^2) - a^2 \sqrt{a^4 - 4c^2 \varepsilon^2}}{2}} \right) & \text{для } H^{-\varepsilon}. \end{cases}$$

На рис. 18 представлен график зависимости $x_{G_1^\varepsilon}$ от ε . Слева от оси y представлен график зависимости координаты $x_{G_1^\varepsilon}$ для слоев $H^{-\varepsilon}$, а справа — для слоев H^ε .

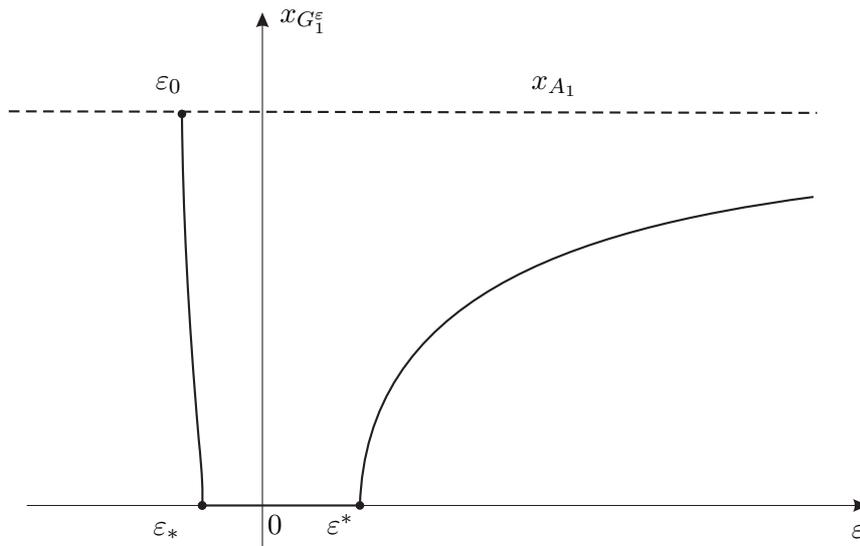


Рис. 18. Зависимость абсциссы $x_{G_1^\varepsilon}$ от ε

Площадь слоя $H^{-\varepsilon}$ также определяется формулой (2.1) при условии $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$. Однако при этом знак перед коэффициентом при ε^2 имеет противоположное поведение относительно случаев для слоя H^ε . То есть для слоя $H^{-\varepsilon}$ формула (2.1) принимает вид

$$S^-(\varepsilon) = l(\partial Z) \cdot \varepsilon - \pi \cdot \varepsilon^2.$$

Так, например, при расчете площадей фрагментов слоя $H^{-\varepsilon}$, расположенных под выпуклой частью границы Φ^c (см. рис. 16) и образованных углами μ_1 и μ_2 , коэффициент при ε^2 имеет отрицательный знак, а при расчете площади фрагмента, расположенного под вогнутой частью и образованного углом ν_1 , коэффициент при ε^2 имеет положительный знак. В частности может быть рассчитана площадь слоя $H^{-\varepsilon}$ для множества Φ .

Заключение

В результате исследования получены формулы, описывающие ε -слои вокруг односвязного множества, границей которого является гладкая невыпуклая (в общем случае) кривая с известным аналитическим представлением — овал Кассини.

Сформулирована и на примере схожего по геометрии невыпуклого односвязного множества с гладкой границей доказана теорема о справедливости применения формулы для расчета площади ε -слоя, окружающего выпуклые множества, для случаев невыпуклых множеств.

Дальнейшее развитие представленной работы предполагает исследование более общего случая односвязных невыпуклых множеств, граница которых состоит из бесконечного числа участков выпуклости и вогнутости. Также вызывает интерес расширение полученных результатов на частный случай овала Кассини с негладкой границей — лемнискату Бернулли.

Автор благодарит главного научного сотрудника Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук Ушакова Владимира Николаевича, а также научного сотрудника Ершова Александра Анатольевича за плодотворные обсуждения настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский А. А., Ушаков В. Н., Фомин А. Н. α -множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНТИ 02.04.2004, № 543-B2004.
2. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
3. Michael E. Paracompact sets // *Mathematica Scandinavica*. 1959. Vol. 7. No. 2. P. 312–315. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10583>
4. Ушаков В. Н., Успенский А. А. Теоремы об отделимости α -множеств в евклидовом пространстве // *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2016. Т. 22. № 2. С. 277–291. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-277-291>
5. Ушаков В. Н., Успенский А. А. α -множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120. <https://doi.org/10.20537/vm160109>
6. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Ershov A. A. Alpha sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their properties // *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA)*. 2017. <https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974026>
7. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Ершов А. А. Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их приложения в теории управления // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 261–272. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307>

8. Ushakov V. N., Ershov A. A., Pershakov M. V. Counterexamples in the theory of α -sets // *Mathematical optimization theory and operations research*. Cham: Springer, 2019. P. 329–340. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_26
9. Ершов А. А., Кувшинов О. А. О свойствах пересечения α -множеств // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2020. Т. 55. С. 79–92. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-06>
10. Ершов А. А., Першаков М. В. О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств // *VI Информационная школа молодого ученого*. Екатеринбург: Центральная научная библиотека УрО РАН, 2018. С. 143–150. <https://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017>
11. Ушаков В. Н., Ершов А. А. Оценка роста степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в терминах α -множеств // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т. 495. № 1. С. 100–106. <https://doi.org/10.31857/S268695432006017X>
12. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Матвийчук А. Р. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2021. Т. 315. С. 261–270. <https://doi.org/10.4213/tm4219>
13. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 12.09.2022

Принята в печать 17.10.2022

Кувшинов Олег Александрович, математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620 219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6827-1809>

E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Цитирование: О. А. Кувшинов. О геометрии овала Кассини, его мере невыпуклости и ε -слое // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2022. Т. 60. С. 34–57.

Keywords: Cassini oval, α -sets, ε -offset layer, non-convex set, approximation calculation.

MSC2020: 51N05

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-03

The paper studies the geometry of a closed nonconvex smooth simply connected curve on a plane — of the Cassini oval, as well as the geometry of the ε -layer around the set whose boundary is the Cassini oval. Various analytical representations of the ε -layer boundary are formed, and special points of this boundary are described. The measure of nonconvexity α of a simply connected set whose boundary is the Cassini oval is determined, and the angular characteristic of nonconvexity of its ε -neighborhood is defined.

REFERENCES

1. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Fomin A. N. *α -sets and their properties*, IMM UB RAS, Yekaterinburg, 2004. 62 p. Deposited in VINITI 02.04.2004, no. 543-B2004 (in Russian).
2. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* (Weak convex sets and functions: theory and applications), Moscow: Fizmatlit, 2006.
3. Michael E. Paraconvex sets, *Mathematica Scandinavica*, 1959, vol. 7, no. 2, pp. 312–315. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10583>
4. Ushakov V. N., Uspenskii A. A. Theorems on the separability of α -sets in Euclidean space, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 231–245. <https://doi.org/10.1134/S0081543817090255>
5. Ushakov V. N., Uspenskii A. A. α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 95–120 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160109>
6. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Ershov A. A. α -sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their properties, *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA)*, 2017. <https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974026>
7. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Ershov A. A. α -sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their applications on control theory, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, issue 3, pp. 261–272 (in Russian). <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307>
8. Ushakov V. N., Ershov A. A., Pershakov M. V. Counterexamples in the theory of α -sets, *Mathematical optimization theory and operations research*, Cham: Springer, 2019, pp. 329–340. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_26
9. Ershov A. A., Kuvshinov O. A. On properties of intersection of α -sets, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 79–92 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-06>
10. Ershov A. A., Pershakov M. V. On matching up the α -sets with other generalizations of convex sets, *VI Information school of a young scientist*, Yekaterinburg: Central Scientific Library, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2018, pp. 143–150 (in Russian). <https://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017>
11. Ushakov V. N., Ershov A. A. Estimation of the growth of the degree of nonconvexity of reachable sets in terms of α -sets, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, pp. 532–537. <https://doi.org/10.1134/S1064562420060198>
12. Ushakov V. N., Ershov A. A., Matviychuk A. R. On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2021, vol. 315, pp. 247–256. <https://doi.org/10.1134/S0081543821050199>

13. Leichtweiß K. *Von Konvexe Mengen*, Berlin: Springer, 1980.
Translated under the title *Vypuklye mnozhestva*, Moscow: Nauka, 1985.

Received 12.09.2022

Accepted 17.10.2022

Oleg Aleksandrovich Kuvshinov, Mathematician, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6827-1809>

E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Citation: O. A. Kuvshinov. About the geometry of the Cassini oval, its non-convexity degree and ε -offset layer, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 60, pp. 34–57.