

УДК 514.174.3, 519.711.72

© П. Д. Лебедев, А. А. Лемперт, А. Л. Казаков

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР В ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕТРИКЕ

Рассматривается задача о построении наиболее эффективного (тончайшего) покрытия выпуклого множества на плоскости набором однотипных элементов. В качестве меры удаленности двух точек множества выступает наименьшее время, за которое можно попасть из одной точки в другую, и границей каждого покрывающего круга является изохрона. Подобные задачи возникают в приложениях, в частности, в системах гидролокации и подводного наблюдения. Для решения задач покрытия такими кругами и шарами ранее нами были предложены алгоритмы, основанные как на вариационных принципах, так и на основе геометрических методов. Целью настоящей статьи является построение покрытий в случае, когда характеристики среды изменяются во времени. Для решения указанной задачи предложен вычислительный алгоритм, основанный на теории волновых фронтов. Доказано утверждение о свойствах метода. Выполнены иллюстрирующие расчеты.

Ключевые слова: оптимальное покрытие, волновой фронт, динамическая метрика, чебышёвский центр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-04

Введение

Задачи о внешней (покрытие) и внутренней (упаковка) аппроксимации множества с помощью набора однотипных элементов известна еще со времен Лагранжа и Гаусса. Для случая, когда элементы являются кругами, показано, что плотнейшая упаковка и тончайшее покрытие имеют гексагональную структуру [1, 2]. Однако для ограниченных множеств такую структуру вблизи границ для упаковки соблюсти невозможно. Для покрытия же это может привести к возрастанию избыточности, иначе говоря, площади покрытия, выходящей за границы множества. Несмотря на долгую историю изучения, существует сравнительно небольшое количество доказанных оптимальных покрытий и упаковок [3–5], причем они найдены для простейших множеств: круга, квадрата, треугольника. Зачастую, авторы, не предьявляя конкретных покрытий и упаковок, строят теоретические оценки их плотности [6, 7].

В случае более сложных множеств и с ростом количества аппроксимирующих элементов, исследователям приходится применять численные методы. Соответственно, здесь речь идет о наилучших из известных (best-of-known), допустимых (feasible) или локально-оптимальных аппроксимациях [8, 9].

Численному исследованию указанных задач и различных их модификаций посвящены, без преувеличения, сотни работ. Поскольку подробный обзор не является целью данной статьи, отметим лишь некоторые из них. В целом, можно выделить методы, основанные либо на сведении к задачам математического программирования (линейного и нелинейного, непрерывного и целочисленного), либо использующие эвристики различной природы (пространственный поиск, биоинспирированные, бильярдное моделирование, волновые принципы и др.) [10–12].

В частности, в работах [13, 14] авторы преобразуют задачу упаковки в задачу линейного целочисленного программирования большой размерности. В работе [15] разработана модификация метода возможных направлений для нахождения локального минимума и пред-

ставлены оптимальные покрытия до 100 кругов. В [16] авторы предлагают алгоритм ветвей и границ, который позволяет найти оптимальное покрытие с произвольной точностью.

Из наиболее известных эвристических методов выделим поиск с чередующимися окрестностями (Variable Neighborhoods Search) [17], FSS (Formulation Space Search) [18, 19], жадный поиск [20]. В работах [21, 22] авторы используют силы отталкивания для «раздвигания» кругов и максимизации их радиусов. Укажем особо работу [23], в которой авторы также предлагают алгоритм, позволяющий задать неевклидову метрику.

Отметим, что задачи построения покрытий и упаковок тесно связаны с приложениями. Они возникают при изучении структуры минералов [24], при размещении логистических объектов [16, 25, 26], при проектировании систем сенсоров [27, 28], в мониторинге загрязнения воды и воздуха [29], при организации систем видеонаблюдения [30–32].

Подход, развиваемый в данной статье, относится к эвристикам на основе физических принципов: используется аналогия между распространением света в оптически неоднородной среде и минимизацией интегрального функционала, задающего метрику [33]. В качестве меры удаленности двух точек выступает наименьшее время, за которое можно попасть из одной точки в другую. Иначе говоря, границей упаковываемого или покрываемого круга является изохрона. Подобные задачи возникают в приложениях, в частности, в системах гидролокации [34, 35] и подводного наблюдения [36], когда радиус обзора напрямую зависит от оптической проницаемости среды. Для решения задач покрытия такими кругами и шарами ранее нами были предложены алгоритмы, основанные как на уже упоминавшейся оптико-геометрической аналогии [37–40], так и на основе геометрических методов [41, 42]. Целью настоящей статьи является построение покрытий в случае, когда характеристики среды изменяются во времени.

§ 1. Постановка задачи

Пусть задано компактное множество M на плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть на множестве $D^* \subset [0, \vartheta] \times D$ задана липшицева положительная функция $f(t, x, y)$. Будем считать расстоянием между точками $\mathbf{a} \in D$ и $\mathbf{b} \in D$ в вариационной динамической метрике

$$\rho_f^{t_0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\Gamma \in G(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(t, x, y)}, \quad (1.1)$$

где $G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — множество всех спрямляемых кривых, вложенных в D , соединяющих точки \mathbf{a} и \mathbf{b} . Параметр t при этом изменяется от t_0 непрерывно при движении по кривой Γ на величину, равную времени распространения сигнала со скоростью $f(t, x, y)$ вдоль кривой Γ .

Пусть заданы момент времени t_0 и функция $f(t, x, y)$. Требуется найти такую точку $\mathbf{x} \in D$, чтобы величина

$$H(M, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{m} \in M} \rho_f^{t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) \quad (1.2)$$

была минимальной при всех $\mathbf{x} \in D$. Множество точек

$$O_f^{t_0}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \rho_f^{t_0}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq r\}$$

будем называть «кругом» в динамической метрике. Величину $r > 0$ будем считать «радиусом» этого «круга».

В более общей постановке требуется найти набор $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ из заданного числа точек n такой, чтобы величина

$$H(M, X) = \min_{\mathbf{x}_i \in X} H(M, \mathbf{x}_i) \quad (1.3)$$

была минимальной при всех $X \subset D$. Точки из массива X служат центрами «кругов» в динамической метрике, которые образуют покрытие компакта M при их минимально возможном «радиусе».

§ 2. Алгоритмы решения задачи

2.1. Случай покрытия из одного элемента

Рассмотрим вопрос о вычислении величины (1.1) для заданной точки $(x_0, y_0) = \mathbf{x}_0$ и об отыскании новой точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$, которая должна стать центром «круга» меньшего радиуса в динамической метрике. Ограничимся случаем, когда множество M — выпуклый многоугольник P с набором упорядоченных вершин \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, p$. Зададим число точек разбиения волнового фронта на отрезки N и шаг по времени Δt . Затем строятся волновые фронты $\Phi^{(j)}$, ограничивающие «круги» $U^{(j)}$ радиуса $j\Delta t$ в динамической метрике.

1. Вычисляется значение текущей величины $v_0 = f(t_0, x_0, y_0)$. Выполняется построение окружности $\partial O(\mathbf{x}_0, v_0)\Delta t$ и построение на ней N точек $\mathbf{f}_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, N$, в вершинах правильного N -угольника, вписанного в окружность (против часовой стрелки). Он считается первым волновым фронтом $\Phi^{(1)}$. Установка счетчика $j = 1$.

2. Для каждой точки $\mathbf{f}_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, N$, строится вектор, направленный по биссектрисе угла, образованного отрезками, соединяющими ее с соседними. На внешнем направлении от текущего фронта откладывается отрезок длины $f(t_j, x_i^{(j)}, y_i^{(j)})\Delta t$. Его конец принимается в качестве точки $\mathbf{f}_i^{(j+1)}$.

3. Выполняется анализ, вложен ли многоугольник P в область $U^{(j)}$, ограниченную фронтом $\Phi^{(j)}$. Для этого проверяется, входит ли каждая вершина в многоугольную область $U^{(j)}$. Затем для каждой стороны многоугольника проверяется, есть ли пересечение с той частью фронта $\Phi^{(j)}$, который ограничивает область $U^{(j)}$.

4. Если не выполняется условие $P \subset U^{(j)}$, то переход к пункту 2.

5. Записывается массив вершин, которые покрыты волновым фронтом только на последнем шаге. Записывается массив сторон, которые были покрыты волновым фронтом только на последнем шаге. Инкремент счетчика $j := j + 1$.

6. Строится аппроксимация волнового фронта, который строго покрывает множество P . Для этого строится линейная аппроксимация волнового фронта

$$\widetilde{\Phi}^{(j)}(\alpha) = \alpha\Phi^{(j)} + (1 - \alpha)\Phi^{(j-1)},$$

набор ломаных с вершинами $\widetilde{\mathbf{f}}_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, N$.

7. Выделяется набор точек $\mathbf{m}_k \in \partial P$, которые лежат на аппроксимации фронта $\widetilde{\Phi}^{(j)}(\alpha)$, который первым строго покрывает многоугольник P . Строятся аппроксимации траекторий T_k , которые в динамической метрике ведут от \mathbf{x}_0 к точкам \mathbf{m}_k , путем вычисления номеров точек на концах того отрезка $\widetilde{\Phi}^{(j)}(\alpha)$, который содержит каждую из точек \mathbf{m}_k , а затем их линейной комбинации, которая совпадает с \mathbf{m}_k , т. е. находятся числа i^* и β такие, что $\mathbf{m}_k = \beta\widetilde{\mathbf{f}}_{i^*}^{(j)} + (1 - \beta)\widetilde{\mathbf{f}}_{i^*+1}^{(j)}$. В качестве T_k принимается ломаная с вершинами \mathbf{x}_0 , $\mathbf{f}_{i^*}^{(1)} + (1 - \beta)\mathbf{f}_{i^*+1}^{(1)}$, $\mathbf{f}_{i^*}^{(2)} + (1 - \beta)\mathbf{f}_{i^*+1}^{(2)}$, \dots , $\beta\mathbf{f}_{i^*}^{(j)} + (1 - \beta)\mathbf{f}_{i^*+1}^{(j)}$, $\beta\widetilde{\mathbf{f}}_{i^*}^{(j)} + (1 - \beta)\widetilde{\mathbf{f}}_{i^*+1}^{(j)}$.

8. Для построения новой аппроксимации $\widehat{\mathbf{x}}_0$ строится набор векторов $W = \{\mathbf{w}_k\}$, равных разности аппроксимаций начала траекторий T_k , лежащих на $\Phi^{(1)}$. Затем координаты нового центра вычисляются по формуле

$$\widehat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 + \gamma\mathbf{c}(W), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{c}(W)$ — чебышёвский центр множества W , параметр $\gamma \in (0, 1)$ выбирается в зависимости от настроек программного комплекса.

9. В качестве аппроксимации величины $H(M, \mathbf{x}_0)$ берется $(j + \alpha - 1)\Delta t$.

10. Вывод результатов и конец работы.

2.2. Случай покрытия из нескольких элементов

Если разработан приемлемый алгоритм решения задачи для одной точки, то на его базе можно перейти к случаю массива из нескольких точек. Пусть задан массив $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n \subset D$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Обобщенной зоной Дирихле точки \mathbf{x}_i из массива X в компакте M назовем множество

$$Z^{(i)}(M, X) \triangleq \left\{ \mathbf{m} \in M : \rho_f^{t_0}(\mathbf{m}, \mathbf{x}_i) = \min_{j=1, n} \rho_f^{t_0}(\mathbf{m}, \mathbf{x}_j) \right\}. \quad (2.2)$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Множеством обобщенных центров компакта M назовем

$$C(M) \triangleq \left\{ \mathbf{c} \in D : H(M, \mathbf{c}) = \min_{\mathbf{d} \in D} H(M, \mathbf{d}) \right\}. \quad (2.3)$$

Для текущего массива X следующая его итерация $\widehat{X} = \{\widehat{\mathbf{x}}_i\}_{i=1}^n \subset D$ строится по следующему алгоритму. Для каждого $i = \overline{1, n}$ вычисляется $Z^{(i)}(M, X)$. Если $Z^{(i)}(M, X) \neq \emptyset$, то

$$\widehat{\mathbf{x}}_i := \mathbf{c}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{c} — произвольная точка из $C(Z^{(i)}(M, X))$. Если $Z^{(i)}(M, X) = \emptyset$, то

$$\widehat{\mathbf{x}}_i := \mathbf{m}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{m} — произвольная точка из M .

Т е о р е м а 2.1. Пусть задан массив центров «кругов» $X \subset D$ из n элементов. Тогда для массива $\widehat{X} \subset D$, построенного по формулам (2.4), (2.5), справедлива оценка

$$H(M, \widehat{X}) \leq H(M, X). \quad (2.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $I = \{i \in \overline{1, n} : Z^{(i)}(M, X) \neq \emptyset\}$. Согласно формуле (2.3) имеет место

$$M = \bigcup_{i \in I} Z^{(i)}(M, X). \quad (2.7)$$

Согласно формуле (2.2), можно записать равенство

$$H(M, X) = \max_{i \in I} H(Z^{(i)}(M, X), \mathbf{x}_i). \quad (2.8)$$

Из определения (2.2) следует, что для $i \in I$ полученная по формуле (2.4) точка $\widehat{\mathbf{x}}_i$ удовлетворяет оценке

$$H(Z^{(i)}(M, X), \widehat{\mathbf{x}}_i) \leq H(Z^{(i)}(M, X), \mathbf{x}_i). \quad (2.9)$$

Из (2.7) и (2.9) вытекает

$$H(M, \widehat{X}) \leq \max_{i \in I} H(Z^{(i)}(M, X), \widehat{\mathbf{x}}_i) \leq \max_{i \in I} H(Z^{(i)}(M, X), \mathbf{x}_i).$$

Из последнего неравенства и равенства (2.8) следует оценка (2.6). \square

З а м е ч а н и е 1. Для каждой точки $\widehat{\mathbf{x}}_i$ с номером $i \notin I$ обобщенная зона Дирихле $Z^{(i)}(M, \widehat{X})$ будет непустым множеством, поскольку в множестве, согласно (2.5), можно выделить сколь угодно малую окрестность точки $\widehat{\mathbf{x}}_i$, которая пересекается с M . А значит, сигнал в эту часть M приходит от $\widehat{\mathbf{x}}_i$ быстрее, чем от любой несовпадающей с ней точки из \widehat{X} .

§3. Примеры решения задач

На базе алгоритма, предложенного в § 2, модернизирован программный комплекс [45] построения оптимального покрытия множества. Он находит аппроксимацию минимума функции (1.2) на множестве D .

Рассмотрим задачу о построения оптимального покрытия квадрата

$$M = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \quad (3.1)$$

в динамической среде с метрикой (1.1), в которой скорость распространения сигнала равна

$$f(t, x, y) = f_0 + atx + bty \quad (3.2)$$

при различных f_0 , a , b и разных начальных моментах времени t_0 . Для «кругов» в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.2) являются кругами в евклидовой метрике. Но координаты центра в динамической метрике и чебышёвского центра круга в общем случае не совпадают.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу о покрытии при $f_0 = 2.5$, $a = 0.25$, $b = 0.125$. Моменты времени t_0 берутся от 0 до 4 с шагом 0.4.

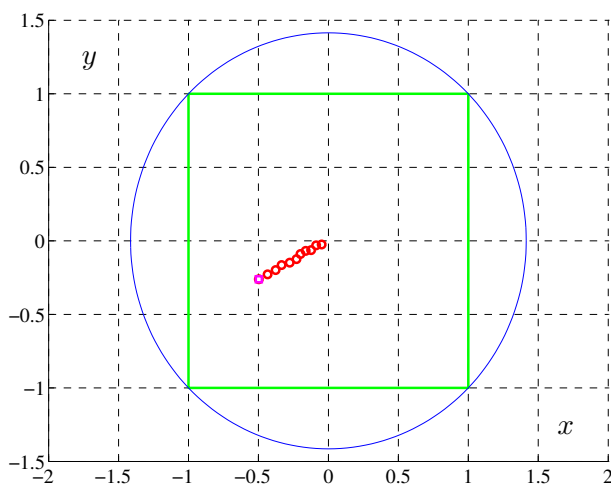


Рис. 1. Центры «кругов» оптимального покрытия в примере 3.1

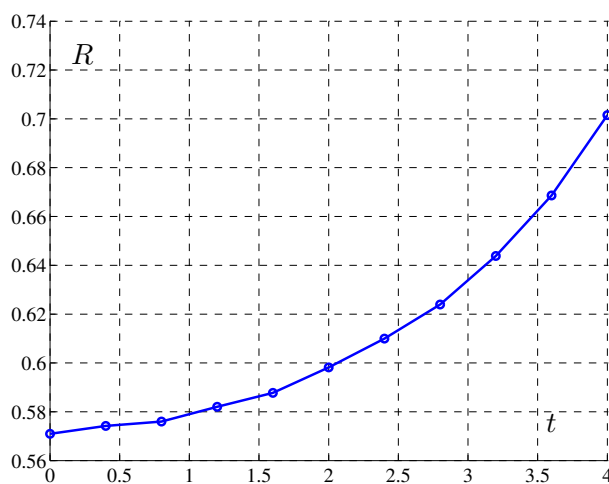


Рис. 2. Радиусы «кругов» оптимального покрытия в примере 3.1

Точка, соответствующая последнему моменту времени, выделена фиолетовым цветом. Угол наклона прямой, на которой находятся центры, примерно равен -0.5384 .

Пример 3.2. Рассмотрим задачу о покрытии при $f_0 = 3$, $a = 1/3$, $b = 1/9$. Моменты времени t_0 берутся от 0 до 4 с шагом 0.4.

Угол наклона прямой, на которой находятся центры, примерно равен -0.3308 .

Пример 3.3. Рассмотрим задачу о покрытии при $f_0 = 3$, $a = 0.25$, $b = 0.25$. Моменты времени t_0 берутся от 0 до 4 с шагом 0.4.

Угол наклона прямой, на которой находятся центры, примерно равен -0.9259 .

В примерах 3.1–3.3 видно, что с увеличением начального момента времени t_0 центр «круга» оптимального покрытия в динамической метрике все дальше отходит от чебышёвского центра компакта M . При этом «радиус» круга $O_f^{t_0}(c, r)$ увеличивается, что связано с уменьшением скорости распространения сигнала при уменьшении абсциссы и ординаты согласно формуле (3.2) при положительных a и b .

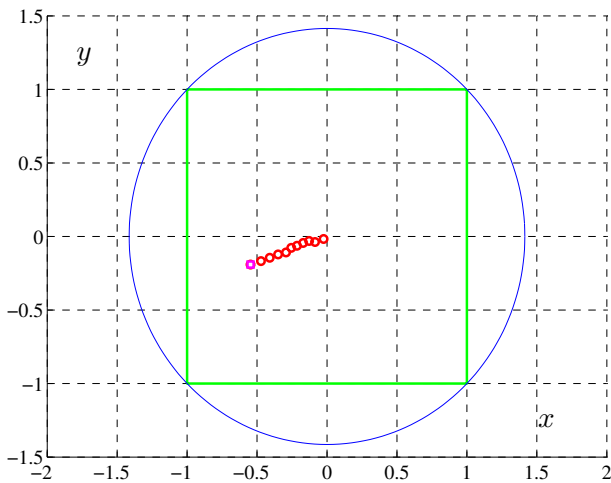


Рис. 3. Центры «кругов» оптимального покрытия в примере 3.2

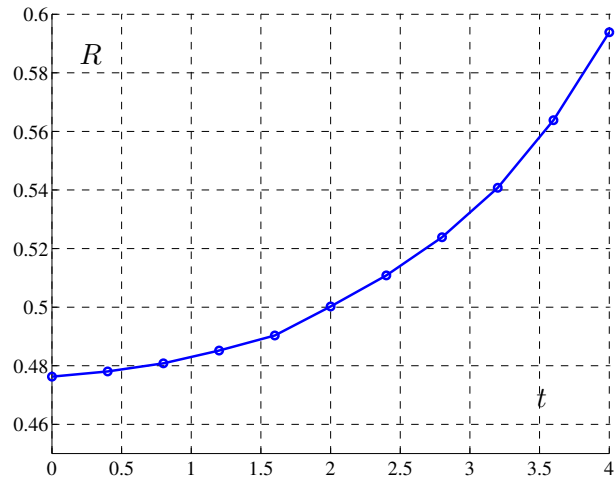


Рис. 4. Радиусы «кругов» оптимального покрытия в примере 3.2

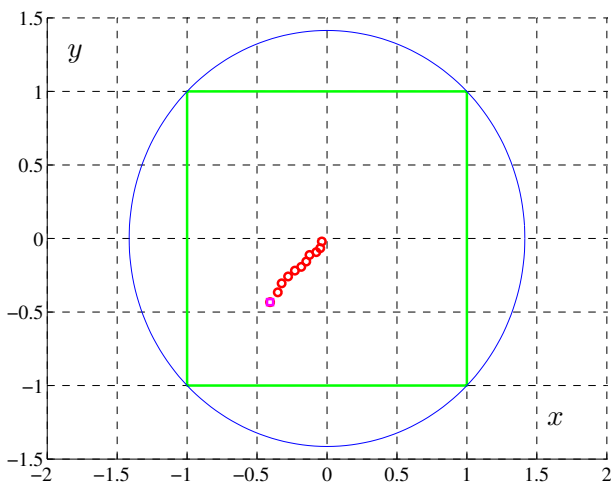


Рис. 5. Центры «кругов» оптимального покрытия в примере 3.3

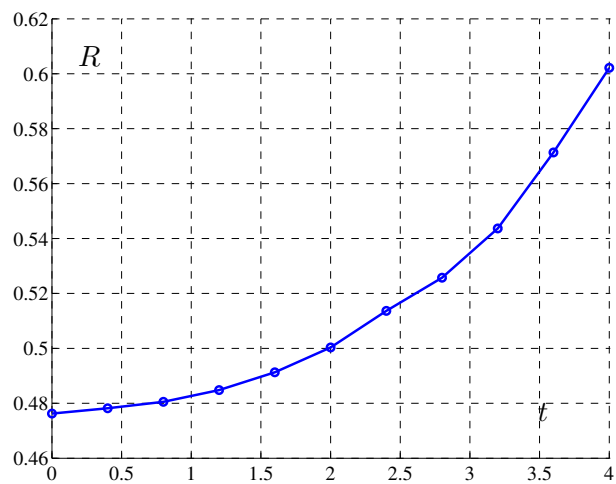


Рис. 6. Радиусы «кругов» оптимального покрытия в примере 3.3

Пример 3.4. Рассмотрим задачу о покрытии для множества (3.1) при скорости распространения сигнала в среде

$$f(t, x, y) = \frac{2}{(x-2)^2 + (y-1)^2 + 1} + 0.25t + 0.25 \quad (3.3)$$

при начальном моменте времени $t_0 = 0$. Координаты центра «круга» в динамической метрике $x_0 = (-0.1285, -0.0444)$, его радиус $R = 1.4514$. В примере 3.4 форма «круга» в динамической метрике существенно отличается от круга в евклидовой метрике.

Перейдём к более сложным задачам о покрытии в динамической метрике наборами из нескольких элементов. Их построение выполняется на базе алгоритмов, реализующих формулы (2.4), (2.5). Корректность их работы основывается на теореме 2.1. Они строят аппроксимацию массива $X \subset D$, для которого минимально значение величины (1.3).

Пример 3.5. Рассмотрим задачу о построения оптимального покрытия прямоугольника

$$M = \{(x, y) : |x| \leq 1.5, |y| \leq 1\} \quad (3.4)$$

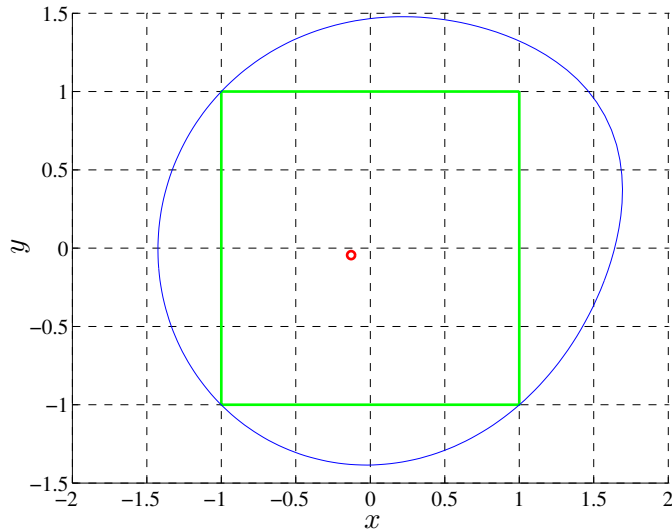


Рис. 7. Покрытие множества (3.1) в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.3)

при скорости распространения сигнала в среде (3.3) набором из двух «кругов» при начальном моменте времени $t_0 = 0$ и $t_0 = 1$.

При $t_0 = 0$ координаты центров «кругов» $\mathbf{x}_1 = (-1.130, -0.017)$ и $\mathbf{x}_2 = (0.253, -0.122)$, их «радиус» в вариационной метрике $R = 1.7306$. Покрытие показано на рис. 8.

При $t_0 = 1$ координаты центров «кругов» $\mathbf{x}_1 = (-1.076, -0.015)$ и $\mathbf{x}_2 = (0.347, -0.106)$, их «радиус» в вариационной метрике $R = 1.3373$. Покрытие показано на рис. 9.

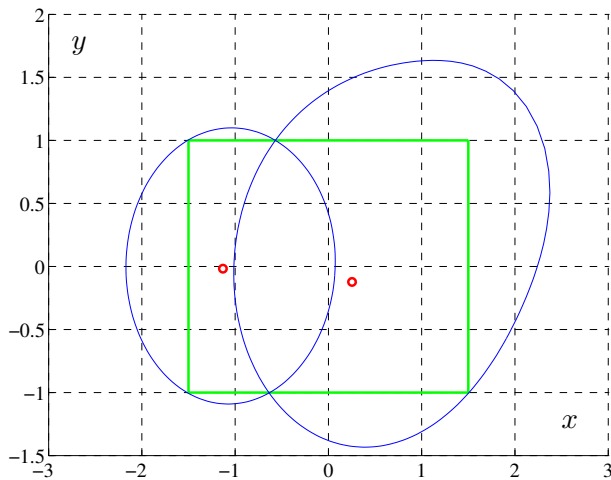


Рис. 8. Покрытие множества (3.4) в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.3) двумя «кругами» при $t_0 = 0$

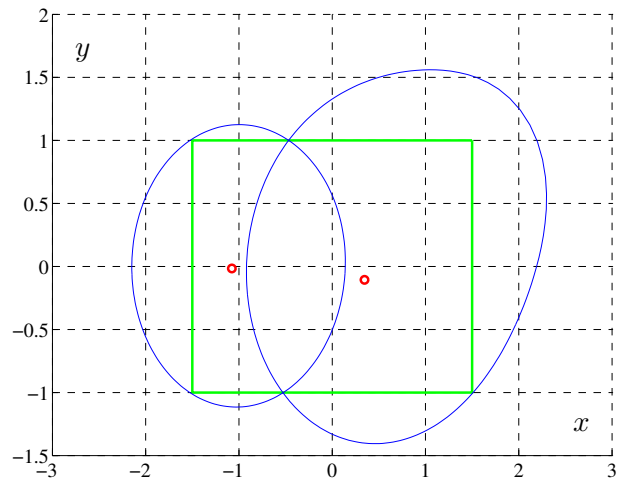


Рис. 9. Покрытие множества (3.4) в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.3) двумя «кругами» при $t_0 = 1$

Пример 3.6. Рассмотрим задачу о построения оптимального покрытия прямоугольника (3.4) при скорости распространения сигнала в среде (3.3) набором из трёх «кругов» при начальном моменте времени $t_0 = 0$ и $t_0 = 1$.

При $t_0 = 0$ координаты центров «кругов» $\mathbf{x}_1 = (-0.874, -0.480)$, $\mathbf{x}_2 = (0.539, -0.240)$, $\mathbf{x}_3 = (-0.761, 0.529)$, их «радиус» в вариационной метрике $R = 1.4175$. Покрытие показано на рис. 10.

При $t_0 = 1$ координаты центров «кругов» $\mathbf{x}_1 = (0.458, -0.101)$, $\mathbf{x}_2 = (-1.373, -0.012)$, $\mathbf{x}_3 = (-0.810, -0.026)$, их «радиус» в вариационной метрике $R = 1.2675$. Покрытие показано на рис. 11. Заметим, что при $t_0 = 0$ все три «круга» $O_f^{t_0}(\mathbf{x}_i, R)$, $i = \overline{1, 3}$, имеют общую

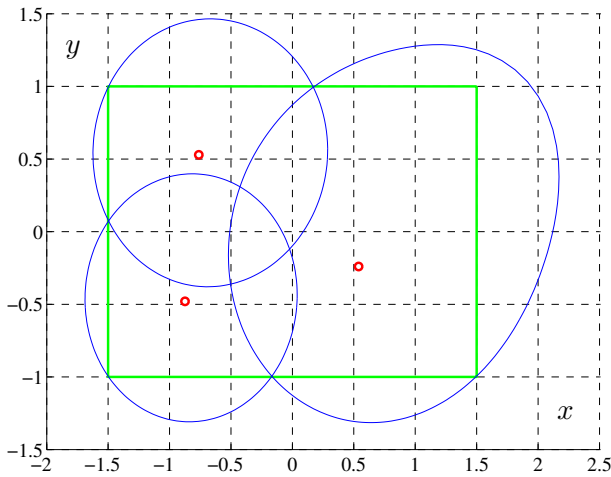


Рис. 10. Покрытие множества (3.4) в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.3) тремя «кругами» при $t_0 = 0$

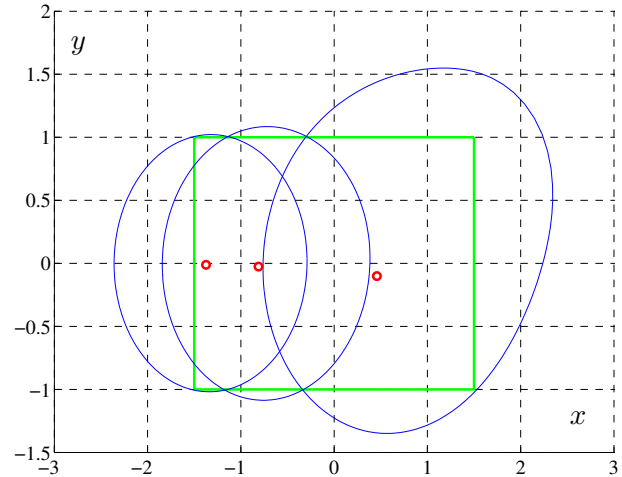


Рис. 11. Покрытие множества (3.4) в динамической метрике со скоростью распространения сигнала (3.3) тремя «кругами» при $t_0 = 1$

область. При $t_0 = 1$ «круги» $O_f^{t_0}(\mathbf{x}_1, R)$ и $O_f^{t_0}(\mathbf{x}_2, R)$ не пересекаются.

В примерах 3.4–3.6 форма «кругов» в динамической метрике существенно отличается от круга в евклидовой метрике. Это обусловлено тем, что среда является сферически-слоистой, скорость распространения сигнала в фиксированный момент времени определяется расстоянием от точки $\check{\mathbf{x}} = (2, 1)$. При этом радиус «кругов» покрытия с увеличением начального момента времени уменьшается, поскольку с ростом t увеличивается скорость распространения сигнала согласно формуле (3.3). «Круги» с центром в точке \mathbf{x} имеют ось симметрии, проходящую через точки \mathbf{x} и $\check{\mathbf{x}}$. В случае $\mathbf{x} = \check{\mathbf{x}}$ «круги» в вариационной метрике будут и кругами в евклидовой метрике, но их «радиусы» не будут совпадать с радиусами в обычном понимании.

§ 4. Заключение

Основным итогом исследования является то, что полученные ранее результаты по построению оптимальных покрытий ограниченных множеств в неевклидовой метрике частично перенесены на динамический случай. Рассмотрение подобных задач актуально в связи с приложениями, поскольку зачастую зона действия различных сенсоров зависит от погоды и иных природно-климатических факторов, которые обладают большой вариативностью. При этом учет возможности изменения среды со временем приводит к существенному усложнению постановки. Тем не менее, авторам удалось разработать и реализовать вычислительный алгоритм для решения данной задачи, эффективность которого протестирована на модельных примерах. Обосновать сходимость алгоритма пока не удалось (и не факт, что это вообще возможно), однако было доказано утверждение о его свойствах.

В качестве перспективного приложения полученных результатов можно рассмотреть проблему моделирования движения группировки подводных роботов, целью которой является сплошной мониторинг дна водоема. При этом радиус действия системы сенсоров у аппаратов может быть различным и зависеть от состояния окружающей среды, которая, в свою очередь, может изменяться со временем. Помимо прикладных задач, возможно

и сугубо математическое развитие проведенных исследований, в частности, в направлении доказательства утверждений о свойствах вычислительных алгоритмов.

Финансирование. Исследования Лемперт А. А. выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований», № гос. регистрации: 121041300065-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tóth L. F. Regular figures. London: Pergamon Press, 1964.
2. Tóth L. F. Solid circle-packings and circle-coverings // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*. 1968. Vol. 3. P. 401–409.
3. Heppes A. Covering a planar domain with sets of small diameter // *Periodica Mathematica Hungarica*. 2006. Vol. 53. P. 157–168. <https://doi.org/10.1007/s10998-006-0029-9>
4. Szabó P. G., Specht E. Packing up to 200 equal circles in a square // *Models and algorithms for global optimization*. New York: Springer, 2007. P. 141–156. https://doi.org/10.1007/978-0-387-36721-7_9
5. Tóth G. F. Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles // *Combinatorial and Computational Geometry*. 2005. Vol. 52. P. 361–376.
6. Тахонов И. И. О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // *Дискретный анализ и исследование операций*. 2014. Т. 21. Вып. 1. С. 84–102. <http://mi.mathnet.ru/da762>
7. Dorninger D. Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles // *Analysis and Geometry in Metric Spaces*. 2017. Vol. 5. Issue 1. P. 40–46. <https://doi.org/10.1515/agms-2017-0002>
8. Specht E. Packomania [Electronic Resources URL: <http://www.packomania.com>]. Дата обращения 10.06.2022.
9. Erich's Packing Center [Electronic Resources URL: <https://erich-friedman.github.io/packing/index.html>]. Дата обращения 10.06.2022.
10. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.
11. Hifi L. M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies // *Advances in Operations Research*. 2009. Vol. 2009. Article ID: 150624. <https://doi.org/10.1155/2009/150624>
12. Nurmela K. J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // *Experimental Mathematics*. 2000. Vol. 9. Issue 2. P. 241–250. <https://doi.org/10.1080/10586458.2000.10504649>
13. Galiev S. I., Lisafina M. S. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain // *European Journal of Operation Research*. 2013. Vol. 230. Issue 3. P. 505–514. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.050>
14. Litvinchev I., Ozuna L. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container // *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. Vol. 2014. Article ID: 317697. <https://doi.org/10.1155/2014/317697>
15. Stoyan Y. G., Patsuk V. M. Covering a compact polygonal set by identical circles // *Computational Optimization and Applications*. 2010. Vol. 46. Issue 1. P. 75–92. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9191-8>
16. Bánhelyi B., Palatinus E., Lévai B. L. Optimal circle covering problems and their applications // *Central European Journal of Operations Research*. 2015. Vol. 23. Issue 4. P. 815–832. <https://doi.org/10.1007/s10100-014-0362-7>
17. Pardo E. G., Mladenović N., Pantrigo J. J., Duarte A. Variable formulation search for the cutwidth minimization problem // *Applied Soft Computing*. 2013. Vol. 13. Issue 5. P. 2242–2252. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.01.016>
18. López C. O., Beasley J. E. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers // *European Journal of Operational Research*. 2011. Vol. 214. Issue 3. P. 512–525. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.024>

19. López C.O., Beasley J.E. Packing a fixed number of identical circles in a circular container with circular prohibited areas // *Optimization Letters*. 2019. Vol. 13. Issue 7. P. 1449–1468.
<https://doi.org/10.1007/s11590-018-1351-x>
20. Huang W., Ye T. Greedy vacancy search algorithm for packing equal circles in a square // *Operations Research Letters*. 2010. Vol. 38. Issue 5. P. 378–382. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2010.07.004>
21. Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Östergård P.R.J. Dense packings of congruent circles in a circle // *Discrete Mathematics*. 1998. Vol. 181. Issues 1–3. P. 139–154.
[https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(97\)00050-2](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00050-2)
22. Lubachevsky B.D. How to simulate billiards and similar systems // *Journal of Computational Physics*. 1991. Vol. 94. Issue 2. P. 255–283. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(91\)90222-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(91)90222-7)
23. Torres–Escobar R., Marmolejo–Saucedo J.A., Litvinchev I. Binary monkey algorithm for approximate packing non-congruent circles in a rectangular container // *Wireless Networks*. 2020. Vol. 26. Issue 7. P. 4743–4752. <https://doi.org/10.1007/S11276-018-1869-Y>
24. Макагонов Е. П. Эффективное покрытие пространства координационными сферами — основной принцип строения и конституции минералов // *Минералогия*. 2015. № 4. С. 3–18.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25012694>
25. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50. № 4. С. 757–769. <https://elibrary.ru/item.asp?id=13726048>
26. Kazakov A.L., Lempert A.A. On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure // *International Journal of Artificial Intelligence*. 2015. Vol. 13. No. 1. P. 200–210.
<http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijai/article/view/3537>
27. Erzin A., Lagutkina N., Ioramishvili N. Barrier covering in 2d using mobile sensors with circular coverage areas // *Learning and intelligent optimization*. Cham: Springer, 2020. P. 342–354.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-38629-0_28
28. Han C., Sun L., Xiao F., Guo J. An energy efficiency node scheduling model for spatial-temporal coverage optimization in 3d directional sensor networks // *IEEE Access*. 2016. Vol. 4. P. 4408–4419.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2592184>
29. Arun D., Pais A.R. Optimal placement of sensor nodes for water quality measurement // *2015 Twelfth International Conference on Wireless and Optical Communications Networks (WOCN)*. IEEE, 2015.
<https://doi.org/10.1109/WOCN.2015.8064508>
30. Печенкин В. В., Королёв М. С. Оптимизация размещения средств наблюдения в трёхмерной сцене с целью минимизации «слепых зон» // *Компьютерная оптика*. 2017. Т. 41. № 2. С. 245–253.
<https://doi.org/10.18287/2412-6179-2017-41-2-245-253>
31. Jun S., Chang T.-W., Jeong H., Lee S. Camera placement in smart cities for maximizing weighted coverage with budget limit // *IEEE Sensors Journal*. 2017. Vol. 17. Issue 23. P. 7694–7703.
<https://doi.org/10.1109/jsen.2017.2723481>
32. Wu H., Zhu H., Han X. An improved k -angle coverage algorithm for multimedia wireless sensor networks based on two-layer tabu search // *Peer-to-Peer Networking and Applications*. 2021. Vol. 15. Issue 1. P. 28–44. <https://doi.org/10.1007/s12083-021-01188-1>
33. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // *Автоматика и телемеханика*. 2011. Вып. 7. С. 50–57.
<http://mi.mathnet.ru/at2243>
34. Келлер Дж. Б., Пападакис Дж. С. Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980.
35. Orlando D., Ehlers F. *Advances in multistatic sonar* // *Sonar systems*. London: IntechOpen, 2011.
36. Фищенко В. К., Зимин П. С., Зацерковный А. В., Гончарова А. А., Суботэ А. Е., Голик А. В. Стационарные системы подводного видеонаблюдения: возможности применения для мониторинга биоты прибрежных акваторий залива Петра Великого (Японское море) // *Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук*. 2018. № 1. С. 149–160.
<http://www.vestnikdvo.ru/index.php/vestnikdvo/article/view/30>

37. Казаков А. Л., Лемперт А. А., Нгуен Г. Л. Алгоритм построения оптимальных покрытий равными кругами невыпуклых многоугольников с неевклидовой метрикой // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 5 (112). С. 45–55.
<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2016-5-45-55>
38. Lempert A. A., Le Q. M. Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 32. P. 850–854. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.439>
39. Lempert A. A., Kazakov A. L., Le Q. M. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics // Yugoslav Journal of Operations Research. 2019. Vol. 29. Issue 1. P. 69–79.
<https://doi.org/10.2298/yjor1711120101>
40. Kazakov A. L., Lempert A. A., Та Т. Т. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 782–787.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.450>
41. Лебедев П. Д., Казаков А. Л. Построение оптимальных покрытий выпуклых плоских фигур кругами различного радиуса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 137–148. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-137-148>
42. Лебедев П. Д. Итерационные методы построения аппроксимаций оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств // Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4. № 1. С. 5–17. <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14101>
43. Preparata F. P., Shamos M. I. Computational geometry: An introduction. New York: Springer, 1985.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1098-6>
44. Казаков А. Л., Лебедев П. Д. Алгоритмы построения наилучших n -сетей в метрических пространствах // Автоматика и телемеханика. 2017. Вып. 7. С. 141–155. <http://mi.mathnet.ru/at14837>
45. Лебедев П. Д. Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Свидетельство о государственной регистрации № 2015661543 от 29.10.2015.

Поступила в редакцию 18.07.2022

Принята в печать 20.08.2022

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Лемперт Анна Ананьевна, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9562-7903>

E-mail: lempert@icc.ru

Казаков Александр Леонидович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>

E-mail: kazakov@icc.ru

Цитирование: П. Д. Лебедев, А. А. Лемперт, А. Л. Казаков. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур в динамической метрике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60. С. 58–72.

Keywords: optimal covering, wave front, dynamical metric, Chebyshev center.

MSC2020: 52C15, 37N40, 05B40

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-04

The paper deals with the problem of constructing the thinnest covering for a convex set by a set of similar elements. As a distance between two points, we use the shortest time it takes to achieve one point from another, and the boundary of each covering circle is an isochron. Such problems arise in applications, particularly in sonar and underwater surveillance systems. To solve the problems of covering with such circles and balls, we previously proposed algorithms based both on variational principles and geometric methods. The purpose of this article is to construct coverings when the characteristics of the medium change over time. We propose a computational algorithm based on the theory of wave fronts and prove the statement about its properties. Illustrative calculations are performed.

Funding. The study of A.A. Lempert was funded by the Ministry of Science and Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. 121041300065-9.

REFERENCES

1. Tóth L.F. *Regular figures*, London: Pergamon Press, 1964.
2. Tóth L.F. Solid circle-packings and circle-coverings, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 1968, vol. 3, pp. 401–409.
3. Heppes A. Covering a planar domain with sets of small diameter, *Periodica Mathematica Hungarica*, 2006, vol. 53, pp. 157–168. <https://doi.org/10.1007/s10998-006-0029-9>
4. Szabó P.G., Specht E. Packing up to 200 equal circles in a square, *Models and algorithms for global optimization*, New York: Springer, 2007, pp. 141–156. https://doi.org/10.1007/978-0-387-36721-7_9
5. Tóth G.F. Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles, *Combinatorial and Computational Geometry*, 2005, vol. 52, pp. 361–376.
6. Takhonov I.I. On some problems of covering the plane with circles, *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, 2014, vol. 21, issue 1, pp. 84–102 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/da762>
7. Dorninger D. Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles, *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 2017, vol. 5, issue 1, pp. 40–46. <https://doi.org/10.1515/agms-2017-0002>
8. Specht E. Packomania [Electronic Resources URL: <http://www.packomania.com>] (visited on 06/10/2022).
9. Erich's Packing Center [Electronic Resources URL: <https://erich-friedman.github.io/packing/index.html>] (visited on 06/10/2022).
10. Conway J.H., Sloane N.J.A. *Sphere packings, lattices and groups*, New York: Springer, 1988. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2016-7>
11. Hifi L.M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies, *Advances in Operations Research*, 2009, vol. 2009, article ID: 150624. <https://doi.org/10.1155/2009/150624>
12. Nurmela K.J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles, *Experimental Mathematics*, 2000, vol. 9, issue 2, pp. 241–250. <https://doi.org/10.1080/10586458.2000.10504649>
13. Galiev S.I., Lisafina M.S. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain, *European Journal of Operation Research*, 2013, vol. 230, issue 3, pp. 505–514. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.050>
14. Litvinchev I., Ozuna L. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, article ID: 317697. <https://doi.org/10.1155/2014/317697>

15. Stoyan Y.G., Patsuk V.M. Covering a compact polygonal set by identical circles, *Computational Optimization and Applications*, 2010, vol. 46, issue 1, pp. 75–92.
<https://doi.org/10.1007/s10589-008-9191-8>
16. Bánhelyi B., Palatinus E., Lévai B.L. Optimal circle covering problems and their applications, *Central European Journal of Operations Research*, 2015, vol. 23, issue 4, pp. 815–832.
<https://doi.org/10.1007/s10100-014-0362-7>
17. Pardo E.G., Mladenović N., Pantrigo J.J., Duarte A. Variable formulation search for the cutwidth minimization problem, *Applied Soft Computing*, 2013, vol. 13, issue 5, pp. 2242–2252.
<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.01.016>
18. López C.O., Beasley J.E. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers, *European Journal of Operational Research*, 2011, vol. 214, issue 3, pp. 512–525.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.024>
19. López C.O., Beasley J.E. Packing a fixed number of identical circles in a circular container with circular prohibited areas, *Optimization Letters*, 2019, vol. 13, issue 7, pp. 1449–1468.
<https://doi.org/10.1007/s11590-018-1351-x>
20. Huang W., Ye T. Greedy vacancy search algorithm for packing equal circles in a square, *Operations Research Letters*, 2010, vol. 38, issue 5, pp. 378–382. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2010.07.004>
21. Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Östergård P.R.J. Dense packings of congruent circles in a circle, *Discrete Mathematics*, 1998, vol. 181, issues 1–3, pp. 139–154.
[https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(97\)00050-2](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00050-2)
22. Lubachevsky B.D. How to simulate billiards and similar systems, *Journal of Computational Physics*, 1991, vol. 94, issue 2, pp. 255–283. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(91\)90222-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(91)90222-7)
23. Torres–Escobar R., Marmolejo–Saucedo J.A., Litvinchev I. Binary monkey algorithm for approximate packing non-congruent circles in a rectangular container, *Wireless Networks*, 2020, vol. 26, issue 7, pp. 4743–4752. <https://doi.org/10.1007/S11276-018-1869-Y>
24. Makagonov E.P. Effective coating of space by coordination spheres – the basic principle of structure and constitution of minerals, *Mineralogiya*, 2015, no. 4, pp. 3–18 (in Russian).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25012694>
25. Galiev Sh.I., Karpova M.A. Optimization of multiple covering of a bounded set with circles, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, issue 4, pp. 721–732.
<https://doi.org/10.1134/S0965542510040135>
26. Kazakov A.L., Lempert A.A. On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure, *International Journal of Artificial Intelligence*, 2015, vol. 13, no. 1, pp. 200–210.
<http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijai/article/view/3537>
27. Erzin A., Lagutkina N., Ioramishvili N. Barrier covering in 2d using mobile sensors with circular coverage areas, *Learning and intelligent optimization*, Cham: Springer, 2020, pp. 342–354.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-38629-0_28
28. Han C., Sun L., Xiao F., Guo J. An energy efficiency node scheduling model for spatial-temporal coverage optimization in 3d directional sensor networks, *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 4408–4419.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2592184>
29. Arun D., Pais A.R. Optimal placement of sensor nodes for water quality measurement, *2015 Twelfth International Conference on Wireless and Optical Communications Networks (WOCN)*, IEEE, 2015.
<https://doi.org/10.1109/WOCN.2015.8064508>
30. Pechenkin V.V., Korolev M.S. Optimal placement of surveillance devices in a three-dimensional environment for blind zone minimization, *Computer Optics*, 2017, vol. 41, no. 2, pp. 245–253 (in Russian). <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2017-41-2-245-253>
31. Jun S., Chang T.-W., Jeong H., Lee S. Camera placement in smart cities for maximizing weighted coverage with budget limit, *IEEE Sensors Journal*, 2017, vol. 17, issue 23, pp. 7694–7703.
<https://doi.org/10.1109/jsen.2017.2723481>
32. Wu H., Zhu H., Han X. An improved k -angle coverage algorithm for multimedia wireless sensor networks based on two-layer tabu search, *Peer-to-Peer Networking and Applications*, 2021, vol. 15, issue 1, pp. 28–44. <https://doi.org/10.1007/s12083-021-01188-1>
33. Kazakov A.L., Lempert A.A. An approach to optimization in transport logistics, *Automation and*

- Remote Control*, 2011, vol. 72, issue 7, pp. 1398–1404. <https://doi.org/10.1134/S0005117911070071>
34. Keller J. B., Papadakis J. S. *Wave propagation and underwater acoustics*, Berlin: Springer, 1977. <https://doi.org/10.1007/3-540-08527-0>
 35. Orlando D., Ehlers F. Advances in multistatic sonar, *Sonar systems*, London: IntechOpen, 2011. <https://doi.org/10.5772/17356>
 36. Fishchenko V. K., Zimin P. S., Zatserkovnyi A. V., Goncharova A. A., Subote A. E., Golik A. V. Stationary underwater video observation systems: opportunities for Peter the Great Bay (the Sea of Japan) coastal zone biodiversity state monitoring, *Vestnik of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2018, issue 1, pp. 149–160 (in Russian). <http://www.vestnikdvo.ru/index.php/vestnikdvo/article/view/30>
 37. Kazakov A. L., Lempert A. A., Nguyen H. L. Algorithm for the equal circles optimal covering problem for non-convex polygons with non-Euclidean metric, *Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2016, no. 5 (112), pp. 45–55 (in Russian). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2016-5-45-55>
 38. Lempert A. A., Le Q. M. Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 850–854. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.439>
 39. Lempert A. A., Kazakov A. L., Le Q. M. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics, *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 69–79. <https://doi.org/10.2298/yjor1711120101>
 40. Kazakov A. L., Lempert A. A., Ta T. T. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 782–787. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.450>
 41. Lebedev P. D., Kazakov A. L. Construction of optimal covers by disks of different radii for convex planar sets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 137–148 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-137-148>
 42. Lebedev P. D. Iterative methods for approximations constructing of optimal covering for nonconvex plane sets, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2019, vol. 4, issue 1, pp. 5–17 (in Russian). <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14101>
 43. Preparata F. P., Shamos M. I. *Computational geometry: An introduction*, New York: Springer, 1985. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1098-6>
 44. Kazakov A. L., Lebedev P. D. Algorithms for constructing optimal n -networks in metric spaces, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, issue 7, pp. 1290–1301. <https://doi.org/10.1134/S0005117917070104>
 45. Lebedev P. D. *Program for calculating the optimal hemisphere coverage by a set of spherical segments*, Registered Rospatent Certificate No. 2015661543 dated 10.29.2015.

Received 18.07.2022

Accepted 20.08.2022

Pavel Dmitrievich Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Anna Anan'evna Lempert, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9562-7903>

E-mail: lempert@icc.ru

Aleksandr Leonidovich Kazakov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>

E-mail: kazakov@icc.ru

Citation: P. D. Lebedev, A. A. Lempert, A. L. Kazakov. Algorithms of optimal covering of 2D sets with dynamical metrics, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 60, pp. 58–72.