Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2023. Том 61. С. 3–26

УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. И. Благодатских*

СИНХРОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОВРЕМЕННЫХ МНОГОКРАТНЫХ ПОИМОК УБЕГАЮЩИХ

Рассматривается задача преследования группы из m убегающих $(m \geqslant 1)$ в конфликтно управляемых процессах с равными возможностями. Говорят, что в задаче преследования одного убегающего $(m = 1)$ происходит многократная поимка, если заданное количество преследователей ловят его, при этом моменты поимки могут не совпадать. В задаче об одновременной многократной поимке одного убегающего требуется, чтобы моменты поимки совпадали. Одновременная многократная поимка всей группы убегающих $(m \geqslant 2)$ происходит, если в результате преследования происходит одновременная многократная поимка каждого убегающего, причем в один и тот же момент времени. В терминах начальных позиций участников получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки всей группы убегающих.

Ключевые слова: поимка, многократная поимка, одновременная многократная поимка, преследование, убегание, дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-01

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, впервые рассмотренные Р. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой содержательную математическую теорию [2–5] (метод Л. С. Понтрягина, метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и другие).

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования–убегания с участием группы управляемых объектов хотя бы с одной из противоборствующих сторон, при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования, отличных от методов, разработанных для игр двух лиц.

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л. А. Петросяном, им были получены достаточные условия поимки убегающего [6], Б. Н. Пшеничный получил необходимые и достаточные условия поимки убегающего [7]. Н. Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки убегающего [8]. А. А. Чикрием [9] и Н. Н. Петровым [10] были получены достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. Н. Н. Петровым и Н. А. Соловьевой рассмотрены рекуррентные дифференциальные игры при равных возможностях участников: для примера Л. С. Понтрягина [11, 12] и конфликтно управляемого процесса [13] получены достаточные условия многократной поимки убегающего; для примера Л. С. Понтрягина [14] и конфликтно управляемого процесса [15] получены достаточные условия поимки не менее q убегающих при условии, что каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. Задачу о многократной поимке не менее q убегающих с равными возможностями участников при указанном выше условии рассмотрели Н. Н. Петров и А. Я. Нарманов, были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования для случая простых движений [16], а также достаточные условия завершения преследования в задаче с дробными производными и простой матрицей [17].

В работах [18–20] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок убегающего, для задач простого преследования, конфликтно управляемых процессов, а также примера Л. С. Понтрягина с равными возможностями приведены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия разрешимости. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка убегающего.

Задача об одновременной многократной поимке группы убегающих [21–24] рассматривалась в двух аспектах: в [23, 24] с точки зрения суммарной кратности поимок всех убегающих — получены необходимые и достаточные условия суммарных многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок, использующих жестко скоординированное управление убегающих в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными возможностями всех игроков; синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности рассматривалась в [21, 22] — получены необходимые и достаточные условия разрешимости указанной задачи. Данная работа продолжает исследования [21, 22], получены более общие необходимые и достаточные условия синхронной реализации одновременных поимок убегающих в нестационарных конфликтно управляемых процессах. Управления преследователей, гарантирующие указанный вид поимки не позднее некоторого конечного момента времени, построены в явном виде. Рассмотрен ряд модельных примеров.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{n_1,1}, P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{n_2,2}, \ldots, P_{1,m}, P_{2,m}, \ldots, P_{n_m,m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_{ij}: &\quad \dot{x}_{ij} = A_j(t)x_{ij} + u_{ij}, \quad u_{ij} \in U_j(t), \quad x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, \quad i \in I(n_j), \quad j \in I(m), \\ E_j: &\quad \dot{y}_j = A_j(t)y_j + v_j, \qquad v_j \in U_j(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad\qquad\qquad j \in I(m), \end{aligned} \tag{1.1}$$

причем $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Здесь и далее x_{ij}, $y_j \in \mathbb{R}^k$; $A_j(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы порядка k; $U_j(t)$ — многозначные отображения, являющиеся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ компактами в $\mathbb{R}^k$; $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $S(o, r)$ — шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке o радиуса r; O — нуль-матрица; $\mathcal{I}$ — единичная матрица.

Отметим, что в работах [21, 22] рассматривался случай $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, $j \in I(m)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Управления $u_{ij}(t)$, $i \in I(n_j)$, $v_j(t)$ из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U_j(t)$, $j \in I(m)$, будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_q < \ldots$ интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$). Без ограничения общности, будем рассматривать одно разбиение σ, поскольку, если есть не совпадающие при разных $j \in I(m)$ разбиения, то их можно объединить, включив все точки всех разбиений (при объединении не имеющих конечных точек сгущения разбиений вновь получится разбиение, обладающее указанным свойством).

О п р е д е л е н и е 1.2. Кусочно-программной стратегией убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q и позициям $x_{ij}(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, допустимые управления $v_j(t)$, $j \in I(m)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v_j(t) = v_j\big(t,\ \theta_q,\ x_{ij}(\theta_q),\ y_j(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q, позициям $x_{ij}(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, и допустимым управлениям $v_j(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, убегающих E_j, $j \in I(m)$, допустимые управления $u_{ij}(t)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_{ij}(t) = u_{ij}\big(t,\ \theta_q,\ x_{ij}(\theta_q),\ y_j(\theta_q),\ v_j(s),\ s \in [\theta_q, \theta_{q+1})\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n_j$ и $j \in I(m)$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} \colon i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n_j)\big\},$$

мощность которого совпадает с числом сочетаний из n_j элементов по q, то есть

$$|\Omega_j(q)| = C_{n_j}^q.$$

О п р е д е л е н и е 1.4. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, где $n_j \geqslant b_j \geqslant 1$, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_{ij}^0, Y_j^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j, $j \in I(m)$, существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, что найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, для которых при каждом фиксированном $j \in I(m)$ выполнено

$$x_{\alpha j}(\tau) = y_j(\tau), \quad x_{\alpha j}(s) \neq y_j(s) \quad \text{для всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j.$$

Неформально: рассматривается m «непересекающихся» задач группового преследования (можно считать, что каждая из m групп, включающая одного убегающего и n_j преследователей, находятся очень далеко друг от друга; либо задачи рассматриваются в параллельных плоскостях и т. п.), в которых действия убегающих координируются первым центром (для достижения общей цели — уклонение от одновременной многократной поимки группы убегающих), а действия преследователей — вторым центром (цель преследователей — синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности).

§ 2. Решение задачи для случая простых движений

Сначала исследуем систему (1.1) для случая простых движений ($A_j(t) = O$ для всех $j \in I(m)$), в этом случае она примет вид

$$\begin{aligned} P_{ij}\colon &\quad \dot{x}_{ij} = u_{ij}, \quad u_{ij} \in U_j(t), \quad x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, \quad i \in I(n_j), \quad j \in I(m), \\ E_j\colon &\quad \dot{y}_j = v_j, \quad\ \ v_j \in U_j(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad\qquad\quad j \in I(m). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 \colon (w - \lambda\xi) \in W\big\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что $\lambda(w,\xi;S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w-\lambda\xi|\leqslant 1$, откуда

$$\lambda(w,\xi;S(0,1))=\frac{\langle w,\xi\rangle+\sqrt{\langle w,\xi\rangle^2+|\xi|^2(1-|w|^2)}}{|\xi|^2}\ \text{для всех } w\in S(0,1) \text{ и } \xi\neq 0. \quad (2.3)$$

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Существуют непрерывные и невырожденные на $[t_0,\infty)$ квадратные матрицы $B_j(t)$ порядка k и непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции $g_j(t)\in\mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(t)\big(U_j(t)+g_j(t)\big)=S(0,1)\ \text{для всех } t\in[t_0,\infty),\ j\in I(m). \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что $U_j(t)=B_j^{-1}(t)S(0,1)-g_j(t)$ для всех $t\in[t_0,\infty)$, $j\in I(m)$, поэтому все многозначные отображения $U_j(t)$, $j\in I(m)$, непрерывны в метрике Хаусдорфа на $[t_0,\infty)$, а также при каждом $t\in[t_0,\infty)$ они являются строго выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Предположение 2.1 при вычислениях допускает переход от $U_j(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (2.2), (2.4), (2.3) получим, что для всех $\xi\neq 0$, $w\in U_j(t)$, $t\in[t_0,\infty)$

$$\begin{gathered}\lambda(w,\xi;U_j(t))=\sup\big\{\lambda\geqslant 0:(w-\lambda\xi)\in U_j(t)\big\}=\\ =\sup\big\{\lambda\geqslant 0:B_j(t)(w-\lambda\xi+g_j(t))\in B_j(t)(U_j(t)+g_j(t))\big\}=\\ =\sup\big\{\lambda\geqslant 0:(B_j(t)(w+g_j(t))-\lambda B_j(t)\xi)\in S(0,1)\big\}=\\ =\lambda(B_j(t)(w+g_j(t)),B_j(t)\xi;S(0,1))=\\ =\frac{1}{|B_j(t)\xi|^2}\Big(\langle B_j(t)(w+g_j(t)),B_j(t)\xi\rangle+\\ +\sqrt{\langle B_j(t)(w+g_j(t)),B_j(t)\xi\rangle^2+|B_j(t)\xi|^2(1-|B_j(t)(w+g_j(t))|^2)}\ \Big).\end{gathered} \quad (2.5)$$

Учитывая, что $X_{ij}^0\neq Y_j^0$, $i\in I(n_j)$, $j\in I(m)$, а также равенство (2.5), получим, что каждая функция

$$\lambda_{ij}(v,t)=\lambda(v,X_{ij}^0-Y_j^0;U_j(t))=\sup\big\{\lambda\geqslant 0\colon (v-\lambda(X_{ij}^0-Y_j^0))\in U_j(t)\big\} \quad (2.6)$$

непрерывна на множестве $U_j(t)\times[t_0,\infty)$. Значит, при любом допустимом управлении $v_j(t)$ получаем функции $\lambda_{ij}(v_j(t),t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0,\infty)$.

Введем обозначения

$$\delta_{0j}(t)=\min_{v\in U_j(t)}\max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)}\min_{\alpha\in\Lambda_j}\lambda_{\alpha j}(v,t),\qquad \delta_0(t)=\min_{j\in I(m)}\delta_{0j}(t),\qquad \Delta_0=\int_{t_0}^{\infty}\delta_0(s)\,ds. \quad (2.7)$$

Л е м м а 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_0=\infty$. *Тогда функции* $\delta_{0j}(t)$, $j\in I(m)$, $\delta_0(t)$ *непрерывны и положительны на* $[t_0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $j\in I(m)$ рассмотрим функцию $\delta_{0j}(t)$. Из (2.7), (2.6), (2.5), (2.4) получаем, что

$$\begin{gathered}\delta_{0j}(t)=\min_{v\in U_j(t)}\max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)}\min_{\alpha\in\Lambda_j}\lambda(v,X_{\alpha j}^0-Y_j^0;U_j(t))=\\ =\min_{v\in U_j(t)}\max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)}\min_{\alpha\in\Lambda_j}\lambda(B_j(t)(v+g_j(t)),B_j(t)(X_{\alpha j}^0-Y_j^0);S(0,1))=\\ =\min_{s\in S(0,1)}\max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)}\min_{\alpha\in\Lambda_j}\lambda(s,B_j(t)(X_{\alpha j}^0-Y_j^0);S(0,1)).\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\delta_{0j}(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, \xi^0_{\alpha j}(t); S(0,1)), \text{ где } \xi^0_{ij}(t) = B_j(t)(X^0_{ij} - Y^0_j). \tag{2.8}$$

Отметим, что все функции $\xi^0_{ij}(t) \neq 0$ и непрерывны на $[t_0, \infty)$. Из последнего утверждения следует, что (2.8) можно преобразовать с применением (2.3), получим

$$\delta_{0j}(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \frac{\left\langle s, \xi^0_{\alpha j}(t)\right\rangle + \sqrt{\left\langle s, \xi^0_{\alpha j}(t)\right\rangle^2 + |\xi^0_{\alpha j}(t)|^2(1-|s|^2)}}{|\xi^0_{\alpha j}(t)|^2}.$$

Из последнего равенства и указанных выше свойств $\xi^0_{ij}(t)$ следует, что каждая функция $\delta_{0j}(t)$, $j \in I(m)$, непрерывна на $[t_0, \infty)$.

Следовательно и функция $\delta_0(t) = \min\limits_{j\in I(m)} \delta_{0j}(t)$ непрерывна на $[t_0, \infty)$.

Предположим теперь, что, вопреки утверждению леммы, найдутся такие $j \in I(m)$ и $t^* \in [t_0, \infty)$, что $\delta_{0j}(t^*) = 0$. Тогда из (2.8) следует, что существует элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ найдется элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого

$$\lambda(s^*, \xi^0_{\alpha j}(t^*); S(0,1)) = 0.$$

Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n_j-b_j+1}\} \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b_j\} \in \Omega_j(b_j) \text{ из условия } \lambda(s^*, \xi^0_{q_1 j}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем такой элемент

$$q_2 \in L_2 = \Big(L_1 \bigcup \{b_j + 1\}\Big) \setminus \{q_1\} \in \Omega_j(b_j), \text{ что } \lambda(s^*, \xi^0_{q_2 j}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

далее элемент

$$q_3 \in L_3 = \Big(L_2 \bigcup \{b_j + 2\}\Big) \setminus \{q_2\} \in \Omega_j(b_j) \text{ такой, что } \lambda(s^*, \xi^0_{q_3 j}(t^*); S(0,1)) = 0$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n_j-b_j+1} = \Big(L_{n_j-b_j} \bigcup \{n_j\}\Big) \setminus \{q_{n_j-b_j}\} \in \Omega_j(b_j)$$

и выберем элемент

$$q_{n_j-b_j+1} \in L_{n_j-b_j+1} \text{ по условию } \lambda(s^*, \xi^0_{q_{n_j-b_j+1} j}(t^*); S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$ справедливо равенство

$$\min_{s\in S(0,1)} \max_{q\in Q} \lambda(s, \xi^0_{qj}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi^0_{qj}(t^*),\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B_j(t^*)\big(X^0_{qj} - Y^0_j\big),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица $B_j(t^*)$ невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_{qj}^0 - Y_j^0,\ q \in Q\}.$$

А так как матрица $B_j(t)$ невырожденная при всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{B_j(t)\big(X_{qj}^0 - Y_j^0\big),\ q \in Q\} \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, построенное выше множество $Q \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$ обладает свойством

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, \xi_{qj}^0(t); S(0,1)) = 0 \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),$$

которое означает, что для любого $t \in [t_0, \infty)$ найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого

$$\lambda(s^*, \xi_{\alpha j}^0(t); S(0,1)) = 0.$$

Из последнего утверждения и (2.8) следует, что $\delta_{0j}(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$. Но тогда

$$\delta_0(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t) = 0 \text{ при всех } [t_0, \infty) \text{ и } \Delta_0 = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_{0j}(t) > 0$ при всех $j \in I(m)$ и $t \in [t_0, \infty)$. А значит и функция $\delta_0(t) = \min\limits_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t) > 0$ при всех $[t_0, \infty)$.

Лемма 2.1 доказана. □

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда существует конечный момент* $T > t_0$ *такой, что для любых допустимых управлений* $v_j(t)$ *найдутся такие множества* $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, *что*

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant 1 \textit{ для всех } \alpha \in \Lambda_j,\ j \in I(m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место соотношения

$$\min_{j \in I(m)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{t_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{t_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \int_{t_0}^{t} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{t} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{t} \delta_{0j}(s)\, ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j \in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{t} \delta_0(s)\, ds.$$

Так как $\Delta_0 = \infty$, то существует конечный момент $T > t_0$, определяемый из условия

$$\frac{1}{\max\limits_{j \in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{T} \delta_0(s)\, ds \geqslant 1,$$

для которого найдутся множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, удовлетворяющие требуемым свойствам.

Лемма 2.2 доказана. □

Пусть

$$T_0 = T_0(X_{ij}^0, Y_j^0) = \min\left\{T > t_0 \colon \inf_{v_j(\cdot)} \min_{j \in I(m)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{t_0}^{T} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant 1\right\}, \tag{2.9}$$

где инфимум берется по всем допустимым управлениям $v_j(t)$. Из леммы 2.2 следует, что $T_0 < \infty$, если выполнено предположение 2.1, и $\Delta_0 = \infty$, при этом

$$\frac{1}{\max\limits_{j \in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{T_0} \delta_0(s)\, ds \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неформально, при осуществлении одновременной многократной поимки группы убегающих группой преследователей, предпишем каждому преследователю действовать так: сначала сблизиться с убегающим (максимально быстро, насколько это позволяет стратегия параллельного преследования) на зависящее от параметров игры расстояние; сопровождать убегающего (снова используя стратегию параллельного преследования — выбирать управление равное управлению убегающего) до наступления некоторого момента; осуществить одновременную многократную поимку группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ в составе одной из m групп захвата.

При любых допустимых управлениях решения системы (2.1) имеют вид

$$x_{ij}(t) = X_{ij}^0 + \int_{t_0}^{t} u_{ij}(s)\, ds, \quad y_j(t) = Y_j^0 + \int_{t_0}^{t} v_j(s)\, ds.$$

Следовательно, при каждом $j \in I(m)$

$$x_{ij}(t) - y_j(t) = \left(X_{ij}^0 - Y_j^0\right) + \int_{t_0}^{t} (u_{ij}(s) - v_j(s))\, ds, \quad t \in [t_0, \infty), \quad i \in I(n_j).$$

Управления преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, будут иметь следующий вид:

$$u_{ij}(t) = v_j(t) - h_{ij}(t)\lambda_{ij}(v_j(t), t)\left(X_{ij}^0 - Y_j^0\right), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{2.11}$$

где функции $h_{ij}(t) \in [0, 1]$ являются кусочно-постоянными и могут менять свое значение лишь в моменты $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_q < \ldots$, определенные разбиением σ.

Тогда для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_{ij}(t) - y_j(t) = \left(X_{ij}^0 - Y_j^0\right)\left(1 - G_{ij}(t)\right), \text{ где } G_{ij}(t) = \int_{t_0}^{t} h_{ij}(s)\lambda_{ij}(v_j(s), s)\, ds. \tag{2.12}$$

Таким образом, чтобы добиться одновременной многократной поимки с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, достаточно для любого разбиения σ и допустимых управлений $v_j(t)$ определить функции $h_{ij}(t) \in [0, 1]$ так, чтобы нашлись множества $\Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых выполнены соотношения

$$G_{\alpha j}(\tau) = 1, \quad G_{\alpha j}(t) < 1 \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda_j^*, \quad j \in I(m). \tag{2.13}$$

Для всех $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $i \in I(n_j)$, $a \leqslant c$, $a, c \in [t_0, \infty)$, введем обозначения

$$L_j(\Lambda_j; a, c) = \int_{a}^{c} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds, \quad L_{ij}(a, c) = \int_{a}^{c} \lambda_{ij}(v_j(s), s)\, ds. \tag{2.14}$$

В дальнейшем будем учитывать, что при всех $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $a \in [t_0, \infty)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, и любых допустимых управлениях $v_j(t)$ функции $L_j(\Lambda_j; a, t)$ и $L_{ij}(a, t)$ непрерывны по t на интервале $[a, \infty)$.

Определим $h_{ij}(t)$ и тем самым полностью определим управления преследователей.

Шаг 0. Момент $t = \theta_0 = t_0$. Определим $h_{ij}(\theta_0) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают разбиение σ, момент T_0 из формулы (2.9) и $v_j(t)$ для $t \in [\theta_0, \theta_1)$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered}\tau = \min\Big\{t \in (\theta_0, \theta_1]\colon \text{ существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) \text{ при всех } s \in [\theta_0, t) \text{ и } \min_{j \in I(m)} L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) = 1\Big\}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Вариант 0.1. Существует момент $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered}h_{\alpha j}(\theta_0) = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda_j^*; \quad h_{\beta j}(\theta_0) = 0, \text{ если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_0), \quad t \in [\theta_0, \theta_1), \quad i \in I(n_j).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Здесь и далее, если (2.15) при некоторых $j \in I(m)$ определяет несколько множеств Λ_j^*, то, в соответствии с лексикографическим порядком, выберем первое (минимальное) из них. Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$1 \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) = \int_{\theta_0}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s)\, ds \leqslant \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = L_{\alpha j}(\theta_0, \tau),$$

поэтому

$$h_{\alpha j}(\theta_0) = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} \leqslant 1 \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_j^*.$$

Далее, из определения (2.15) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_0, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_0, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$\begin{gathered}L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s)\, ds = \\ = L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) > 0 \text{ и} \\ L_{\alpha j}(\theta_0, t) < L_{\alpha j}(\theta_0, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_0, \tau).\end{gathered} \tag{2.17}$$

Выполнены соотношения (2.13), поскольку из (2.12), (2.14), (2.16), (2.17) следует, что при всех $t \in [\theta_0, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$\begin{gathered}G_{\alpha j}(\tau) = h_{\alpha j}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_0, \tau) = 1, \\ G_{\alpha j}(t) = h_{\alpha j}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_0, t) < 1.\end{gathered}$$

Покажем теперь, используя (2.14), (2.7) и (2.10), что если $T_0 \leqslant \theta_1$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

$$\min_{j\in I(m)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} L_j(\Lambda_j;\theta_0,T_0) \geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} L_j(\Lambda_j;\theta_0,T_0) =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds = \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_{0j}(s)ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_1$ существует.

Вариант 0.2. Момента $\tau \in (\theta_0,\theta_1]$ не существует (это возможно только при $\theta_1 < T_0$).

В момент $t = t_0 = \theta_0$ (по сути до начала игры) выберем и зафиксируем произвольное значение δ^* из условия

$$0 < \delta^* \leqslant \min_{t\in[t_0,T_0]} \delta_0(t); \tag{2.18}$$

существование δ^* следует из леммы 2.1.

Понадобится еще диаметр разбиения σ, дополненный точкой T_0. Напомним, что в начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ преследователи уже знают разбиение σ и могут вычислить T_0 по формуле (2.9). Итак, зафиксировано разбиение σ и значение T_0. Найдем

$$q^* = \max\{q \geqslant 0\colon \theta_q < T_0\}. \tag{2.19}$$

Отметим, что $T_0 \leqslant \theta_{q^*+1}$. Вычислим

$$d^* = d^*(\sigma,T_0) = \min\{\theta_1-\theta_0, \theta_2-\theta_1, \ldots, \theta_{q^*}-\theta_{q^*-1}, T_0-\theta_{q^*}\} > 0. \tag{2.20}$$

В начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ определим как близко преследователь P_{ij} должен сближаться с убегающим E_j:

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\sigma,T_0) = \frac{\delta^* d^*}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} > 0. \tag{2.21}$$

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ и $t \in [\theta_0,\theta_1)$ следующим образом:

$$h_{ij}(\theta_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_{ij}(\theta_0,\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_{ij}(\theta_0,\theta_1)}, & \text{если } L_{ij}(\theta_0,\theta_1) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} \qquad h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_0). \tag{2.22}$$

Тогда

$$G_{ij}(\theta_1) = h_{ij}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_{ij}(v_j(s),s)\,ds = h_{ij}(\theta_0) L_{ij}(\theta_0,\theta_1) =$$

$$= \begin{cases} 1\cdot L_{ij}(\theta_0,\theta_1), & \text{если } L_{ij}(\theta_0,\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_{ij}(\theta_0,\theta_1)} L_{ij}(\theta_0,\theta_1), & \text{если } L_{ij}(\theta_0,\theta_1) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} = \begin{cases} L_{ij}(\theta_0,\theta_1), & \text{если } h_{ij}(\theta_0) = 1, \\ 1-\varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_0) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_{ij}(\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m).$$

Шаг 1. $t = \theta_1$ ($\theta_1 < T_0$). Определим $h_{ij}(\theta_1) \in [0,1]$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают $v_j(t)$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$, а также на предыдущем шаге вычислили $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered}\tau = \min\Big\{ t \in (\theta_1, \theta_2]\colon \text{ существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) \text{ при всех } s \in [\theta_1, t) \\ \text{и } \min_{j \in I(m)} \Big(\min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) \Big) = 1 \Big\}.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Вариант 1.1. Существует момент $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} h_{\alpha j}(\theta_1) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda_j^*; \quad h_{\beta j}(\theta_1) = 0, \text{ если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_1), \quad t \in [\theta_1, \theta_2), \quad i \in I(n_j). \end{gathered} \tag{2.24}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$\begin{gathered} 1 - G_{\alpha j}(\theta_1) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_1) \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) = \int_{\theta_1}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds \leqslant \\ \leqslant \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = L_{\alpha j}(\theta_1, \tau), \end{gathered}$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$h_{\alpha j}(\theta_1) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)} = 1.$$

Далее, из определения (2.23) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_1, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$\begin{gathered} L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s)\, ds = \\ = L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) > 0 \text{ и} \\ L_{\alpha j}(\theta_1, t) < L_{\alpha j}(\theta_1, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_1, \tau). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Выполнены соотношения (2.13), поскольку из (2.12), (2.14), (2.24), (2.25) следует, что при всех $t \in [\theta_1, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} G_{\alpha j}(\tau) = G_{\alpha j}(\theta_1) + h_{\alpha j}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = G_{\alpha j}(\theta_1) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_1, \tau) = 1, \\ G_{\alpha j}(t) = G_{\alpha j}(\theta_1) + h_{\alpha j}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = G_{\alpha j}(\theta_1) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_1, t) < 1. \end{gathered}$$

($G_{ij}(t) \leqslant G_{ij}(\theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_1]$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, поскольку имел место вариант 0.2.)

Покажем теперь, используя (2.14), (2.7) и (2.10), что если $T_0 \leqslant \theta_2$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Предположим сначала, что из (2.22) получили, что $h_{ij}(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Тогда

$$\min_{j\in I(m)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j;\theta_1,T_0)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j;\theta_1,T_0)\Big) =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \Big(\int_{\theta_0}^{\theta_1} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds\Big) =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds = \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_{0j}(s)ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, если $h_{ij}(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, то момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Предположим, что из (2.22) получили, что $h_{\alpha j}(\theta_0) < 1$ при некоторых $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$. Тогда получим, что $G_{\alpha j}(\theta_1) = 1 - \varepsilon^*$ и, в силу (2.18), (2.20), (2.21),

$$G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j^*;\theta_1,T_0) \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_1}^{T_0} \delta_0(s)\,ds \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^*}{C_{n_j}^{b_j}}(T_0 - \theta_1) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^* d^*}{C_{n_j}^{b_j}} = 1 - \frac{\delta^* d^*}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} + \frac{\delta^* d^*}{C_{n_j}^{b_j}} \geqslant 1,$$

то есть и в указанном случае момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Вариант 1.2. Момента $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$ не существует (это возможно только при $\theta_2 < T_0$).

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ и $t \in [\theta_1, \theta_2)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} h_{ij}(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1,\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_1)}{L_{ij}(\theta_1,\theta_2)}, & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1,\theta_2) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_1). \end{gathered} \tag{2.26}$$

Тогда

$$G_{ij}(\theta_2) = G_{ij}(\theta_1) + h_{ij}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_{ij}(v_j(s),s)\,ds = G_{ij}(\theta_1) + h_{ij}(\theta_1) L_{ij}(\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_1) + 1 \cdot L_{ij}(\theta_1,\theta_2), & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1,\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ G_{ij}(\theta_1) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_1)}{L_{ij}(\theta_1,\theta_2)} L_{ij}(\theta_1,\theta_2), & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1,\theta_2) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1,\theta_2), & \text{если } h_{ij}(\theta_1) = 1, \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_1) < 1. \end{cases}$$

В любом случае $G_{ij}(\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Шаг q **(**$q = 2, 3, 4, \dots$**).** $t = \theta_q$ ($\theta_q < T_0$). Определим $h_{ij}(\theta_q) \in [0, 1]$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают $v_j(t),\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ и $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент τ (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{aligned} \tau = \min\Big\{ & t \in (\theta_q, \theta_{q+1}]\colon\ \text{существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ & L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) \text{ при всех } s \in [\theta_q, t) \\ & \text{и } \min_{j \in I(m)} \Big(\min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_q) + L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) \Big) = 1 \Big\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Вариант q**.1.** Существует момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} h_{\alpha j}(\theta_q) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)},\ \text{если } \alpha \in \Lambda_j^*; \quad h_{\beta j}(\theta_q) = 0,\ \text{если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad i \in I(n_j). \end{gathered} \tag{2.28}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$\begin{aligned} 1 - G_{\alpha j}(\theta_q) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_q) \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) = \int_{\theta_q}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s)\, ds \leqslant \\ \leqslant \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = L_{\alpha j}(\theta_q, \tau), \end{aligned}$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$h_{\alpha j}(\theta_q) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)} = 1.$$

Далее, из определения (2.27) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_q, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$\begin{aligned} L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s)\, ds = \\ = L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) > 0 \text{ и} \\ L_{\alpha j}(\theta_q, t) < L_{\alpha j}(\theta_q, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_q, \tau). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Выполнены соотношения (2.13), поскольку из (2.12), (2.14), (2.28), (2.29) следует, что при всех $t \in [\theta_q, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$\begin{aligned} G_{\alpha j}(\tau) = G_{\alpha j}(\theta_q) + h_{\alpha j}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = G_{\alpha j}(\theta_q) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_q, \tau) = 1, \\ G_{\alpha j}(t) = G_{\alpha j}(\theta_q) + h_{\alpha j}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)\, ds = G_{\alpha j}(\theta_q) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_q, t) < 1. \end{aligned}$$

($G_{ij}(t) \leqslant G_{ij}(\theta_q) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_q]$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, поскольку имел место вариант $q - 1$**.2.**

Аналогично тому как это делалось на шаге **1** доказывается следующее утверждение: если $T_0 \leqslant \theta_{q+1}$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Вариант q**.2.** Момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует (возможно только при $\theta_{q+1} < T_0$).

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$ и $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ следующим образом:

$$\begin{gathered} h_{ij}(\theta_q) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_q)}{L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_q). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Тогда

$$G_{ij}(\theta_{q+1}) = G_{ij}(\theta_q) + h_{ij}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \lambda_{ij}(v_j(s), s)\, ds = G_{ij}(\theta_q) + h_{ij}(\theta_q) L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_q) + 1 \cdot L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ G_{ij}(\theta_q) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_q)}{L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1})} L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), & \text{если } h_{ij}(\theta_q) = 1, \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_q) < 1. \end{cases}$$

В любом случае $G_{ij}(\theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^*$ для всех $i \in I(n_j)$.

Из (2.19) следует, что не позже чем на шаге q^* произойдет одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 2.1 доказана. □

Для каждых $j \in I(m)$ и единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ при всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функции

$$v_{jl}(t) \in \partial U_j(t) \text{ из условия: } \langle u(t) - v_{jl}(t), l \rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U_j(t) \setminus \{v_{jl}(t)\}. \tag{2.31}$$

Отметим, что, при выполненном предположении 2.1, функции $v_{jl}(t)$ при каждом зафиксированном l определены однозначно и непрерывны на интервале $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначных отображений $U_j(t)$.

Л е м м а 2.3. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l \in \mathbb{R}^k$, *номера* $c \in I(n_j)$ *и момента* $\theta_q \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_{cj}(\theta_q) - y_j(\theta_q), l \rangle \leqslant 0, \quad x_{cj}(\theta_q) \neq y_j(\theta_q),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E_j

$$v_j(t) = v_{jl}(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l \rangle \leqslant 0, \quad x_{cj}(t) \neq y_j(t) \quad \text{для всех } t \in [\theta_q, \infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_{cj}(t)$, $t \in [\theta_q, \infty)$, *преследователя* P_{cj}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.31), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l \rangle = \langle x_{cj}(\theta_q) - y_j(\theta_q), l \rangle + \int_{\theta_q}^{t} \langle u_{cj}(s) - v_{jl}(s), l \rangle\, ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_{cj}(s) = v_{jl}(s)$ почти всюду на $[\theta_q, t]$, но в этом случае $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$, так как $x_{cj}(\theta_q) \neq y_j(\theta_q)$. Если $\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l \rangle < 0$, то $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$. Следовательно, $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \infty)$.

Лемма 2.3 доказана. □

Условие 2.1. При каждом $j \in I(m)$ выполнено включение $Y_j^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *в игре* Γ.

Доказательство. Пусть условие 2.1 не выполнено. Тогда при некотором $j \in I(m)$ существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n_j - b_j + 1)$ такое, что $Y_j^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l\rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_{cj}^0 - Y_j^0, l\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } c \in Q.$$

По (2.31) определим допустимое управление убегающего E_j

$$v_j(t) = v_{jl}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 2.3 при любых допустимых управлениях $u_{cj}(t)$ преследователей P_{cj} выполнено неравенство $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Оставшиеся $|I(n_j)\backslash Q| = n_j - (n_j - b_j + 1) = b_j - 1$ преследователей не могут осуществить b_j-кратную поимку убегающего E_j, а следовательно не осуществима и одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 2.2 доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и отображение* $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда в игре* Γ *условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.2.

Пусть выполнено условие 2.1. Аналогично лемме 2.1 доказывается, что

$$\delta_0(t) = \delta_0 = \mathrm{const} > 0, \text{ поэтому } \Delta_0 = \infty,$$

и возможность одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ следует из теоремы 2.1.

Теорема 2.3 доказана. □

Пример 2.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{2.1}$ 12 лиц: преследователей P_{11}, P_{21}, P_{31}, P_{12}, P_{22}, P_{32}, P_{13}, P_{23}, P_{33} ($n_1 = n_2 = n_3 = 3$) и убегающих E_1, E_2, E_3 ($m = 3$) вида (2.1), где

$$U_1(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, \quad i \in I(3), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$U_2(t) = S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, 5\right), \quad X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, \quad i \in I(3), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$U_3(t) = S\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), \quad X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, \quad i \in I(3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 2.1 выполнено при $B_1(t)=\mathcal{I}$, $g_1(t)=(0,0)^{\mathrm{T}}$, $B_2(t)=\dfrac{1}{5}\mathcal{I}$, $g_2(t)=(-2,-7)^{\mathrm{T}}$, $B_3(t)=2\mathcal{I}$, $g_3(t)=(3,-4)^{\mathrm{T}}$.

Из теоремы 2.3 следует

У т в е р ж д е н и е 2.1. *В игре* $\Gamma_{2.1}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(1,1,1)$, *причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 2.2. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{2.2}$ $16+2b_3$ лиц ($b_3\geqslant 1$): преследователей $P_{11},\ldots,P_{51}$; $P_{12},\ldots,P_{72}$; $P_{13},\ldots,P_{1+2b_3,3}$ ($n_1=5$, $n_2=7$, $n_3=1+2b_3$) и убегающих E_1, E_2, E_3 ($m=3$) вида (2.1), где

$$U_1(t)=U_2(t)=U_3(t)=S\left(\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix},\frac{1}{2+\cos t}\right),$$

$$X_{i1}^0=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi i}{5}\\ \sin\dfrac{2\pi i}{5}\end{pmatrix},\quad i\in I(5),\quad Y_1^0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\qquad X_{i2}^0=\begin{pmatrix}-100+\cos\dfrac{2\pi i}{7}\\ \sin\dfrac{2\pi i}{7}\end{pmatrix},\quad i\in I(7),$$

$$Y_2^0=\begin{pmatrix}-100\\0\end{pmatrix};\qquad X_{i3}^0=\begin{pmatrix}100+\cos\dfrac{2\pi i}{1+2b_3}\\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2b_3}\end{pmatrix},\quad i\in I(1+2b_3),\quad Y_3^0=\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}.$$

Предположение 2.1 выполнено при $B_j(t)=(2+\cos t)\mathcal{I}$, $g_j(t)=(-5,-5)^{\mathrm{T}}$, $j\in I(3)$. Отметим, что если выполнено условие 2.1, то $\Delta_0=\infty$.

Начальные позиции преследователей P_{i1}, $i\in I(5)$, образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего E_1. Проверяя, получаем, что при $j=1$ и $b_1\leqslant 2$ условие 2.1 выполнено, а при $b_1\geqslant 3$ — не выполнено. Аналогично проверяем условие 2.1 при $j=2,3$.

Из теоремы 2.1 и теоремы 2.2 следует

У т в е р ж д е н и е 2.2. *В игре* $\Gamma_{2.2}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(2,3,b_3)$, *причем поимка большей кратности невозможна.*

§ 3. Решение задачи в общем случае

Перейдем к исследованию системы (1.1) в общем случае.

Пусть $\Phi_j(t)$, $j\in I(m)$, — фундаментальная матрица системы $\dot\varphi=A_j(t)\varphi$ такая, что $\Phi_j(t_0)=\mathcal{I}$. Отметим, что $\Phi_j^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0,\infty)$, а $\Phi_j^{-1}(t_0)=\mathcal{I}$.

В системе (1.1) проведем неособые линейные преобразования координат

$$\begin{aligned} &x_{ij}^*(t)=\Phi_j^{-1}(t)x_{ij}(t), && y_j^*(t)=\Phi_j^{-1}(t)y_j(t),\\ &u_{ij}^*(t)=\Phi_j^{-1}(t)u_{ij}(t)\in\Phi_j^{-1}(t)U_j(t), && v_j^*(t)=\Phi_j^{-1}(t)v_j(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (1.1) преобразуется [3] к задаче простого группового преследования

$$\begin{aligned} P_{ij}:&\quad \dot x_{ij}^*=u_{ij}^*,\quad u_{ij}^*\in V_j(t)=\Phi_j^{-1}(t)U_j(t),\quad x_{ij}^*(t_0)=X_{ij}^0,\quad i\in I(n_j),\quad j\in I(m).\\ E_j:&\quad \dot y_j^*=v_j^*,\quad\ v_j^*\in V_j(t)=\Phi_j^{-1}(t)U_j(t),\quad y_j^*(t_0)=Y_j^0,\qquad\qquad\qquad j\in I(m).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Отметим, что в полученной (3.2) и в исходной (1.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (3.1).

По форме системы (3.2) и (2.1) совпадают, но, чтобы применить результаты § 2 необходимо убедиться, что многозначное отображение $V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U_j(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Л е м м а 3.1. *Если выполнено предположение* 2.1, *то существуют непрерывные и невырожденные на* $[t_0, \infty)$ *квадратные матрицы* $B_j^*(t)$ *порядка* k *и непрерывные на* $[t_0, \infty)$ *функции* $g_j^*(t) \in \mathbb{R}^k$ *такие, что* $B_j^*(t)(V_j(t) + g_j^*(t)) = S(0, 1)$ *для всех* $[t_0, \infty)$, $j \in I(m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения 2.1, $B_j^*(t) = B_j(t)\Phi_j(t)$ являются непрерывными и невырожденными на $[t_0, \infty)$ квадратными матрицами порядка k как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, а $g_j^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывными на $[t_0, \infty)$ функциями, поэтому

$$\begin{gathered} B_j^*(t)(V_j(t) + g_j^*(t)) = B_j(t)\Phi_j(t)(\Phi_j^{-1}(t)U_j(t) + \Phi_j^{-1}(t)g_j(t)) = \\ = B_j(t)(U_j(t) + g_j(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } [t_0, \infty),\ j \in I(m). \end{gathered}$$

Лемма 3.1 доказана. □

При сделанном предположении 2.1, из леммы 3.1 и (2.5) следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in V_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered} \lambda(w, \xi; V_j(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in V_j(t)\bigr\} = \\ = \lambda(B_j^*(t)(w + g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi; S(0, 1)) = \\ = \frac{1}{|B_j^*(t)\xi|^2}\Bigl(\bigl\langle B_j^*(t)(w + g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi\bigr\rangle + \\ + \sqrt{\bigl\langle B_j^*(t)(w + g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi\bigr\rangle^2 + |B_j^*(t)\xi|^2(1 - |B_j^*(t)(w + g_j^*(t))|^2)}\ \Bigr). \end{gathered}$$

В исходных координатах получим: при всех $\xi \neq 0$, $w \in U_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered} \lambda(\Phi_j^{-1}(t)w, \xi; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi_j^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi_j(t)\xi) \in U_j(t)\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B_j(t)(w - \lambda\Phi_j(t)\xi + g_j(t)) \in B_j(t)(U_j(t) + g_j(t))\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B_j(t)(w + g_j(t)) - \lambda B_j(t)\Phi_j(t)\xi) \in S(0, 1)\bigr\} = \\ = \lambda(B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi; S(0, 1)) = \\ = \frac{1}{|B_j(t)\Phi_j(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi\rangle + \\ + \sqrt{\langle B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi\rangle^2 + |B_j(t)\Phi_j(t)\xi|^2(1 - |B_j(t)(w + g_j(t))|^2)}\ \Bigr). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Из леммы 3.1 следует, что теоремы 2.1, 2.2, справедливы для системы (3.2). Перепишем их для системы (1.1) с учетом преобразования координат (3.1), а также (2.6) и (2.7). По функциям

$$\begin{gathered} \lambda_{ij}^1(v, t) = \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X_{ij}^0 - Y_j^0; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \colon (\Phi_j^{-1}(t)v - \lambda(X_{ij}^0 - Y_j^0)) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

непрерывным на множестве $U_j(t) \times [t_0, \infty)$, $j \in I(m)$, определим величины

$$\delta_{1j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}^1(v, t), \quad \delta_1(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{1j}(t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)\, ds. \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ *в игре* Γ.

У с л о в и е 3.1. Любой фиксированный набор $h_{ij} \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, обладает тем свойством, что при каждом $j \in I(m)$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$ имеет место включение $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_{cj}, c \in K\}$.

Л е м м а 3.2. *Пусть выполнено условие* 2.1. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$, *при котором выполнено условие* 3.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольные $j \in I(m)$ и $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$. Множество $\operatorname{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $X_{qj}^0 - Y_j^0$, где $q \in Q \subset K$. Из условия 2.1 следует, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in K\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{qj}^0 - Y_j^0, q \in Q\}.$$

Так как множество $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{qj}^0 - Y_j^0, q \in Q\}$ является открытым, то найдется такое число $\varepsilon_j(K) > 0$, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_{qj}, q \in Q\} \text{ для каждого набора } h_{qj} \in S(X_{qj}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon).$$

Так как $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_{qj}, q \in Q\} \subset \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_{cj}, c \in K\}$, то $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_{cj}, c \in K\}$.
Пусть

$$\varepsilon = \min_{j \in I(m)} \min_{K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)} \{\varepsilon_j(K)\} > 0.$$

Лемма 3.2 доказана. □

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [25].

Л е м м а 3.3. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.1, $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, *а матрицы* $\Phi_j(t)$, $j \in I(m)$, *являются почти периодическими в смысле Бора. Тогда* $\Delta_1 = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$ предположение 2.1 примет вид: существуют постоянные невырожденные квадратные матрицы B_j порядка k и постоянные векторы $g_j \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(U_j + g_j) = S(0, 1) \text{ для всех } j \in I(m). \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.4), (3.3), (3.6) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_{1j}(t) &= \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X_{\alpha j}^0 - Y_j^0; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ &= \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(B_j(v + g_j), B_j\Phi_j(t)(X_{\alpha j}^0 - Y_j^0); S(0, 1)) = \\ &= \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j\Phi_j(t)(X_{\alpha j}^0 - Y_j^0); S(0, 1)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Выполнены все условия леммы 3.2. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$, при котором выполнено условие 3.1. Введем обозначения

$$H = \big\{t \geqslant t_0 \colon \Phi_j(t)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m)\big\},$$
$$\mu(G) \text{ — мера Лебега множества } G \subset \mathbb{R}^1,$$
$$\operatorname{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2} |g_1 - g_2| \text{ для множеств } G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^k.$$

Функции $\Phi_j(t)(X_{ij}^0 - Y_j^0)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Откуда, с учетом равенства

$$\Phi_j(t_0)(X_{ij}^0 - Y_j^0) = \mathcal{I}(X_{ij}^0 - Y_j^0) = (X_{ij}^0 - Y_j^0),$$

следует существование числа $C > 0$ такого, что для каждого $q = 1, 2, \ldots$ найдется момент $t_q \in [t_0 + C(q-1), t_0 + Cq)$, обладающий свойством

$$\Phi_j(t_q)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m).$$

Для всех $q = 1, 2, \ldots$ определим

$$H_q = \big\{t \in [t_q, t_{q+1}) \colon \Phi_j(t)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m)\big\}.$$

Так как почти периодические функции в смысле Бора являются и равномерно непрерывными, то имеет место следующее утверждение:

$$\text{если } \theta_2 > \theta_1 \geqslant t_0 \text{ и } |\Phi_j(\theta_2)(X_{ij}^0 - Y_j^0) - \Phi_j(\theta_1)(X_{ij}^0 - Y_j^0)| \geqslant \varepsilon,$$
$$\text{то } \theta_2 \geqslant \theta_1 + L \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m), \text{ где } L = L(\varepsilon) > 0.$$

Из данного утверждения и того, что

$$\operatorname{dist}\big(\partial S(X_{ij}^0 - Y_j^0, \varepsilon), \partial S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)\big) = \varepsilon,$$
$$\Phi_j(t_q)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m),$$

следует включение

$$[t_q, t_q + L] \subset H_q \text{ для всех } q = 1, 2, \ldots,$$

а это означает, что

$$\mu(H) \geqslant \mu\Big(\bigcup_{q=1}^{\infty} H_q\Big) \geqslant \sum_{q=1}^{\infty} L = \infty.$$

Теперь докажем, что для всех

$$d_j = (h_{1j}, h_{2j}, \ldots, h_{n_j j}) \in D_j = S(X_{1j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \times S(X_{2j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \times \ldots \times S(X_{n_j j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)$$

имеет место неравенство

$$\rho_j(d_j) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) > 0.$$

Предположим противное: найдется $d_j^* = (h_{1j}^*, h_{2j}^*, \ldots, h_{n_j j}^*) \in D_j$ такой, что

$$\rho_j(d_j^*) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}^*; S(0,1)) = 0.$$

Значит, найдется $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha j}; S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$K_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j - b_j + 1}\}$$

по следующему правилу. Элемент $\alpha_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b_j\} \in \Omega_j(b_j)$ выберем из условия $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha_1 j}; S(0,1)) = 0$. Пусть $L_2 = (L_1 \bigcup \{b_j + 1\}) \setminus \{\alpha_1\}$. Отметим, что $L_2 \in \Omega_j(b_j)$. Выбираем $\alpha_2 \in L_2$ из условия $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha_2 j}; S(0,1)) = 0$. Теперь определим множество $L_3 = (L_2 \bigcup \{b + 2\}) \setminus \{\alpha_2\}$ и элемент $\alpha_3 \in L_3$ из условия $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha_3 j}; S(0,1)) = 0$. Далее действуем аналогично. На последнем шаге построим $L_{n_j - b_j + 1} = (L_{n_j - b_j} \bigcup \{n_j\}) \setminus \{\alpha_{n_j - b_j}\}$ и выберем элемент $\alpha_{n_j - b_j + 1} \in L_{n_j - b_j + 1}$ из условия $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha_{n_j - b_j + 1 j}}; S(0,1)) = 0$. По построению множества $K_0 \in \Omega(n_j - b_j + 1)$

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{\alpha \in K_0} \lambda(s, B_j h^*_{\alpha j}; S(0,1)) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B_j h^*_{qj},\ q \in K_0\}$. Матрица B_j невырожденная, поэтому $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h^*_{qj},\ q \in K_0\}$ и условие 3.1 не выполнено. Полученное противоречие доказывает, что $\rho_j(d_j) > 0$.

Из непрерывности функции λ получим, что

$$\lim_{d^*_j \to d_j} \rho_j(d^*_j) = \lim_{d^* \to d} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h^*_{\alpha j}; S(0,1)) =$$
$$= \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = \rho_j(d_j).$$

Следовательно, функция ρ_j является непрерывной, учитывая еще, что множество D_j компакт и $\rho_j(d_j) > 0$, получим

$$r_j = \min_{d_j \in D_j} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = \min_{d_j \in D_j} \rho_j(d_j) > 0.$$

Таким образом, величина

$$\delta_{Hj} = \min_{t \in H} \delta_{1j}(t) = \min_{t \in H} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j \Phi_j(t)(X^0_{\alpha j} - Y^0_j); S(0,1)) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{d_j \in D_j} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = r_j > 0.$$

Из (3.5) и (3.7) получаем, что

$$\Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(\tau) d\tau \geqslant \int_H \delta_1(\tau) d\tau = \int_H \min_{j \in I(m)} \delta_{1j}(\tau) d\tau \geqslant \min_{j \in I(m)} \delta_{Hj} \int_H d\tau = \infty,$$

так как $\min_{j \in I(m)} \delta_{Hj} > 0$ и $\mu(H) = \infty$.

Лемма 3.3 доказана. □

Т е о р е м а 3.3. *Пусть выполнено предположение* 2.1, *матрицы* $\Phi_j(t)$ *являются почти периодическими в смысле Бора и* $U_j(t) = U_j = \text{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *в игре* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 3.2. Из леммы 3.3 следует, что $\Delta_1 = \infty$ и достаточность следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.3 доказана. □

Отметим, что матрица $\Phi_j(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A_j(t) = O$ или $A_j(t) = A_j = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

П р и м е р 3.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.1}$ 12 лиц: преследователей P_{11}, P_{21}, P_{31}, P_{12}, P_{22}, P_{32}, P_{13}, P_{23}, P_{33} ($n_1 = n_2 = n_3 = 3$) и убегающих E_1, E_2, E_3 ($m = 3$) вида (1.1), где

$$A_1(t) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_1 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 16) = 0,$$
$$A_2(t) = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_2 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 100) = 0,$$
$$A_3(t) = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -64 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_3 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 64) = 0,$$

а остальные параметры такие же как и в игре $\Gamma_{2.1}$ (см. пример 2.1).

Предположение 2.1 выполнено (см. пример 2.1). Собственные числа матрицы A_1 равны $\pm 4\iota$, A_2 — $\pm 10\iota$, A_3 — $\pm 8\iota$, и матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Из теоремы 3.3 следует

У т в е р ж д е н и е 3.1. *В игре* $\Gamma_{3.1}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(1, 1, 1)$*, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 3.2. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.2}$ $16 + 2b_3$ лиц ($b_3 \geqslant 1$): преследователей P_{11}, $\ldots$, P_{51}; P_{12}, $\ldots$, P_{72}; P_{13}, $\ldots$, $P_{1+2b_3,3}$ ($n_1 = 5$, $n_2 = 7$, $n_3 = 1 + 2b_3$) и убегающих E_1, E_2, E_3 ($m = 3$) вида (1.1), где

$$U_1(t) = U_2(t) = U_3(t) = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1),$$
$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix},$$
$$X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i \in I(5), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$A_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix},$$
$$X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{7} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, \quad i \in I(7), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$A_3(t) = \begin{pmatrix} \pi\cos(\pi t) & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_3(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(\pi t)} & 0 \\ 0 & e^{\cos t} \end{pmatrix},$$
$$X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{1 + 2b_3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1 + 2b_3} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1 + 2b_3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 2.1 выполнено при $B_j(t) = \mathcal{I}$, $g_j(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}$, $j \in I(3)$. Матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Из теоремы 3.3 следует (ср. с примером 2.2)

У т в е р ж д е н и е 3.2. *В игре* $\Gamma_{3.2}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(2, 3, b_3)$*, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 3.3. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.3}$ $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ преследователей P_{11}, P_{21}, $\ldots$, $P_{n_1 1}$, P_{12}, P_{22}, $\ldots$, $P_{n_2 2}$, $\ldots$, P_{1m}, P_{2m}, $\ldots$, $P_{n_m m}$ и m убегающих E_1, E_2, $\ldots$, E_m вида (1.1), где

$$A_j(t) = \frac{\dot{a}_j(t)}{a_j(t)}\mathcal{I}, \quad U_j(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, a_j(t)\right), \quad j \in I(m),$$

$a_j(t)$, $j \in I(m)$, — произвольные непрерывно дифференцируемые функции такие, что $a_j(t_0) = 1$ и $a_j(t) > 0$ для всех $[t_0, \infty)$. Предположение 2.1 выполнено

$$B_j(t) = a_j^{-1}(t)\mathcal{I}, \quad g_j(t) = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \text{ и}$$
$$\Phi_j(t) = a_j(t)\mathcal{I}, \quad \Phi_j^{-1}(t) = a_j^{-1}(t)\mathcal{I}, \quad V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t)U_j(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, 1\right).$$

Отметим, что если выполнено условие 2.1, то $\Delta_1 = \infty$, при этом $\Phi_j(t)$ не всегда является почти периодической в смысле Бора (например, при $a_j(t) = 1 + (t - t_0)^2$).

Из теоремы 3.1 и теоремы 3.2 следует

У т в е р ж д е н и е 3.3. *В игре* $\Gamma_{3.3}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* 2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды ордена Ленина Математического института имени В. А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63. https://www.mathnet.ru/rus/tm3032
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
5. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
6. Петросян Л. А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
7. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
9. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
10. Петров Н. Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/1997/61-5
11. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23607930
12. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26873985
13. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28409380

14. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 186. С. 108–115. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115
15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 371–377. https://www.mathnet.ru/rus/semr1508
16. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче с дробными производными и простой матрицей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 188–199. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199
18. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
19. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2009/73-1/54
20. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2013/77-3/433
21. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 13–18. https://doi.org/10.20537/vm120302
22. Благодатских А. И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 20–26. https://doi.org/10.20537/vm130403
23. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
24. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 3. P. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
25. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 01.03.2023

Принята к публикации 20.04.2023

Благодатских Александр Иванович, к. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aiblag@mail.ru

Цитирование: А. И. Благодатских. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 3–26.

A. I. Blagodatskikh
Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders

Keywords: capture, multiple capture, simultaneous multiple capture, pursuit, evasion, differential games, conflict controlled processes.

MSC2020: 49N70, 49N75

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-01

The problem of pursuit of a group of m evaders ($m \geqslant 1$) in conflict-controlled processes with equal opportunities is considered. It is said that in the problem of chasing one evader ($m = 1$), multiple capture occurs if a given number of pursuers catch him, and the moments of capture may not coincide. In the problem of simultaneous multiple capture of one evader, it is required that the moments of capture coincide. Simultaneous multiple capture of the whole group of evaders ($m \geqslant 2$) occurs if, as a result of pursuit, each evader is repeatedly caught simultaneously, and at the same time. In terms of the initial positions of the participants, necessary and sufficient conditions for the simultaneous multiple capture of the whole group of evaders are obtained.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L. S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 112, pp. 27–60. https://www.mathnet.ru/eng/tm3032
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988.
4. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
5. Chernous'ko F. L., Melikyan A. A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978.
6. Petrosyan L. A. "Life-line" pursuit games with several players, *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Matematika*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340 (in Russian).
7. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://doi.org/10.1007/BF01070036
8. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
9. Chikrii A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Petrov N. N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 5, pp. 725–732. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00095-6
11. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182. https://doi.org/10.1134/S0081543816050163
12. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 5, pp. 855–861. https://doi.org/10.1134/S0005117916050088
13. Petrov N. N., Solov'eva N. A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
14. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of a given number of evaders in L. S. Pontryagin's recurrent example, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2020, vol. 186, pp. 108–115 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115

15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 371–377. https://www.mathnet.ru/eng/semr1508
16. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 188–199 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199
18. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
19. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 1, pp. 36–40. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010
20. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007
21. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 13–18. https://doi.org/10.20537/vm120302
22. Blagodatskikh A. I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 4, pp. 20–26. https://doi.org/10.20537/vm130403
23. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, issue 1, pp. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
24. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
25. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967.

Received 01.03.2023

Accepted 20.04.2023

Aleksandr Ivanovich Blagodatskikh, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aiblag@mail.ru

Citation: A. I. Blagodatskikh. Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 3–26.