Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2023. Том 61. С. 27–41

УДК 517.935

© *М. С. Волдеаб, Л. И. Родина*

ОБ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОПУЛЯЦИИ, ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается популяция, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой линейных однородных дифференциальных уравнений, а в фиксированные моменты времени из данной популяции извлекаются некоторые случайные доли ресурса каждого из видов. Предполагаем, что процесс сбора можно контролировать таким образом, чтобы ограничить количество добываемого ресурса с целью увеличения размера следующего сбора. Описан способ извлечения ресурса, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции постоянно сохраняется или периодически восстанавливается. Также рассматриваются режимы эксплуатации, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Для доказательства основных утверждений применяется полученное здесь следствие закона больших чисел А. Н. Колмогорова. Приведены результаты об оптимальной добыче ресурса для систем линейных разностных уравнений, частным случаем которых являются модели динамики популяции Лесли и Лефковича.

Ключевые слова: структурированная популяция, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация, неотрицательные матрицы, матрица Лесли.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-02

Введение

Исторически одной из первых работ по исследованию матричных моделей динамики популяций считается классическая работа Лесли [1], написанная в 1945 г. Основное допущение модели состоит в том, что популяция разделена на конечное число возрастных классов одинаковой длительности, равной шагу модели по времени. При изучении модели Лесли выяснилось, что она не всегда применима к реальным условиям: намного удобнее классифицировать особей не по возрасту, а по другим наблюдаемым признакам, в частности, по размеру или стадии развития. В 1965 г. Лефкович предложил обобщение модели Лесли [2], в котором популяция подразделена по стадиям развития, сменяемым последовательно; данная обобщенная модель вызвала широкий математический интерес к исследованию матричных моделей динамики популяции с дискретной стадийной структурой [3–5]. В задачах демографии растений или животных применяются и более сложные способы классификации, когда каждый возрастной класс подразделен на подклассы по размеру или физиологическому состоянию особей. Вопросы оптимальной эксплуатации популяций для указанных матричных моделей рассматриваются в [6–8] и многих других публикациях.

Множество работ, первые из которых относятся к семидесятым годам прошлого века, посвящено задачам оптимальной эксплуатации в вероятностных моделях. В [9, 10] рассматриваются рыбные популяции, заданные дифференциальными уравнениями со случайными параметрами; показано, что такие популяции целесообразно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего количества ресурса. Данная идея обобщается во многих дальнейших публикациях, среди которых [11–13]. Работы [14–16] посвящены разработке моделей управления рыболовством, включающих экологическую и экономическую неопределенность и задачам ценового регулирования в условиях неопределенности. В [17–19] рассматриваются вопросы влияния случайных факторов внешней среды на оптимальное управление добычей рыбных ресурсов и проводится сравнение различных характеристик для вероятностных и детерминированных моделей. Авторы [20] анализируют проблему оптимального сбора урожая для экосистемы, которая испытывает экологическую стохастичность; обобщение их работы дает возможность не только собирать урожай, но и добавлять особей в экосистему. Обзор литературы по данной тематике приведен в [21, 22].

Настоящее исследование является продолжением публикаций [11, 12, 23, 24], посвященных вопросам оптимального сбора ресурса из стохастических популяций. Объектом исследования в работах [11, 12] являются популяции из одного вида (однородные), заданные дифференциальными уравнениями, а в моменты заготовок из этих популяций извлекаются случайные доли ресурса. Предполагается, что процесс эксплуатации можно контролировать таким образом, чтобы ограничить количество добываемого ресурса с целью увеличения размера следующего сбора. Вводится понятие средней временной выгоды от добычи ресурса, получены оценки данной характеристики, выполненные с вероятностью единица. В [24] исследуются модели однородных популяций, заданные разностными уравнениями; показано, что количество добываемого ресурса существенно зависит от свойств функции, определяющей динамику популяции. Работа [23] посвящена вопросам эксплуатации стохастических структурированных популяций, состоящих из нескольких отдельных видов или возрастных групп. Здесь получена оценка средней временной выгоды для популяции, заданной системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ при условии, что ее решения обладают определенными свойствами.

В данной статье мы сначала рассматриваем модели динамики структурированных популяций, определенных системой линейных дифференциальных уравнений, зависящих от случайных параметров; в качестве следствий полученных утверждений приводим результаты для систем линейных разностных уравнений, частным случаем которых являются модели динамики популяции Лесли и Лефковича. Описан способ сбора ресурса, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции постоянно сохраняется или периодически восстанавливается. Также рассматриваются режимы эксплуатации, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Для доказательства основных утверждений применяется полученное здесь следствие закона больших чисел А. Н. Колмогорова. Отметим, что настоящая публикация отличается от [11, 12, 23, 24] более широкими возможностями построения управляющих воздействий; если во всех указанных работах применялись только постоянные управления, то здесь они могут быть как постоянными, так и периодическими. Применение периодического управления может способствовать получению большего значения средней временной выгоды, чем при стационарном управлении. В частности, это показано в примере 3.1 для вероятностной модели Лесли.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

1.1. Описание модели эксплуатируемой популяции

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\},$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — квадратная $n \times n$-матрица. Пусть в моменты времени kd, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = \big(\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)\big) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность контролировать процесс сбора так, чтобы остановить заготовку в момент kd, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся больше, чем значения $\big(u_1(k),\ldots,u_n(k)\big)=u(k)\in[0,1)^n$. В этом случае определенная часть популяции сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k)=\big(\ell_1(k),\ldots,\ell_n(k)\big)\in[0,1]^n$, где

$$\ell_i(k)=\min\{\omega_i(k),u_i(k)\},\quad i=1,\ldots,n,\ \ k=0,1,2,\ldots.$$

Предположим, что начальное количество ресурса i-го вида равно $X_i(0)$, количество ресурса этого вида до сбора в момент kd составляет $X_i(k)=x_i(kd-0)$, $k=1,2,\ldots$, после сбора данное количество равно $x_i(kd)$, $k=0,1,2,\ldots$. Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\dot x=Ax,\quad t\neq kd,\\ x_i(kd)=\big(1-\ell_i(k)\big)\cdot x_i(kd-0),\quad i=1,\ldots,n.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Полагаем, что решения системы (1.1) непрерывны справа.

1.2. Определение средней временной выгоды

Будем обозначать скалярное произведение векторов $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$ через $\langle x,y\rangle$, тогда $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$. Пусть $C_i\geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $i=1,\ldots,n$, $C=(C_1,\ldots,C_n)$, $X(k)=\big(X_1(k),\ldots,X_n(k)\big)$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент времени kd равна

$$y(k)=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(k)\ell_i(k)=\big\langle CX(k),\ell(k)\big\rangle,$$

где $CX(k)=\big(C_1X_1(k),\ldots,C_nX_n(k)\big)$. Пусть $\overline{\ell}\doteq\big(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots\big)$. Рассмотрим функцию, введенную в работе [11]:

$$H_*\big(\overline{\ell},X(0)\big)\doteq\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}y(j)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(j),\ell(j)\big\rangle,\tag{1.2}$$

которая называется *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Если предел (1.2) существует, будем обозначать его $H\big(\overline{\ell},X(0)\big)$.

1.3. Матрицы Метцлера и экспоненциально неотрицательные матрицы

Пусть A и B — вещественные прямоугольные матрицы одинаковых размеров $n\times m$. Будем писать $A\leqslant B$ или $B\geqslant A$ в том и только в том случае, когда

$$a_{ij}\leqslant b_{ij},\quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m.$$

Если во всех последних неравенствах можно отбросить знак равенства, то будем писать $A<B$ или $B>A$. В частности, для векторов $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$ неравенство $x\leqslant y$ означает, что $x_i\leqslant y_i$ для любых $i=1,\ldots,n$. Матрица A называется *неотрицательной* (обозначение $A\geqslant 0$) или *положительной* (обозначение $A>0$), если все элементы матрицы A неотрицательные (соответственно положительные), см. [25, с. 352–355].

Обозначим через $\varphi(t,x)$ решение линейной системы $\dot x=Ax$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x)=x$, где $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^n_+$. Известно, что данное решение можно записать в виде $\varphi(t,x) = e^{At}x$, где e^{At} — матричная экспонента. Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$, см. [26].

Всюду в данной статье будем предполагать, что $n \times n$-матрица A является матрицей Метцлера. Это означает, что элементы матрицы A удовлетворяют неравенствам

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,\ i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 1.1 (см. [26, лемма 3.1]). *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Отметим, что первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе [27] 1950 года. Из леммы 1.1 очевидно, следует, что если A — матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то $\varphi(t,x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t,y)$ для любого $t \geqslant 0$. Также отсюда следует, что решение $\varphi(t,x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, то есть обладает свойством *квазиположительности* (см. [28, с. 34]).

1.4. Описание вероятностной модели

Управляемая система (1.1) зависит от случайных параметров $\omega(k) \in \Omega$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Приведем описание соответствующей *вероятностной модели*. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0,1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma\colon \sigma = (\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}$, где $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0,1]^n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \bigl\{\sigma \in \Sigma\colon \omega(0) \in A(0), \ldots, \omega(k-1) \in A(k-1)\bigr\}, \quad \text{где} \quad A(j) \in \widetilde{\mathfrak{A}},\ j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k) = \widetilde{\mu}(A(0)) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A(k-1))$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см. [29, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

1.5. Теорема о пределе среднего арифметического независимых случайных величин

Докажем утверждение, необходимое для оценки средней временной выгоды, выполненной с вероятностью единица. Следущая теорема является следствием усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова [29, с. 418] и может применяться во многих других задачах; поэтому в данном разделе мы сохраняем обозначения и пределы суммирования, которые обычно применяются для формулировки закона больших чисел.

Теорема 1.1. *Предположим, что $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M\xi_1 > 0$, $0 \leqslant \xi_k \leqslant a$ для некоторого $a > 0$ и всех $k = 1, 2, \ldots$. Пусть также задана числовая последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $b_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} b_j \xi_j = +\infty. \tag{1.3}$$

Доказательство. Отметим сначала, что последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова, в силу которого для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \xi_j = M\xi_1 > 0. \tag{1.4}$$

Так как $b_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то для любого $b > 0$ найдется номер k_0 такой, что $b_k \geqslant b$ для всех $k \geqslant k_0$. Поэтому при $k \geqslant k_0$ выполнено $\sum\limits_{j=k_0}^{k} b_j\xi_j \geqslant b \sum\limits_{j=k_0}^{k} \xi_j$. Из последнего неравенства и (1.4) получаем, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} b_j\xi_j = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=k_0}^{k} b_j\xi_j \geqslant b \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=k_0}^{k} \xi_j = b \cdot M\xi_1 \tag{1.5}$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Таким образом, поскольку b — любое положительное число и $M\xi_1 > 0$, то из (1.5) следует (1.3). $\square$

В данной статье будем применять следствие из теоремы 1.1:

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что $M\xi_1 > 0$, $0 \leqslant \xi_k \leqslant a$ для некоторого $a > 0$ и всех $k = 1, 2, \ldots$. Если $\lambda > 1$, то для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \xi_j = +\infty.$$

Доказательство следует из того, что $\lambda^k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то есть числовая последовательность $\{\lambda^k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.

§ 2. Оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица

Напомним, что мы рассматриваем случайные величины

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \ldots, n, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

определяющие долю ресурса i-го вида, добываемого из популяции в моменты времени kd, где $d > 0$. Пусть $L(k) = \operatorname{diag}\big(\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)\big)$ — диагональная $n \times n$-матрица с элементами $\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)$ на главной диагонали, E — единичная матрица n-го порядка, $X(0) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда развитие популяции (1.1) можно задать системой разностных уравнений, зависящей от случайных параметров:

$$X(k+1) = e^{Ad}\big(E - L(k)\big)X(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

где $X(k) = \big(X_1(k), \ldots, X_n(k)\big)$ — видовой состав популяции до сбора ресурса в момент времени kd.

Вместе с системой со случайными параметрами (2.2) будем исследовать соответствующую ей детерминированную систему разностных уравнений

$$\widetilde{X}(k+1) = e^{Ad}\big(E - U(k)\big)\widetilde{X}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3}$$

где $U(k) = \operatorname{diag}\big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big)$, $\widetilde{X}(0) = X(0)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Вектор Y называется $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ *достижимым за m шагов*, если существует конечная последовательность векторов $D = \{u(0), \ldots, u(m-1)\}$ таких, что

$$\widetilde{X}(j+1) = e^{Ad}\big(E - U(j)\big)\widetilde{X}(j), \; j = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{и} \quad \widetilde{X}(m) = Y.$$

Отметим, что подобное определение приведено в работе [6] для систем разностных уравнений, заданных матрицей Лесли.

Рассмотрим множество $\mathcal{U} \doteq \{\overline{u}\colon \overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}$, где $u(k) \in [0,1]^n$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайных величин, тогда

$$M\ell(k) = \big(M\ell_1(k), \ldots, M\ell_n(k)\big), \quad CMX(k) = \big(C_1MX_1(k), \ldots, C_nMX_n(k)\big), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Пусть $P(k) \doteq e^{Ad}\big(E - L(k)\big)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

В следующем утверждении получена оценка снизу для средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции $X(0)$ постоянно сохраняется или периодически восстанавливается, то есть $X(km) \geqslant X(0)$ для некоторого $m \geqslant 1$ и всех $k = 1,2,\ldots$. Если $X(0) > 0$, то условие $X(km) \geqslant X(0)$ обеспечивает сохранность всех видов или возрастных классов, составляющих данную популяцию.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов. Тогда существует $\overline{u} \in \mathcal{U}$ такое, что $X(km) \geqslant X(0)$, $k = 1,2,\ldots$, и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено неравенство*

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\big\langle CMX(j), M\ell(j)\big\rangle, \tag{2.4}$$

где $X(j) = P(j-1)\ldots P(1)P(0)X(0)$, $j = 1,\ldots,m-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как вектор $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов, то существует конечная последовательность векторов $D = \{u^*(0), \ldots, u^*(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1) = e^{Ad}\big(E - U^*(j)\big)\widetilde{X}(j), \quad \widetilde{X}(m) = X(0),$$

где $U^*(j) = \operatorname{diag}\big(u_1^*(j), \ldots, u_n^*(j)\big)$, $j = 0,1,\ldots,m-1$.

Далее, $\ell_i(j) = \min\{\omega_i(j), u_i^*(j)\} \leqslant u_i(j)$ для всех $i = 1,\ldots,n$, поэтому $L(j) \leqslant U(j)$ и

$$P(j) \doteq e^{Ad}\big(E - L(j)\big) \geqslant e^{Ad}\big(E - U(j)\big), \quad j = 0,1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Из (2.2) найдем $X(m) = P(m-1)\ldots P(1)P(0)X(0)$, тогда

$$X(m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big)\ldots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big)X(0) = X(0). \tag{2.6}$$

Выберем управление $\overline{u} \in \mathcal{U}$ стационарным, если $m = 1$ или периодическим с периодом m, если $m \geqslant 2$, полагая $u(km+j) = u^*(j)$, $j = 0,\ldots,m-1$, $k = 1,2,\ldots$. Последние равенства равносильны

$$U(sm+j) = U^*(j), \quad j = 0,\ldots,m-1, \;\; s = 1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.7) следует

$$\begin{gathered} X(2m) = P(2m-1)\ldots P(m+1)P(m)X(m) \geqslant \\ \geqslant e^{Ad}(E - U(2m-1))\ldots e^{Ad}(E - U(m))X(0) = \\ = e^{Ad}(E - U^*(m-1))\ldots e^{Ad}(E - U^*(0))X(0) = X(0). \end{gathered}$$

Аналогично получаем

$$X(km) \geqslant X(0) \quad \text{для всех} \quad k = 1,2,\ldots. \tag{2.8}$$

Теперь из (2.8) имеем

$$\begin{gathered} X(km+1) = P(km)X(km) \geqslant P(km)X(0), \\ X(km+2) = P(km+1)P(km)X(km) \geqslant P(km+1)P(km)X(0), \quad \dots, \\ X(km+m-1) = P(km+m-2)\dots P(km)X(km) \geqslant \\ \geqslant P(km+m-2)\dots P(km)X(0). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Учитывая (2.8) и (2.9), получаем следующую оценку средней временной выгоды:

$$\begin{aligned} H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) &\doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km}\sum_{j=0}^{km-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle \geqslant \\ &\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km}\Big(\big\langle CX(0), \ell(0)\big\rangle + \big\langle CP(0)X(0), \ell(1)\big\rangle + \ldots + \\ &\quad + \big\langle CP(m-2)\dots P(1)P(0)X(0), \ell(m-1)\big\rangle + \\ &\quad + \big\langle CX(0), \ell(m)\big\rangle + \big\langle CP(m)X(0), \ell(m+1)\big\rangle + \ldots + \\ &\quad + \big\langle CP(km-2)\dots P((k-1)m)X(0), \ell(km-1)\big\rangle\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку $u(km) = u^*(0)$, то случайные величины

$$\ell_i(km) = \min\{\omega_i(km), u_i(km)\} = \min\{\omega_i(km), u_i^*(0)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

независимы и одинаково распределены (для каждого $i = 1, \dots, n$). Скалярные произведения $\big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$, также являются независимыми случайными величинами, имеют одинаковое распределение, и так как $0 \leqslant \big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle \leqslant \|CX(0)\|$, то

$$M\big|\big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle\big| \leqslant \|CX(0)\| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Поэтому из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(0), \ell(jm)\big\rangle = \big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle.$$

Случайные величины $\big\langle CX(km+1), \ell(km+1)\big\rangle = \big\langle CP(km)X(0), \ell(km+1)\big\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$, также удовлетворяют усиленному закону больших чисел, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CP(jm)X(0), \ell(jm+1)\big\rangle = \big\langle CMP(0)X(0), M\ell(1)\big\rangle.$$

Аналогично, из (2.10) получаем, что

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \geqslant \frac{1}{m}\Big(\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle + \ldots + \big\langle CMP(m-2)\dots P(1)P(0)X(0), \ell(m-1)\big\rangle\Big),$$

то есть выполнено неравенство (2.4). □

З а м е ч а н и е 1. Случайные величины $\ell_i(0), \dots, \ell_i(m-2)$ независимы, поэтому независимыми являются случайные матрицы $P(0), \dots, P(m-2)$. Следовательно,

$$MX(j) = MP(j-1)\dots MP(1)MP(0)X(0), \quad j = 1, \dots, m-1,$$

где $MP(s) = e^{Ad}\big(E - ML(s)\big)$, $ML(s) = \operatorname{diag}\big(M\ell_1(s), \ldots, M\ell_n(s)\big)$, $s = 0, 1, \ldots, j-1$.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если функция распределения F случайной величины $\ell_i(k)$ абсолютно непрерывна, то ее математическое ожидание равно

$$M\ell_i(k) = \int_0^u tf(t)\,dt + u\big(1 - F(u)\big), \quad i = 1, \ldots, n, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

где через f обозначена плотность данного распределения (см. [11]).

Т е о р е м а 2.2. *Предположим, что* $\lambda X(0)$ *является* $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ *достижимым за* m *шагов при некотором* $\lambda > 1$ *и* $\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle > 0$. *Тогда существует* $\overline{u} \in \mathcal{U}$ *такое, что* $X(km) \geqslant \lambda^k X(0)$, $k = 1, 2, \ldots$, *и* $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ *для почти всех* $\sigma \in \Sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D = \{u^*(0), \ldots, u^*(m-1)\}$. Так же, как при выводе (2.6), получаем неравенство

$$X(m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big) \ldots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big)X(0) = \lambda X(0). \tag{2.12}$$

Выберем стационарное (при $m = 1$) или периодическое ($m \geqslant 2$) управление $\overline{u} \in \mathcal{U}$ таким образом, чтобы $u(sm + j) = u^*(j)$, $j = 0, \ldots, m-1$, $s = 1, 2, \ldots$. Тогда из (2.12) следует

$$X(2m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big) \ldots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big)X(m) \geqslant \lambda^2 X(0).$$

Аналогично, $X(km) \geqslant \lambda^k X(0)$ для любых $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, справедлива оценка средней временной выгоды

$$\begin{aligned} H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km} \sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(jm), \ell(jm)\big\rangle \geqslant \\ \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \big\langle CX(0), \ell(jm)\big\rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Случайные величины $\ell(km) = \min\{\omega(km), u(km)\} = \min\{\omega(km), u^*(0)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены, такими же свойствами обладают случайные величины $\xi(k) \doteq \big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, $\xi(k)$ имеют положительное математическое ожидание $\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle$ и $0 \leqslant \xi(k) \leqslant \|CX(0)\|$. Поэтому, в силу следствия 1.1, для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \xi(j) = +\infty. \tag{2.14}$$

Теперь из (2.13) и (2.14) следует, что $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$. $\square$

П р и м е р 2.1. Рассмотрим структурированную популяцию, начальный состав которой $X(0) = (20, 10)$, а ее развитие при отсутствии эксплуатации задано системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $C = (2, 3)$ и случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим матрицу $V = e^{Ad}(E-U)$:

$$V = \begin{pmatrix} e^{-d} & 2(e^{2d}-e^{-d}) \\ 0 & e^{2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-u_1 & 0 \\ 0 & 1-u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-u_1)e^{-d} & 2(1-u_2)(e^{2d}-e^{-d}) \\ 0 & (1-u_2)e^{2d} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Вектор $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за 1 шаг, если $VX(0) = X(0)$, откуда получаем, что $u_1(0) = u_2(0) = 1 - e^{-2d}$.

Случайные величины $\omega_i(k)$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, поэтому их плотность $f(t) = 1$ при $t \in [0,1]$ и функция распределения $F(t) = t$, $t \in [0,1]$. Таким образом, из (2.11) получаем, что

$$M\ell_i(0) = u_i(0) - \frac{u_i^2(0)}{2} = \frac{1-e^{-4d}}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Теперь из (2.4) при $m = 1$ следует неравенство

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle = 35\big(1 - e^{-4d}\big),$$

выполненное для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Найдем управления, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Обозначим через $\lambda_{\max}(V)$ наибольшее вещественное собственное значение матрицы V, тогда $\lambda_{\max}(V) = \max\big\{(1-u_1)e^{-d}, (1-u_2)e^{2d}\big\}$. Очевидно, что $\lambda = \lambda_{\max}(V) > 1$ при $u_2^*(0) < 1 - e^{-2d}$. Из (2.15) получаем, что $\lambda X(0) = \lambda_{\max}(V)X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за 1 шаг при $u_1^*(0) = 1 - \lambda e^{-2d}$, где $\lambda \in (1, e^{2d}]$. Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из неравенств $u_1^*(0) > 0$ или $u_2^*(0) > 0$, то $\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle > 0$. Таким образом, в силу теоремы 2.2 равенство $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ справедливо для почти всех $\sigma \in \Sigma$ при любом стационарном управлении $u(k) = u^*(0) = \big(u_1^*(0), u_2^*(0)\big)$, где $u_2^*(0) < 1 - e^{-2d}$ и $u_1^*(0)$, $u_2^*(0)$ одновременно не равны нулю.

§ 3. Об эксплуатации популяции, заданной моделью Лесли со случайными параметрами

Предположим,что все особи некоторой популяции разделены на n возрастных групп и вектор-столбец $X(k) = \big(X_1(k), \ldots, X_n(k)\big)$ характеризует возрастную структуру популяции в моменты времени $k = 0, 1, 2, \ldots$, то есть $X_i(k)$ определяет количество особей возраста $i = 1, 2, \ldots, n$ в момент времени k. Возрастная структура популяции в следующий момент $k+1$ задается уравнением

$$X(k+1) = RX(k), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Здесь R — матрица Лесли, имеющую следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где b_i — коэффициент рождаемости i-й возрастной группы, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, s_i — коэффициент выживаемости i-й возрастной группы, $s_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Предполагается, что за единичный промежуток времени особи i-й группы переходят в группу $i+1$, от некоторых групп появляются потомки и часть особей каждой группы погибает.

Для определения модели эксплуатируемой популяции рассмотрим случайные величины $\ell_i(k)$, заданные (2.1), равные долям ресурса i-го вида, добываемого в моменты времени kd, диагональную $n \times n$-матрицу $L(k) = \operatorname{diag}(\ell_1(k), \dots, \ell_n(k))$ и возрастной состав популяции $X(0) \in \mathbb{R}^n_+$ в начальный момент времени. Тогда динамику популяции с учетом эксплуатации можно определить системой разностных уравнений, зависящих от случайных параметров:

$$X(k+1) = R\bigl(E - L(k)\bigr)X(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

Рассмотрим матрицы $P(k) \doteq R\bigl(E - L(k)\bigr)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку матрица R неотрицательная, то для популяции (3.1) справедливы теоремы 2.1 и 2.2, доказанные в предыдущем параграфе.

П р и м е р 3.1. Предположим, что развитие популяции при отсутствии эксплуатации задано матрицей Лесли $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а ее начальный состав $X(0) = (20, 10)$. Пусть $C = (2, 3)$ и случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдем оценку средней временной выгоды (2.4) при стационарном управлении (то есть при $m = 1$) и при периодическом управлении с периодом $m = 2$.

Пусть $m = 1$. Найдем матрицу

$$V(0) = R(E - U(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - u_1(0) & 0 \\ 0 & 1 - u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(1 - u_2(0)) \\ 1 - u_1(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $X(0)$ является $(R, X(0))$ достижимым за один шаг, если $VX(0) = X(0)$, а это возможно только при $u_1(0) = 1/2$, $u_2(0) = 0$. Тогда

$$M\ell_1(0) = u_1(0) - \frac{u_1^2(0)}{2} = \frac{3}{8}, \quad M\ell_2(0) = u_2(0) - \frac{u_2^2(0)}{2} = 0,$$

и из (2.4) получаем

$$H_*\bigl(\overline{\ell}, X(0)\bigr) \geqslant \bigl\langle CX(0), M\ell(0)\bigr\rangle = 15.$$

Рассмотрим случай $m = 2$. Здесь $X(0)$ является $(R, X(0))$ достижимым за два шага, если $V(1)V(0)X(0) = X(0)$, откуда получаем

$$\bigl(1 - u_2(1)\bigr)\bigl(1 - u_1(0)\bigr) = 1/2, \quad \bigl(1 - u_1(1)\bigr)\bigl(1 - u_2(0)\bigr) = 1/2. \tag{3.2}$$

Из (2.4) найдем оценку средней временной выгоды, выполненную для почти всех $\sigma \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} H_*\bigl(\overline{\ell}, X(0)\bigr) &\geqslant \frac{1}{2}\Bigl(\bigl\langle CX(0), M\ell(0)\bigr\rangle + \bigl\langle CMX(1), M\ell(1)\bigr\rangle\Bigr) = \\ &= 20M\ell_1(0) + 15M\ell_2(0) + 20M\ell_1(1)\bigl(1 - M\ell_2(0)\bigr) + 30M\ell_2(1)\bigl(1 - M\ell_1(0)\bigr), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $M\ell_i(j) = u_i(j) - u_i^2(j)/2$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$. Пропуская промежуточные вычисления, отметим, что выражение в правой части (3.3) достигает наибольшего значения (при условии что выполнено (3.2)), если

$$u_1(0) = 1 - \sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \;\; u_2(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \;\; u_1(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \;\; u_2(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

При данных управлениях для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$H_*\bigl(\overline{\ell}, X(0)\bigr) \geqslant \frac{215}{8} - \frac{5}{2}\bigl(\sqrt{3} + \sqrt{2}\bigr) \approx 19{,}009.$$

В случае $m = 3$ имеем приближенное неравенсто $H_*\bigl(\overline{\ell}, X(0)\bigr) \geqslant 19{,}042$, выполненное для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Таким образом, при периодическом управлении с периодами два и три оценки снизу для средней временной выгоды получились больше, чем при стационарном управлении.

Отметим, что результаты статьи применимы не только для систем с постоянными матрицами, но и для систем с периодическими матрицами, которые могут возникать в задачах демографии растений и животных (см. [3, 5, 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. 1945. Vol. 33. Issue 3. P. 183–212. https://doi.org/10.1093/biomet/33.3.183
2. Lefkovitch L. P. The study of population growth in organisms grouped by stages // Biometrics. 1965. Vol. 21. No. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.2307/2528348
3. Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. Вып. 4. С. 145–164. https://www.mathnet.ru/rus/fpm1068
4. Логофет Д. О. Еще раз о проекционных матрицах: индикатор потенциального роста и польза индикации // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 6. С. 41–63. https://www.mathnet.ru/rus/fpm1449
5. Логофет Д. О., Уланова Н. Г. От мониторинга популяции к математической модели: новая парадигма популяционного исследования // Журнал общей биологии. 2021. Т. 82. № 4. С. 243–269. https://doi.org/10.31857/S0044459621040035
6. Doubleday W. G. Harvesting in matrix population models // Biometrics. 1975. Vol. 31. No. 1. P. 189–200. https://doi.org/10.2307/2529719
7. Мазуров Вл. Д., Смирнов А. И. Критерий существования сохраняющих управлений задачи оптимальной эксплуатации системы с бинарной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 101–117. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-101-117
8. Смирнов А. И., Мазуров В. Д. Алгоритм решения задачи оптимальной эксплуатации системы с бинарной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 142–160. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-142-160
9. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable resourse // Mathematical Biosciences. 1974. Vol. 22. P. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
10. Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. Issue 4. P. 350–363. https://doi.org/10.1016/0095-0696(79)90014-7
11. Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. https://doi.org/10.20537/vm180105
12. Родина Л. И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 213–221. https://doi.org/10.20537/vm180207
13. Hening A., Nguyen D. H., Ungureanu S. C., Wong Tak Kwong. Asymptotic harvesting of populations in random environments // Journal of Mathematical Biology. 2019. Vol. 78. Issues 1–2. P. 293–329. https://doi.org/10.1007/s00285-018-1275-1
14. Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of Environmental Economics and Management. 2002. Vol. 43. Issue 2. P. 325–338. https://doi.org/10.1006/jeem.2000.1181
15. Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty // Resourse and Energy Economics. 2017. Vol. 50. P. 164–177. https://doi.org/10.1016/j.reseneeco.2017.08.001
16. Liu Lidan, Meng Xinzhu. Optimal harvesting control and dynamics of two-species stochastic model with delays // Advances in Difference Equations. 2017. Vol. 2017. Issue 1. Article number: 18. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1077-6
17. Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Environmental and Resource Economics. 2013. Vol. 54. Issue 2. P. 293–310. https://doi.org/10.1007/s10640-012-9606-y

18. Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries // Journal of Environmental Economics and Management. 2018. Vol. 92. P. 659–676. https://doi.org/10.1016/j.jeem.2017.08.011
19. Zhao Yu, Yuan Sanling. Optimal harvesting policy of a stochastic two-species competitive model with Levy noise in a polluted environment // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. Vol. 477. P. 20–33. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.02.019
20. Hening A., Tran Ky Quan, Phan Tien Trong, Yin G. Harvesting of interacting stochastic populations // Journal of Mathematical Biology. 2019. Vol. 79. Issue 2. P. 533–570. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01368-x
21. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 81. P. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
22. Liu Meng. Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients // Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32. Issue 2. Article number: 23. https://doi.org/10.1007/s00332-021-09758-6
23. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 41–49. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-04
24. Родин А. А., Родина Л. И., Черникова А. В. О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 211–227. https://doi.org/10.35634/vm220204
25. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
26. Noutsos D., Tsatsomeros M. J. Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 30. Issue 2. P. 700–712. https://doi.org/10.1137/070693850
27. Wazewski T. Systèmes des équations et des inégalités différentieles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications // Annales de la Société Polonaise de Mathématique. 1950. Vol. 23. P. 112–166. https://zbmath.org/0041.20705
28. Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.
29. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 01.02.2023

Принята к публикации 15.04.2023

Волдеаб Мебрахтом Себхату, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87;
старший преподаватель, кафедра общей математики, научный колледж Маи-Нефхи, 12676, Эритрея, г. Асмэра.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1586-4728
E-mail: mebseb2018@gmail.com

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87; профессор, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189
E-mail: LRodina67@mail.ru

Цитирование: М. С. Волдеаб, Л. И. Родина. Об эксплуатации популяции, заданной системой линейных уравнений со случайными параметрами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 27–41.

M. S. Woldeab, L. I. Rodina

On the exploitation of a population given by a system of linear equations with random parameters

Keywords: structured populations, average time benefit, optimal exploitation, non-negative matrices, Leslie matrix.

MSC2020: 37N35, 39A60, 49J15, 93C55

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-02

We consider a population whose dynamics in the absence of exploitation is given by a system of linear homogeneous differential equations, and some random shares of the resource of each species at fixed times, are extracted from this population. We assume that the harvesting process can be controlled in such a way as to limit the amount of the extracted resource in order to increase the size of the next harvesting. A method for harvesting a resource is described, in which the largest value of the average time benefit is reached with a probability of one, provided that the initial amount of the population is constantly maintained or periodically restored. The harvesting modes are also considered in which the average time benefit is infinite. To prove the main assertions, we use the corollary of the law of large numbers proved by A. N. Kolmogorov. The results on the optimal resource extraction for systems of linear difference equations, a particular case of which are Leslie and Lefkovich population dynamics models, are given.

REFERENCES

1. Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika*, 1945, vol. 33, issue 3, pp. 183–212. https://doi.org/10.1093/biomet/33.3.183
2. Lefkovitch L. P. The study of population growth in organisms grouped by stages, *Biometrics*, 1965, vol. 21, no. 1, pp. 1–18. https://doi.org/10.2307/2528348
3. Logofet D. O., Belova I. N. Nonnegative matrices as a tool to model population dynamics: Classical models and contemporary expansions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, issue 6, pp. 894–907. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9249-2
4. Logofet D. O. Projection matrices revisited: a potential-growth indicator and the merit of indication, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 193, issue 5, pp. 671–686. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1494-3
5. Logofet D. O., Ulanova N. G. From population monitoring to a mathematical model: The new paradigm of population research, *Zhurnal Obshchei Biologii*, 2021, vol. 82, no. 4, pp. 243–269 (in Russian). https://doi.org/10.31857/S0044459621040035
6. Doubleday W. G. Harvesting in matrix population models, *Biometrics*, 1975, vol. 31, no. 1, pp. 189–200. https://doi.org/10.2307/2529719
7. Mazurov V. D., Smirnov A. I. A criterion for the existence of nondestructive controls in the problem of optimal exploitation of an ecosystem with a binary structure, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 101–117 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-101-117
8. Smirnov A. I., Mazurov V. D. A solution algorithm for a problem of optimal exploitation of a system with a binary structure, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 142–160 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-142-160
9. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable resourse, *Mathematical Biosciences*, 1974, vol. 22, pp. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
10. Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, issue 4, pp. 350–363. https://doi.org/10.1016/0095-0696(79)90014-7

11. Rodina L. I. Optimization of average time profit for probability model of the population subject to a craft, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180105
12. Rodina L. I. Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resourse, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 213–221 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180207
13. Hening A., Nguyen D. H., Ungureanu S. C., Wong Tak Kwong. Asymptotic harvesting of populations in random environments, *Journal of Mathematical Biology*, 2019, vol. 78, issues 1–2, pp. 293–329. https://doi.org/10.1007/s00285-018-1275-1
14. Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2002, vol. 43, issue 2, pp. 325–338. https://doi.org/10.1006/jeem.2000.1181
15. Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty, *Resourse and Energy Economics*, 2017, vol. 50, pp. 164–177. https://doi.org/10.1016/j.reseneeco.2017.08.001
16. Liu Lidan, Meng Xinzhu. Optimal harvesting control and dynamics of two-species stochastic model with delays, *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 2017, issue 1, article number: 18. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1077-6
17. Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties?, *Environmental and Resource Economics*, 2013, vol. 54, issue 2, pp. 293–310. https://doi.org/10.1007/s10640-012-9606-y
18. Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2018, vol. 92, pp. 659–676. https://doi.org/10.1016/j.jeem.2017.08.011
19. Zhao Yu, Yuan Sanling. Optimal harvesting policy of a stochastic two-species competitive model with Lévy noise in a polluted environment, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, vol. 477, pp. 20–33. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.02.019
20. Hening A., Tran Ky Quan, Phan Tien Trong, Yin G. Harvesting of interacting stochastic populations, *Journal of Mathematical Biology*, 2019, vol. 79, issue 2, pp. 533–570. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01368-x
21. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information, *Marine Policy*, 2017, vol. 81, pp. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
22. Liu Meng. Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients, *Journal of Nonlinear Science*, 2022, vol. 32, issue 2, article number: 23. https://doi.org/10.1007/s00332-021-09758-6
23. Masterkov Yu. V., Rodina L. I. Estimation of average time profit for stochastic structured population, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 41–49 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-04
24. Rodin A. A., Rodina L. I., Chernikova A. V. On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 211–227 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220204
25. Gantmacher F. R. *The theory of matrices. In 2 volumes*, New York: AMS Chelsea Publishing, 1959.
26. Noutsos D., Tsatsomeros M. J. Reachability and holdability of nonnegative states, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, vol. 30, issue 2, pp. 700–712. https://doi.org/10.1137/070693850
27. Wazewski T. Systèmes des équations et des inégalités différentieles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 1950, vol. 23, pp. 112–166. https://zbmath.org/0041.20705
28. Kuzenkov O. A., Ryabova E. A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modeling of processes of selection), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2007.
29. Shiryaev A. N. *Probability*, New York: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2539-1

Received 01.02.2023

Accepted 15.04.2023

Mebrahtom Sebhatu Woldeab, Post-Graduate Student, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia;
Senior Lecturer, Department of General Mathematics, Mai-Nefhi College of Science, Asmara, 12676, Eritrea.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1586-4728
E-mail: mebseb2018@gmail.com

Lyudmila Ivanovna Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia;
Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology MISIS, Leninskii pr., 4, Moscow, 119049, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189
E-mail: LRodina67@mail.ru

Citation: M. S. Woldeab, L. I. Rodina. On the exploitation of a population given by a system of linear equations with random parameters, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 27–41.