Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2023. Том 61. С. 42–56

УДК 517.977

© *А. Р. Данилин, О. О. Коврижных*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ КАЧЕСТВА, ЗАВИСЯЩИМ ОТ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается задача оптимального управления линейной автономной системой с медленными и быстрыми переменными на фиксированном промежутке времени в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями в виде шара. Показатель качества — терминальный выпуклый, зависящий от медленных и быстрых переменных. Обосновано предельное соотношение для вектора, определяющего управляющую функцию, при стремлении малого параметра к нулю. Предельное соотношение уточняется для случая задачи непрямого управления с терминальным показателем качества, представляющим собой сумму значений двух строго выпуклых непрерывно дифференцируемых функций, первая из которых зависит только от медленных переменных, а вторая — только от быстрых и с минимумом в нуле. При этом показано, что первая компонента определяющего вектора сходится к определяющему вектору предельной задачи, а вторая компонента стремится к нулю. Получена полная асимптотика определяющего вектора по степеням малого параметра в задаче непрямого управления системой материальных точек в среде с сопротивлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенная задача, асимптотическое разложение, малый параметр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-03

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления [1–3] линейной автономной системой с медленными и быстрыми переменными (см., например, обзор [4]) в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями [5, 6] и выпуклым терминальным критерием качества [7].

В работах [8–10] изучались линейно-квадратичные задачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и неограниченным многомерным управлением.

Во всех работах, в которых получены полные асимптотики решений задач управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными, ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве и терминальным показателем качества, последний зависел только от медленных переменных. При этом, если оптимальное управление в предельной задаче непрерывно, то асимптотика решения получалась регулярной (в виде ряда Пуанкаре, см., например, [11, 12]). Если же в предельной задаче оптимальное управление разрывно, то асимптотическое разложение решения имело сложный характер [13].

Отметим также работы [14, 15], посвященные задачам с ограничением на управление и интегральным выпуклым критерием качества.

Основное отличие рассматриваемой в настоящей работе задачи состоит в том, что функционал качества — выпуклый терминальный, зависящий от медленных и быстрых переменных. В § 1 даются общая постановка задачи, основные определения, предположения и устанавливается предельное соотношение для определяющего вектора при стремлении к нулю малого параметра. В § 2 предельное соотношение уточняется для случая задачи непрямого управления. Далее, в §§ 3, 4 получена полная асимптотика определяющего вектора по степеням малого параметра в задаче управления системой материальных точек в среде с сопротивлением при непрерывном оптимальном управлении в предельной задаче, как и в [11].

§ 1. Постановка задачи, определяющий вектор и предельные теоремы

Пусть управляемая система содержит медленные и быстрые переменные:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, & t \in [0,T], \quad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

а показатель качества имеет вид

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) := \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) \to \min, \tag{1.2}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j = 1,2$ — постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности, а

$$\begin{gathered} \sigma\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R} \text{ — строго выпуклая и непрерывно} \\ \text{дифференцируемая на } \mathbb{R}^{n+m} \text{ функция.} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Евклидовы нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$, а скалярные произведения — через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В качестве символа транспонирования матриц используется, как и в [1, с. 132], знак *, например, A_{11}^* или B_2^*.

Задачу (1.1), (1.2) перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, & t \in [0,T], \\ z_\varepsilon(0) = z^0, & \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.4}$$

с показателем качества (1.2)

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma(z_\varepsilon(T)) \to \min, \tag{1.5}$$

где

$$\sigma(z_\varepsilon(T)) := \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)), \quad z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1.4) с заданным u будем обозначать $z(\cdot;u)$.

Пусть $\Xi_\varepsilon(z^0,T)$ — множество достижимости системы (1.4) к моменту времени T. Поскольку $\Xi_\varepsilon(z^0,T)$ — выпуклый компакт (см., например, [3, п. 2.2, теорема 1]), а σ в силу (1.3) непрерывна и строго выпукла, то существует единственная точка $z_{\varepsilon,\min} \in \Xi_\varepsilon(z^0,T)$ такая, что

$$\sigma(z_{\varepsilon,\min}) = \min_{z \in \Xi_\varepsilon(z^0,T)} \sigma(z), \quad z_{\varepsilon,\min} := \arg \min_{z \in \Xi_\varepsilon(z^0,T)} \sigma(z),$$

тем самым, задача (1.4), (1.5) разрешима.

Принцип максимума Понтрягина в рассматриваемом случае имеет вид (см., например, [7, п. 6.1.3]): если u_ε^{opt} — оптимальное управление в задаче (1.4), (1.5), то найдется такой вектор λ_ε, что $z_\varepsilon(\cdot;u_\varepsilon^{opt})$ — решение задачи

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}, \\ z_\varepsilon(0) = z^0, \end{cases} \tag{1.6}$$

удовлетворяет равенству

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla\sigma(z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{opt})), \tag{1.7}$$

и выполняется соотношение

$$\langle \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{(T-t)\mathcal{A}_\varepsilon^*}\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon^{opt}(t)\rangle = \max_{\|u_\varepsilon(t)\|\leqslant 1} \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{(T-t)\mathcal{A}_\varepsilon^*}\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon(t)\rangle = \left\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{(T-t)\mathcal{A}_\varepsilon^*}\lambda_\varepsilon\right\|. \tag{1.8}$$

Пусть система (1.4) вполне управляема и

$$\lambda_\varepsilon \neq 0, \tag{1.9}$$

тогда $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{(T-t)\mathcal{A}_\varepsilon^*}\lambda_\varepsilon$ имеет на отрезке $[0; T]$ лишь конечное число нулей и оптимальное управление из (1.8) выражается через λ_ε следующим образом:

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) = \frac{\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon}{\|\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\|}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t) := \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{t\mathcal{A}_\varepsilon^*}. \tag{1.10}$$

Отметим, что $z(T, u_\varepsilon^{opt}) = z_{\varepsilon,\min}$, поэтому условие (1.9) в силу (1.7) эквивалентно тому, что $\nabla\sigma(z_{\varepsilon,\min}) \neq 0$ и, тем самым, в задаче (1.4), (1.5) ограничения на управление по существу.

Пусть $z_{\min}$ — точка глобального минимума функции σ на $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда условие (1.9) эквивалентно условию

$$z_{\min} \notin \Xi_\varepsilon(z^0, T). \tag{1.11}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *При выполнении условия* (1.11) *принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности для задачи* (1.4)*,* (1.5)*, и в силу* (1.7) *вектор* λ_ε *и оптимальное управление* u_ε^{opt} *единственны.* □

Используя формулу Коши для решения линейной системы дифференциальных уравнений (1.6) (с заменой в интеграле $T-t$ на t), для вектора λ_ε получим следующее уравнение

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla\sigma\left(e^{T\mathcal{A}_\varepsilon} z_0 + \int_0^T e^{t\mathcal{A}_\varepsilon}\mathcal{B}_\varepsilon \frac{\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon}{\|\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\|}\, dt\right). \tag{1.12}$$

Итак, в силу утверждения 1, при выполнении условия (1.11) уравнение (1.12) имеет единственное решение, и вектор λ_ε определяет единственное оптимальное управление в задаче (1.4), (1.5) по формуле (1.10). Поэтому в этом случае естественно назвать вектор λ_ε *определяющим вектором*.

Определение 1. Будем говорить, что пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ *вполне управляема*, если вполне управляема система $\dot{x} = \mathcal{A}_\varepsilon x + \mathcal{B}_\varepsilon u$.

Предположение 1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, то есть $\operatorname{rank}\left(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon\right) = n+m$.

Будем предполагать, что выполнено следующее условие устойчивости точки покоя присоединенной системы.

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части, то есть $\operatorname{Re}\lambda_j(A_{22}) \leqslant -\alpha < 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

О п р е д е л е н и е 2. Следуя [16, формулы (52)–(54), с. 77], *предельной задачей* для (1.4), (1.5) назовем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \mathcal{A}_0 x_0 + \mathcal{B}_0 u, \quad t \in [0,T], \quad \mathcal{A}_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ x_0(0) = x^0, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad \mathcal{B}_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ J_0(u) := \sigma_0(x_0(T;u)) \to \min, \end{cases} \tag{1.13}$$

где

$$\sigma_0(x) := \inf_{r\in\mathcal{R}} \sigma(x, r - A_{22}^{-1}A_{21}x) = \inf_{y\in\mathcal{R}(x)} \sigma(x,y), \tag{1.14}$$

$$\mathcal{R} := \int_0^{+\infty} e^{sA_{22}} B_2 \mathcal{V} ds, \quad \mathcal{R}(x) := -A_{22}^{-1}A_{21}x + \mathcal{R}, \tag{1.15}$$

а $\mathcal{V} := \mathcal{B}[0,1]$ — шар в $\mathbb{R}^r$ единичного радиуса с центром в нуле [16, § 3.4.1, с. 77].

Отметим, что в силу вида множества $\mathcal{V}$ из (1.15) следует, что

$$0 \in \mathcal{R} \text{ — выпуклый компакт}, \tag{1.16}$$

[16, § 3.4.1, с. 77] и, тем самым, в (1.14) $\inf$ можно заменить на $\min$. Опорная функция множества $\mathcal{R}$ при таком $\mathcal{V}$ вычисляется по формуле

$$\rho(l|\mathcal{R}) = \int_0^{+\infty} \| B_2^* e^{sA_{22}^*} l \| \, ds$$

(см., например, [17, формулы (3.1) и (5.2)]).

П р е д п о л о ж е н и е 3. Пары матриц $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon := \Xi_\varepsilon(z^0, T)$ — множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (1.4), а

$$\mathcal{K}_0 := \{ z \in \mathbb{R}^{n+m} \colon x \in \Xi_0(x^0, T),\ y \in \mathcal{R}(x) \}, \tag{1.17}$$

где $\Xi_0(x^0, T)$ — множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (1.13). Известно, что $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\Xi_0(x^0, T)$ и $\mathcal{K}_0$ компактные множества и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_H(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) = 0, \tag{1.18}$$

где $d_H(\cdot,\cdot)$ — расстояние по Хаусдорфу [16, с. 70, теорема 3.1].

Кроме этого,

$$\min_{z\in\mathcal{K}_\varepsilon} \sigma(z) \to \min_{z\in\mathcal{K}_0} \sigma(z) = \min_{x\in\Xi_0(x^0,T)} \sigma_0(x) \quad \text{при } \varepsilon \to +0, \tag{1.19}$$

см., например, [16, п. 3.4, формулы (51)–(54), теорема 3.3].

Из соотношения (1.18) следует справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если выполнено условие*

$$z_{\min} \notin \mathcal{K}_0, \tag{1.20}$$

то для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *выполнено условие* (1.11). □

П р е д п о л о ж е н и е 4. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие (1.20).

У т в е р ж д е н и е 3. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$z_{\varepsilon,\min} = \arg\min_{z\in\mathcal{K}_\varepsilon} \sigma(z) \to z_{0,\min} := \arg\min_{z\in\mathcal{K}_0} \sigma(z) \textit{ при } \varepsilon \to +0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{z}$ — произвольный частичный предел $\{z_{\varepsilon,\min}\}$, то есть $z_k := z_{\varepsilon_k,\min} \to \widetilde{z}$ для некоторой последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to +0$. Поскольку

$$0 \leqslant \rho(z_k, \mathcal{K}_0) := \min_{z\in\mathcal{K}_0} \|z_k - z\| \leqslant d_H(\mathcal{K}_{\varepsilon_k}, \mathcal{K}_0),$$

то, переходя к пределу при $k \to \infty$, в силу (1.18) получим, что $\rho(\widetilde{z}, \mathcal{K}_0) = 0$, т. е. $\widetilde{z} \in \mathcal{K}_0$.

В силу непрерывности σ и соотношения (1.19), получим, что $\sigma(\widetilde{z}) = \min\limits_{z\in\mathcal{K}_0} \sigma(z)$. Но точка минимума σ на $\mathcal{K}_0$ единственна, поэтому $\widetilde{z} = z_{0,\min}$. □

Из утверждения 3 вытекает предельное соотношение для определяющего вектора λ_ε.

У т в е р ж д е н и е 4. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla\sigma(z_{\varepsilon,\min}) \to \nabla\sigma(z_{0,\min}) \quad \textit{при } \varepsilon \to +0. \qquad \square$$

§ 2. Система непрямого управления

Здесь мы уточним предельные соотношения для определяющего вектора для задачи терминального управления следующего вида (см. [11]):

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon, & t \in [0, T], \qquad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

с показателем качества

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) := \sigma_1(x_\varepsilon(T)) + \sigma_2(y_\varepsilon(T)) \to \min, \tag{2.2}$$

где

$$\sigma_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \sigma_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

— строго выпуклые и непрерывно дифференцируемые на своих областях определения функции, причем их сопряженные в смысле выпуклого анализа функции σ_1^* и σ_2^* тоже определены и непрерывно дифференцируемы во всех точках $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, а σ_2 удовлетворяет условиям

$$\sigma_2(0) = 0, \quad \nabla\sigma_2(0) = 0.$$

В этом случае функция σ_2 неотрицательна и в силу (1.13), (1.14) и (1.17) справедливы равенства

$$\sigma_0 = \sigma_1, \quad \mathcal{A}_0 = A_{11}, \quad \mathcal{B}_0 = A_{12} \quad \text{и} \quad z_{0,\min} = (x_{0,\min}, 0), \quad x_{0,\min} = \arg\min_{x_0\in\Xi_0(x^0,T)} \sigma_1(x_0).$$

Например, этим условиям удовлетворяют функции $\sigma_1(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ и $\sigma_2(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$.

Утверждение 4 в этом случае принимает следующий вид.

У т в е р ж д е н и е 5. *Уравнения для определяющего вектора* $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ r_\varepsilon \end{pmatrix}$ *имеют вид*

$$-l_\varepsilon = \nabla\sigma_1(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{opt})), \quad -r_\varepsilon = \nabla\sigma_2(y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{opt})).$$

При этом

$$l_\varepsilon \to l_0 := -\nabla\sigma_0(x_{0,\min}), \quad r_\varepsilon \to 0. \qquad \square$$

Отметим, что l_0 есть определяющий вектор в предельной задаче для (2.1), (2.2).

Как показано в [11], для управляемой системы (2.1) справедливы формулы

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t}, & \varepsilon\widetilde{W}(t,\varepsilon) \\ 0 & e^{-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad C_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{W}(t,\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

в которых

$$\widetilde{W}(t,\varepsilon) = (I+\varepsilon A_{11})^{-1}\Big(e^{A_{11}t} - e^{-t/\varepsilon}I\Big)A_{12}, \tag{2.4}$$

I — единичная матрица.

С учетом (2.3) уравнения из утверждения 5 принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \nabla\sigma_1^*(-l_\varepsilon) \\ \nabla\sigma_2^*(-r_\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}T}x^0 + \varepsilon\widetilde{W}(T,\varepsilon)y^0 \\ e^{-T/\varepsilon}y^0 \end{pmatrix} + \\ + \int_0^T \begin{pmatrix} \widetilde{W}(t,\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon} \end{pmatrix} \frac{\widetilde{W}^*(t,\varepsilon)l_\varepsilon + \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}r_\varepsilon}{\|\widetilde{W}^*(t,\varepsilon)l_\varepsilon + \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}r_\varepsilon\|}\,dt. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* l_ε *и* r_ε *— решение системы* (2.5). *Тогда вектор* $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-1}r_\varepsilon$ *— ограничен при* $\varepsilon \to +0$ *и* $\rho_\varepsilon \to -A_{12}^* l_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1.** Выпишем второе уравнение из (2.5), сделав замену переменной в интеграле по формуле $\tau = t/\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \nabla\sigma_2^*(-\varepsilon\rho_\varepsilon) &= \mathbb{O} + \int_0^{T/\varepsilon} e^{-\tau}\frac{\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon}{\|\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon\|}\,d\tau \\ &= \mathbb{O} + \int_0^\delta \cdot\, d\tau + \int_\delta^{T/\varepsilon} \cdot\, d\tau = \mathbb{O} + \int_0^\delta \cdot\, d\tau + \varphi(\varepsilon,\delta), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\varphi(\varepsilon,\delta) := \int_\delta^{T/\varepsilon} e^{-\tau}\frac{\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon}{\|\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon\|}\,d\tau, \quad \|\varphi(\varepsilon,\delta)\| \leqslant Ke^{-\delta}. \tag{2.7}$$

Здесь и далее через $\mathbb{O}$ будем обозначать векторные (или скалярные) величины, являющиеся асимптотическим нулем относительно степенной асимптотической последовательности $\{\varepsilon^{k\sigma}\}$, то есть $\forall\gamma > 0 \quad \mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma)$, $\varepsilon \to +0$.

Из (2.6) с учетом оценки для $\varphi(\varepsilon,\delta)$ (2.7) получим неравенства

$$0 \leqslant \left\| \nabla\sigma_2^*(-\varepsilon\rho_\varepsilon) + \mathbb{O} - \int_0^\delta e^{-\tau}\frac{\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon}{\|\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon\|}\,d\tau \right\| \leqslant Ke^{-\delta}. \tag{2.8}$$

При этом для любого $\delta > 0$ в силу (2.4) справедливо соотношение

$$\widetilde{W}^*(\varepsilon\tau,\varepsilon) \to (1-e^{-\tau})A_{12}^* \quad \text{при } \varepsilon \to +0 \quad \text{равномерно на} \quad [0;\delta]. \tag{2.9}$$

2. Отметим, что в силу утверждения 5 справедливо $l_\varepsilon \to l_0$, $\varepsilon\rho_\varepsilon = r_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Покажем, что вектор-функция ρ_ε ограничена при $\varepsilon \to +0$. Предположим противное, что для некоторой последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to +0$ выполняется $\rho_k := \rho_{\varepsilon_k} \to \infty$. Не ограничивая общности, считаем, что $\rho_k/\|\rho_k\| \to \rho_0$, $\|\rho_0\| = 1$. Сократив дробь в подынтегральной функции в (2.8) на $\|\rho_k\|$ и перейдя к пределу в неравенствах (2.8) сначала при $k \to +\infty$, а потом при $\delta \to +\infty$, с учетом (2.9) получим

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\,d\tau \cdot \rho_0 = \rho_0 \neq 0.$$

Пришли к противоречию, следовательно, наше предположение неверно и ρ_ε ограничена при $\varepsilon \to +0$.

3. Пусть ρ_0 — предельная точка ρ_ε при $\varepsilon \to +0$, то есть $\rho_{\varepsilon_k} \to \rho_0$, для некоторой последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to +0$. Тогда при переходе к пределу в неравенствах (2.8) сначала при $k \to +\infty$, а потом при $\delta \to +\infty$, с учетом (2.9) получим

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \frac{(1-e^{-\tau})A_{12}^* l_0 + e^{-\tau}\rho_0}{\|(1-e^{-\tau})A_{12}^* l_0 + e^{-\tau}\rho_0\|}\, d\tau. \tag{2.10}$$

Если $A_{12}^* l_0 = 0$, то предположение $\rho_0 \neq 0$ противоречиво по аналогии с п. 2, следовательно, в этом случае $\rho_0 = A_{12}^* l_0 = 0$ и утверждение теоремы выполняется тривиально.

Пусть теперь $A_{12}^* l_0 \neq 0$. Из соотношения (2.10) следует, что $\rho_0 = c_0 A_{12}^* l_0$ для некоторой постоянной c_0. Тогда уравнение (2.10) принимает вид

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \frac{(1-e^{-\tau}) + c_0 e^{-\tau}}{|(1-e^{-\tau}) + c_0 e^{-\tau}|}\, d\tau.$$

Пусть $\tau_0 \in (0, +\infty)$ такое, что $1 + (c_0 - 1)e^{-\tau_0} = 0$, то есть

$$e^{-\tau_0} = \frac{1}{1-c_0} \in (0, 1),$$

следовательно, $c_0 < 0$. Далее, имеем

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \frac{1 + (c_0-1)e^{-\tau}}{|1 + (c_0-1)e^{-\tau}|}\, d\tau = -\int_0^{\tau_0} e^{-\tau}\, d\tau + \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{-\tau}\, d\tau = e^{-\tau_0} - 1 + e^{-\tau_0} = 2e^{-\tau_0} - 1.$$

Отсюда следует, что $e^{\tau_0} = 2$, $\tau_0 = \ln 2$, $c_0 = -1$ и $\rho_0 = -A_{12}^* l_0$. Поскольку все предельные точки ρ_ε равны $-A_{12}^* l_0$, то $\rho_\varepsilon \to -A_{12}^* l_0$ при $\varepsilon \to +0$. $\square$

§ 3. Управление системой материальных точек в среде с сопротивлением

Рассмотрим задачу (1.4), (1.5) при следующих условиях: $n = m = r$,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \cdot I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1} \cdot I \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \sigma_2(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2. \tag{3.1}$$

Эта задача является частным случаем задачи (2.1), (2.2).

В силу (3.1) получаем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \varepsilon(1-e^{-t/\varepsilon})I \\ 0 & e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} (1-e^{-t/\varepsilon})I \\ \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix},$$
$$\lambda_\varepsilon := \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ r_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon, r_\varepsilon \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon = \left(1 - e^{-t/\varepsilon}\right) l_\varepsilon + \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} r_\varepsilon, \quad \nabla\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Поскольку $\mathcal{A}_0 = 0$, $\mathcal{B}_0 = I$, то $\mathcal{C}_0(t) \equiv I$, и управляемая система в предельной задаче (1.13) в этом случае имеет вид

$$\dot{x}_0 = u,$$

откуда

$$x_0(T) = x^0 + \int_0^T u(t)\, dt, \quad \text{а} \quad \Xi_0(x^0, T) = B[x_0; T]. \tag{3.3}$$

Далее, в силу формул (1.14) и (1.16) получим, что $\sigma_0(x) = \|x\|^2/2$. Поскольку абсолютный минимум функции σ_0 достигается в нуле, то предположение 4 имеет вид условия $0 \notin B[x_0; T]$, которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\|x^0\| > T.$$

При выполнении этого условия определяющий вектор l_0 удовлетворяет уравнению (3.3):

$$-l_0 = x^0 + \frac{l_0}{\|l_0\|}T. \tag{3.4}$$

Из (3.4) получим, что $\|x^0\| = \|l_0\| + T$ и, следовательно,

$$l_0 = -x^0 \frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|} \neq 0. \tag{3.5}$$

В силу утверждения 5 и теоремы 1

$$l_\varepsilon \to l_0, \qquad \rho_\varepsilon := \varepsilon^{-1} r_\varepsilon \to -l_0 \qquad \text{при } \varepsilon \to +0. \tag{3.6}$$

С учетом соотношений (3.2) запишем систему (1.12) в виде:

$$-\begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \varepsilon\rho_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon y^0 - \varepsilon e^{-T/\varepsilon} y^0 \\ e^{-T/\varepsilon} y^0 \end{pmatrix} + \int_0^T \begin{pmatrix} (1 - e^{-t/\varepsilon})I \\ \varepsilon^{-1} e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix} \frac{(1 - e^{-t/\varepsilon}) l_\varepsilon + e^{-t/\varepsilon}\rho_\varepsilon}{\|(1 - e^{-t/\varepsilon}) l_\varepsilon + e^{-t/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|}\, dt. \tag{3.7}$$

После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = t/\varepsilon$ запишем систему (3.7) в «координатной форме»

$$\begin{aligned} -l_\varepsilon - \varepsilon^2 \rho_\varepsilon &= x^0 + \varepsilon y^0 + \varepsilon \int_0^{T/\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\tau}) l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon}{\|(1 - e^{-\tau}) l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon\|}\, d\tau, \\ -\varepsilon\rho_\varepsilon &= e^{-T/\varepsilon} y^0 + \int_0^{T/\varepsilon} e^{-\tau} \frac{(1 - e^{-\tau}) l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon}{\|(1 - e^{-\tau}) l_\varepsilon + e^{-\tau}\rho_\varepsilon\|}\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Систему уравнений (3.8) назовем *основной*.

§ 4. Построение асимптотики решения задачи (3.1)

Введем новые неизвестные величины: скалярную α_ε и векторную $\widehat{r}_\varepsilon$ так, что

$$\rho_\varepsilon = -\alpha_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon, \qquad \widehat{r}_\varepsilon \perp l_\varepsilon. \tag{4.1}$$

Из (3.6) следует, что

$$\alpha_\varepsilon \to 1, \qquad \|\widehat{r}_\varepsilon\| \to 0, \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \tag{4.2}$$

Отметим, что вследствие (4.1) равенство $\|\widehat{r}_\varepsilon\| = 0$ означает коллинеарность векторов ρ_ε и l_ε, что, в свою очередь, последовательно в силу второго и первого уравнений системы (3.8) влечет коллинеарность им начальных векторов y^0 и x^0, то есть $x^0 \| y^0$, а это условие в многомерном случае — не общего положения. Поэтому далее будем считать выполненным условие

$$x^0 \nparallel y^0,$$

тем самым, $\|\widehat{r}_\varepsilon\| \neq 0$. Отметим, что из (3.5) следует, что $\|l_0\| = \|x^0\| - T$, а в силу (3.6), (4.2) для величин l_ε, α_ε справедливы соотношения

$$l_\varepsilon = l_0 + \Delta l_\varepsilon, \quad \alpha_\varepsilon = 1 + \Delta\alpha_\varepsilon, \quad \Delta l_\varepsilon, \Delta\alpha_\varepsilon = o(1), \quad \varepsilon \to +0. \tag{4.3}$$

Обозначим
$$\beta_\varepsilon := 1 + \alpha_\varepsilon = 2 + \Delta\alpha_\varepsilon. \tag{4.4}$$
Тогда основная система (3.8) примет вид
$$\begin{gathered}
-l_\varepsilon + \varepsilon^2\alpha_\varepsilon l_\varepsilon - \varepsilon^2\widehat{r}_\varepsilon = x^0 + \varepsilon y^0 + \varepsilon\int_0^{T/\varepsilon} \frac{(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau,\\
\varepsilon\alpha_\varepsilon l_\varepsilon - \varepsilon\widehat{r}_\varepsilon = e^{-T/\varepsilon}y^0 + \int_0^{T/\varepsilon} e^{-\tau}\frac{(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

У т в е р ж д е н и е 6. *При* $\varepsilon \to +0$ *выполняется*
$$\widehat{r}_\varepsilon = \mathbb{O}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножив скалярно второе уравнение системы (4.5) на $\widehat{r}_\varepsilon$, получим
$$-\varepsilon\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2 = e^{-T/\varepsilon}\langle y^0, \widehat{r}_\varepsilon\rangle + \int_0^{T/\varepsilon} \frac{e^{-2\tau}\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau.$$
Предположим противное, то есть что для некоторых $K > 0$, $q > 0$ и последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to +0$, выполняется неравенство $\|\widehat{r}_{\varepsilon_k}\| \geqslant K\varepsilon_k^q$ (в дальнейшей части доказательства индекс k писать не будем).

Разделив обе части уравнения на $\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2$, получим
$$-\varepsilon = e^{-T/\varepsilon}\frac{\langle y^0, \widehat{r}_\varepsilon\rangle}{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2} + \int_0^{T/\varepsilon} \frac{e^{-2\tau}}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau. \tag{4.6}$$
Перейдя в (4.6) к пределу при $\varepsilon \to +0$, в силу предположения получим:
$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\tau}\,d\tau}{|1-2e^{-\tau}|\cdot\|l_0\|}\,d\tau > 0.$$
Полученное противоречие означает справедливость соотношения $\widehat{r}_\varepsilon = \mathbb{O}$. □

Рассмотрим интегралы в правых частях уравнений системы (4.5)
$$J_1 := \varepsilon\int_0^{T/\varepsilon} \frac{(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau, \qquad J_2 := \int_0^{T/\varepsilon} e^{-\tau}\frac{(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon}{\|(1-\beta_\varepsilon e^{-\tau})l_\varepsilon + e^{-\tau}\widehat{r}_\varepsilon\|}\,d\tau$$
и сделаем в них замену переменной $\xi := e^{-\tau}$, при этом $d\xi = -e^{-\tau}d\tau = -\xi d\tau$, $d\tau = -d\xi/\xi$. Тогда
$$J_1 = \varepsilon\int_{e^{-T/\varepsilon}}^1 \frac{\xi(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon) + l_\varepsilon}{\xi\,\|\xi(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon) + l_\varepsilon\|}\,d\xi = \varepsilon(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon)\int_{e^{-T/\varepsilon}}^1 \frac{d\xi}{\|\xi(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon) + l_\varepsilon\|}\,d\xi +$$
$$+\,\varepsilon l_\varepsilon\int_1^{e^{T/\varepsilon}} \frac{d\eta}{\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon + l_\varepsilon\eta\|}, \qquad J_2 = \int_{e^{-T/\varepsilon}}^1 \frac{\xi(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon) + l_\varepsilon}{\|\xi(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon) + l_\varepsilon\|}\,d\xi.$$
Отметим что для ненулевых векторов r и l в силу известных формул интегрирования справедливы следующие соотношения
$$\begin{gathered}
\int \frac{d\xi}{\|\xi r + l\|} = \frac{1}{\|r\|}\ln\frac{\big|\xi\|r\|^2 + \langle r, l\rangle + \|r\|\cdot\|\xi r + l\|\big|}{\|r\|} + C =\\
= \frac{1}{\|r\|}\ln\frac{\langle r, \xi r + l\rangle + \|r\|\cdot\|\xi r + l\|}{\|r\|} + C =: \mathcal{J}(r, l; \xi) + C
\end{gathered} \tag{4.7}$$

(поскольку в силу неравенства Коши–Буняковского выражение под модулем в числителе неотрицательно, то модуль можно снять) и

$$\int \frac{\xi d\xi}{\|\xi r+l\|}=\frac{\|\xi r+l\|}{\|r\|^2}-\frac{\langle r,l\rangle}{\|r\|^2}\mathcal{J}(r,l;\xi)+C. \tag{4.8}$$

Тогда с учетом формул (4.1), (4.7), (4.8) получаем

$$J_1=\varepsilon(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon)(\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;1)-\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;e^{-T/\varepsilon}))+$$
$$+\varepsilon l_\varepsilon(\mathcal{J}(l_\varepsilon,-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon;e^{T/\varepsilon})-\mathcal{J}(l_\varepsilon,-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon;1)),$$

$$J_2=\frac{-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon}{\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}\left(\|(1-\beta_\varepsilon)l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|-\|e^{-T/\varepsilon}(\widehat{r}_\varepsilon-\beta_\varepsilon l_\varepsilon)+l_\varepsilon\|\right)+$$
$$+\left(l_\varepsilon+(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon)\frac{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2}{\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}\right)(\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;1)-\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;e^{-T/\varepsilon})).$$

Заметим, что в силу утверждения 6 выполняется

$$l_\varepsilon+(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon)\frac{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2}{\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}=\frac{l_\varepsilon\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\widehat{r}_\varepsilon\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|}{\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}=\mathbb{O}.$$

У т в е р ж д е н и е 7. *При* $\varepsilon\to+0$ *справедливо*

$$\|\widehat{r}_\varepsilon\|\ln\|\widehat{r}_\varepsilon\|=\mathbb{O}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\gamma>0$ отношение

$$\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|\ln\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}=\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}\ln\left(\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}\varepsilon^\gamma\right)=\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}\left(\ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}+\gamma\ln\varepsilon\right)=\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}\ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^\gamma}+\gamma\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|}{\varepsilon^{\gamma+1}}\varepsilon\ln\varepsilon$$

стремится к 0 при $\varepsilon\to+0$, поскольку вследствие утверждения 6 выполняется $\|\widehat{r}_\varepsilon\|/\varepsilon^\gamma\to0$. $\square$

Рассмотрим сначала разность

$$\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;1)-\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;e^{-T/\varepsilon})=$$
$$=\ln\frac{\beta_\varepsilon(\beta_\varepsilon-1)\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|\cdot\|(1-\beta_\varepsilon)l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|}{-\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|\cdot\|l_\varepsilon+e^{-T/\varepsilon}(\widehat{r}_\varepsilon-\beta_\varepsilon l_\varepsilon)\|}.$$

Отметим, что в силу формулы Тейлора для $(1+\xi)^p$ при малых ξ выполняется

$$\frac{1}{\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|}=\frac{1}{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|}+\mathbb{O};$$

$$\beta_\varepsilon(\beta_\varepsilon-1)\|l_\varepsilon\|^2+\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|\cdot\|(1-\beta_\varepsilon)l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|=2\beta_\varepsilon(\beta_\varepsilon-1)\|l_\varepsilon\|^2+\mathbb{O};$$
$$-\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\|-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon\|\cdot\|l_\varepsilon+e^{-T/\varepsilon}(\widehat{r}_\varepsilon-\beta_\varepsilon l_\varepsilon)\|=$$
$$=-\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2+e^{-T/\varepsilon}\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2+\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|^2\left(1+\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|^2}\right)\left(1-\beta_\varepsilon e^{-T/\varepsilon}\right)+$$
$$+O\left(\|\widehat{r}_\varepsilon\|^4+e^{-2T/\varepsilon}+e^{-2T/\varepsilon}\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2)\right)=\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon}+\mathbb{O}.$$

Тем самым, в силу формулы Тейлора для $\ln(1+\xi)$ при малых ξ справедливо

$$\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;1)-\mathcal{J}(-\beta_\varepsilon l_\varepsilon+\widehat{r}_\varepsilon,l_\varepsilon;e^{-T/\varepsilon})=\frac{1}{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|}\left(\ln(2\beta_\varepsilon(\beta_\varepsilon-1)\|l_\varepsilon\|^2)-\ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon}\right)+\mathbb{O}.$$

Аналогично рассматриваются величины

$$\mathcal{J}(l_\varepsilon, -\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon; e^{T/\varepsilon}) - \mathcal{J}(l_\varepsilon, -\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon; 1) =$$

$$= \frac{1}{\|l_\varepsilon\|}\left(\frac{T}{\varepsilon} + \ln\frac{\|l_\varepsilon\|^2 - \beta_\varepsilon e^{-T/\varepsilon}\|l_\varepsilon\|^2 + \|l_\varepsilon\|\cdot\|l_\varepsilon + e^{-T/\varepsilon}(\widehat{r}_\varepsilon - \beta_\varepsilon l_\varepsilon)\|}{(1-\beta_\varepsilon)\|l_\varepsilon\|^2 + \|(1-\beta_\varepsilon)l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon\|\cdot\|l_\varepsilon\|}\right) =$$

$$= \frac{1}{\|l_\varepsilon\|}\left(\frac{T}{\varepsilon} + \ln(2\|l_\varepsilon\|^2) - \ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2(\beta_\varepsilon - 1)}\right) + \mathbb{O},$$

$$\|(1-\beta_\varepsilon)l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon\| - \|e^{-T/\varepsilon}(\widehat{r}_\varepsilon - \beta_\varepsilon l_\varepsilon) + l_\varepsilon\| = |1-\beta_\varepsilon|\cdot\|l_\varepsilon\| - \|l_\varepsilon\| + \mathbb{O} = \Delta\alpha_\varepsilon\|l_\varepsilon\| + \mathbb{O}.$$

Тогда система уравнений (4.5) примет вид

$$-l_\varepsilon + \varepsilon^2\alpha_\varepsilon l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon y^0 + \varepsilon\frac{-\beta_\varepsilon l_\varepsilon + \widehat{r}_\varepsilon}{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|}\left(\ln(2\beta_\varepsilon(\beta_\varepsilon - 1)\|l_\varepsilon\|^2) - \ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon}\right) +$$

$$+ \varepsilon\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}\left(\frac{T}{\varepsilon} + \ln(2\|l_\varepsilon\|^2) - \ln\frac{\|\widehat{r}_\varepsilon\|^2}{2(\beta_\varepsilon - 1)}\right) + \mathbb{O},$$

$$\varepsilon\alpha_\varepsilon l_\varepsilon = -\frac{\Delta\alpha_\varepsilon l_\varepsilon}{\beta_\varepsilon\|l_\varepsilon\|} + \mathbb{O}.$$

С учетом утверждения 7 и соотношений (4.3), (4.4), при приведении подобных она преобразуется к виду

$$\begin{gathered} -l_0 - \Delta l_\varepsilon + \varepsilon^2(1+\Delta\alpha_\varepsilon)(l_0 + \Delta l_\varepsilon) = x^0 + \varepsilon y^0 - 2\varepsilon\frac{l_0 + \Delta l_\varepsilon}{\|l_0 + \Delta l_\varepsilon\|}\ln(2 + \Delta\alpha_\varepsilon) + \\ + \frac{l_0 + \Delta l_\varepsilon}{\|l_0 + \Delta l_\varepsilon\|}T + \mathbb{O}, \\ \varepsilon(1+\Delta\alpha_\varepsilon)(l_0 + \Delta l_\varepsilon) = -\frac{\Delta\alpha_\varepsilon(l_0 + \Delta l_\varepsilon)}{(2+\Delta\alpha_\varepsilon)\|l_0 + \Delta l_\varepsilon\|} + \mathbb{O}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Отметим, что все явно выписанные величины, входящие в систему (4.9), при малых ε, Δl_ε и $\Delta\alpha_\varepsilon$ раскладываются в степенные ряды по ε, $\Delta\alpha_\varepsilon$ и компонентам вектора Δl_ε. В частности, из первого уравнения системы (4.9) в главном получаем равенство (3.4).

Выпишем систему первого приближения для (4.9):

$$-\Delta l_1 = \varepsilon y^0 - 2\varepsilon\ln 2\frac{l_0}{\|l_0\|} + \frac{\Delta l_1}{\|l_0\|}T - \frac{\langle l_0, \Delta l_1\rangle l_0}{\|l_0\|^3}T, \qquad \varepsilon l_0 = -\frac{\Delta\alpha_1 l_0}{2\|l_0\|}. \tag{4.10}$$

Из второго уравнения системы (4.10) непосредственно следует, что

$$\Delta\alpha_1 = -2\varepsilon\|l_0\|. \tag{4.11}$$

Далее, умножив скалярно первое уравнение из (4.10) на вектор l_0, получим

$$\langle\Delta l_1, l_0\rangle = 2\varepsilon\ln 2\|l_0\| - \varepsilon\langle y^0, l_0\rangle. \tag{4.12}$$

Подставив выражение (4.12) для $\langle\Delta l_1, l_0\rangle$ в первое уравнение системы (4.10), найдем

$$\Delta l_1 = -\varepsilon\left(1 + \frac{T}{\|l_0\|}\right)^{-1}\left(y^0 - 2\ln 2\frac{l_0}{\|l_0\|} - 2\ln 2\frac{l_0}{\|l_0\|^2}T + \frac{\langle y^0, l_0\rangle l_0}{\|l_0\|^3}T\right). \tag{4.13}$$

Таким образом, система первого приближения однозначно разрешима, поэтому к системе (4.9) применима [18, теорема 1].

Тем самым, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Определяющий вектор в задаче* (1.4), (1.5), (3.1) *имеет степенное асимптотическое разложение. При этом*

$$l_\varepsilon = l_0 + \Delta l_1 + O\left(\varepsilon^2\right), \qquad r_\varepsilon = -\varepsilon l_0 - \varepsilon(\Delta\alpha_1 l_0 + \Delta l_1) + O\left(\varepsilon^3\right),$$

где Δl_1, $\Delta\alpha_1$ *определяются по формулам* (4.13), (4.11) *соответственно, а остальные коэффициенты разложения находятся из системы уравнений* (4.9) *методом неопределенных коэффициентов.*

Заключение

В задаче управления системой материальных точек в среде с сопротивлением, рассмотренной в §§ 3, 4 настоящей работы, получена асимптотика определяющего вектора по степеням малого параметра. Таким образом, в данном частном случае исследуемой системы асимптотика имеет степенной характер, так же как и в задаче, изученной в [11], с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных, для системы общего вида (2.1). Но показатель качества (2.2) усложняет задачу за счет появления еще одного неизвестного малого вектора. Поэтому ответ на вопрос, будет ли асимптотика решения регулярной и в задаче оптимального управления системой общего вида (2.1) с терминальным показателем качества, зависящим от медленных и быстрых переменных, требует дальнейшего технически сложного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51. http://mi.mathnet.ru/at1125
5. Данилин А. Р., Ильин А. М. Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157. http://mi.mathnet.ru/dan4007
6. Данилин А. Р., Ильин А. М. О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926. http://mi.mathnet.ru/fpm332
7. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Московского ун-та, 1989.
8. Курина Г. А., Нгуен Т. Х. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 4. С. 628–652. http://mi.mathnet.ru/zvmmf9683
9. Kurina G. A., Hoai N. T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. Issue 1. 020073. https://doi.org/10.1063/1.5049067
10. Nguyen T. H. Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint // Journal of Optimization Theory and Applications. 2021. Vol. 190. Issue 3. P. 931–950. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01916-w
11. Данилин А. Р. Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в регулярном случае // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1473–1480. http://mi.mathnet.ru/de11588

12. Данилин А. Р., Парышева Ю. В. Об асимптотике оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 563–573. https://elibrary.ru/item.asp?id=16352815
13. Данилин А. Р. Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 12. С. 2166–2177. http://mi.mathnet.ru/zvmmf364
14. Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 2. С. 280–289. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-280-289
15. Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. Вып. 2. С. 83–98. http://mi.mathnet.ru/ufa473
16. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
17. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
18. Данилин А. Р., Коврижных О. О. Асимптотика решения одной задачи быстродействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 1. С. 58–73. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

Поступила в редакцию 30.10.2022

Принята к публикации 10.01.2023

Данилин Алексей Руфимович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий отделом уравнений математической физики, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8711-2026
E-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел прикладных задач, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8480-6658
E-mail: koo@imm.uran.ru

Цитирование: А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления линейной автономной системой с терминальным выпуклым показателем качества, зависящим от медленных и быстрых переменных // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 42–56.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh

Asymptotic expansion of the solution to an optimal control problem for a linear autonomous system with a terminal convex quality index depending on slow and fast variables

Keywords: optimal control, singularly perturbed problem, asymptotic expansion, small parameter.

MSC2020: 93C15, 93C70, 49N05

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-03

In this paper, we investigate a problem of optimal control over a finite time interval for a linear autonomous system with slow and fast variables in the class of piecewise continuous controls with smooth geometric constraints in the form of a ball. We consider a terminal convex quality index that depends on slow and fast variables. We substantiate a limit relation for the vector determining the optimal control as the small parameter tends to zero. We refine the limit relation for the case of an indirect control problem with a terminal quality index, which is the sum of values of two strictly convex continuously differentiable functions, the first of which depends only on slow variables, and the second one depends only on fast variables and has a minimum at zero. In doing so, we show that the first component of the determining vector converges to the determining vector of the limit problem while the second component tends to zero. In the problem of indirect control of a system of material points in a medium with resistance, we obtain the complete asymptotics of the determining vector in powers of a small parameter.

REFERENCES

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes*, New York: John Wiley and Sons, 1962.
2. Krasovskii N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* (Theory of motion control. Linear systems), Moscow: Nauka, 1968.
3. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*, New York: Wiley, 1967.
4. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
5. Danilin A. R., Il'in A. M. Asymptotic behavior of the solution of the time-optimality problem for a linear system under perturbation of initial data, *Dokl. Akad. Nauk*, 1996, vol. 350, no. 2, pp. 155–157 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan4007
6. Danilin A. R., Il'in A. M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, issue 3, pp. 905–926 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/fpm332
7. Galeev E. M., Tikhomirov V. M. *Kratkii kurs teorii ekstremal'nykh zadach* (A short course in the theory of extremal problems), Moscow: Moscow State Universitety, 1989.
8. Kurina G. A., Nguyen T. H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. https://doi.org/10.1134/S0965542512040100
9. Kurina G. A., Hoai N. T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case, *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, issue 1, 020073. https://doi.org/10.1063/1.5049067
10. Nguyen T. H. Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, vol. 190, issue 3, pp. 931–950. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01916-w
11. Danilin A. R. Asymptotics of the optimal value of the performance functional for a rapidly stabilizing indirect control in the regular case, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 11, pp. 1545–1552. https://doi.org/10.1134/S0012266106110048
12. Danilin A. R., Parysheva Yu. V. On the asymptotics of the optimal value of the performance functional in a linear optimal control problem, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 560–570. https://doi.org/10.1134/S0012266111040100

13. Danilin A. R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. https://doi.org/10.1134/S0965542506120062
14. Shaburov A. A. Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow variables only, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 280–289 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-280-289
15. Danilin A. R., Shaburov A. A. Asymptotic expansion of solution to singularly perturbed optimal control problem with convex integral quality functional with terminal part depending on slow and fast variables, *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 82–96. https://doi.org/10.13108/2019-11-2-82
16. Dontchev A. L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Berlin: Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/BFb0043612
17. Blagodatskikh V. I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* (Introduction to optimal control), Moscow: Vysshaya Shkola, 2001.
18. Danilin A. R., Kovrizhnykh O. O. Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set in the critical case, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 58–73 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

Received 30.10.2022

Accepted 10.01.2023

Aleksei Rufimovich Danilin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Equations of Mathematical Physics, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8711-2026
E-mail: dar@imm.uran.ru

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Applied Problems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Associate Professor, Ural Federal University, ul. Turgeneva, 4, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8480-6658
E-mail: koo@imm.uran.ru

Citation: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotic expansion of the solution to an optimal control problem for a linear autonomous system with a terminal convex quality index depending on slow and fast variables, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 42–56.