Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2023. Том 61. С. 57–75

УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТИПА БЕЗИКОВИЧА СЕЧЕНИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $\mathcal{B}$ — банахово пространство и $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p \geqslant 1$, — пространство Марцинкевича с полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p}$. Через $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ обозначается множество функций $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, для которых выполняются следующие три условия: (1) $\|\mathcal{F}(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot+\tau)\|_{\mathcal{M}^p} \to 0$ при $\tau \to 0$, (2) для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^p})$-почти периодов функции $\mathcal{F}$ относительно плотно, (3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $X(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $\|\chi_{X(\varepsilon)}\|_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} < \varepsilon$ и для множества $\{\mathcal{F}(t) : t \in \mathbb{R} \setminus X(\varepsilon)\}$ существует конечная ε-сеть. Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ — множество функций $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, удовлетворяющих условию (3) и условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех множеств $X \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\|\chi_X\|_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} < \delta$, выполняется оценка $\|\chi_X \mathcal{F}\|_{\mathcal{M}^p} < \varepsilon$. Аналогично определяются множества $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U)$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)$ для полного метрического пространства (U,ρ). Через $\mathrm{cl}\,U$ обозначается метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства (U,ρ) с метрикой Хаусдорфа. В работе, в частности, доказано, что для любых $F \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathrm{cl}\,U)$, $p \geqslant 1$, и $u \in U$, $\varepsilon > 0$ при условии, что $\rho(u, F(\cdot)) \in \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, существует функция $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U) \cap \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)$ такая, что $\mathcal{F}(t) \in F(t)$ и $\rho(u,\mathcal{F}(t)) < \varepsilon + \rho(u, F(t))$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: почти периодические функции типа Безиковича, сечения, многозначные отображения.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-04

Введение

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $(\mathrm{cl}\,U, \mathrm{dist})$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства U с метрикой Хаусдорфа dist. При исследовании почти периодических (п. п.) дифференциальных включений возникает вопрос о существовании для многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto G(t) \in \mathrm{cl}\,U$, принадлежащих разным классам п. п. функций, сечений $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{F}(t) \in F(t)$ из таких же классов п. п. функций [1,2]. В [3] на основе результатов А. Фришковского [4] доказано существование п. п. по Степанову сечений многозначных п. п. по Степанову отображений. В [5] приведено другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п. п. по Степанову функций простыми (принимающими не более чем счетное множество значений) п. п. по Степанову функциями. Существование п. п. по Вейлю сечений доказано в [6], сечений из пространства обобщенных п. п. по Вейлю функций (см. [7]) — в [8], п. п. по Безиковичу сечений (которые аппроксимируются в псевдометрике Безиковича п. п. по Степанову функциями) — в [9], сечений из пространств рекуррентных, почти рекуррентных и почти автоморфных типа Степанова функций — в [10–13]. В [13] приведено условие существования гомоморфизмов инвариантных компактных множеств динамической системы сдвигов, для которой метрическое пространство многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}\,U$ с метрикой Бебутова–Степанова является фазовым пространством, в динамическую систему сдвигов, для которой фазовым пространством является метрическое пространство функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{F}(t) \in U$ (также) с метрикой Бебутова–Степанова, ставящих в соответствие многозначным отображениям их сечения. В последние годы возрос интерес к исследованию разных классов обобщенных п. п. решений интегро-дифференциальных уравнений и включений. Почти периодические дифференциальные уравнения рассматривались в [14, 15]. Обзор полученных в последнее время результатов по п. п. функциям и их приложениям приведен в [16, 17] (см. также более ранние монографии [18, 19]). В [20–27] изучаются новые классы п. п. функций, которые используются при исследовании решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений и включений. В [28–30], в частности, изучаются п. п. типа Безиковича функции (в том числе функции, определенные в $\mathbb{R}^n$). Разные классы п. п. типа Безиковича функций и соотношения между ними рассматривались в [31]. В настоящей работе доказано существование сечений $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{F}(t) \in U$ многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \operatorname{cl} U$ из одного класса п. п. типа Безиковича функций (содержащего пространство п. п. по Безиковичу функций). Основным утверждением статьи является теорема 2, которая сформулирована и доказана в § 1. В этом же параграфе приведены определения и некоторые утверждения, необходимые для доказательства теоремы 2. В § 2 собраны вспомогательные результаты. В § 3 доказана теорема 3, играющая ключевую роль при доказательстве теоремы 2.

§ 1. Обозначения, определения и основные утверждения

Пусть mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Определенная при почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\mathcal{F}\colon \mathbb{R} \to U$ называется *простой*, если существует конечное или счетное семейство попарно непересекающихся и измеримых по Лебегу множеств $X_j \subseteq \mathbb{R}$ и элементы $u_j \in U$ такие, что $\operatorname{mes} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j X_j = 0$ и $\mathcal{F}(t) = u_j$ при всех $t \in X_j$. Такие функции будут обозначаться через $\sum\limits_j u_j\, \chi_{X_j}(\cdot)$ (где $\chi_X(\cdot)$ — характеристическая функция множества $X \subseteq \mathbb{R}$). Определенная при почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\mathcal{F}\colon \mathbb{R} \to U$ *сильно измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует простая функция $\sum\limits_j u_j\, \chi_{X_j}(\cdot)$ такая, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \ \rho\Big(\mathcal{F}(t), \sum_j u_j\, \chi_{X_j}(t)\Big) < \varepsilon.$$

Пусть $\mathcal{M}(\mathbb{R}; U)$ — множество сильно измеримых функций $\mathcal{F}\colon \mathbb{R} \to U$. Для конечного или счетного семейства попарно непересекающихся и измеримых (по Лебегу) множеств $X_j \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\operatorname{mes} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j X_j = 0$, и функций $\mathcal{F}_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}; U)$ через $\sum\limits_j \mathcal{F}_j(\cdot)\chi_{X_j}(\cdot)$ будет обозначаться функция, совпадающая с функциями $\mathcal{F}_j(t)$ при $t \in X_j$. Обозначения $\sum\limits_j u_j\, \chi_{X_j}(\cdot)$ и $\sum\limits_j \mathcal{F}_j(\cdot)\chi_{X_j}(\cdot)$ для функций со значениями в метрическом пространстве U формально некорректны, но никаких линейных операций над такими функциями производиться не будет.

Для каждой функции $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}; U)$ можно выбрать измеримое (по Лебегу) множество $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}$, для которого $\operatorname{mes} \mathcal{N}(\mathcal{F}) = 0$, функция $\mathcal{F}(t)$ определена при всех $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})$ и $\{\mathcal{F}(t)\colon t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})\}$ — сепарабельное множество в (U, ρ).

Через $(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist})$ обозначается полное метрическое пространство непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства (U, ρ) с метрикой Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(F_1, F_2) = \max\left\{\sup_{u \in F_1} \rho(u, F_2), \sup_{u \in F_2} \rho(u, F_1)\right\}, \quad F_1,\ F_2 \in \operatorname{cl} U,$$

где $\rho(u, F) = \inf\limits_{y \in F} \rho(u, y)$ — расстояние от элемента $u \in U$ до множества $F \in \operatorname{cl} U$.

Пусть $u_0 \in U$ и $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}; U)$, $p \geqslant 1$, — пространство Марцинкевича, то есть множество таких функций $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}; U)$, для которых функции $\rho^p(\mathcal{F}(\cdot), u_0)$ локально интегрируемы и

$$\varlimsup_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \rho^p(\mathcal{F}(t), u_0)\, dt < +\infty.$$

Множество $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$ не зависит от выбора элемента u_0 (при этом функции, рассматриваемые как элементы пространства $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$, отождествляются, если они совпадают при почти всех $t\in\mathbb{R}$). На множестве $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$ вводится псевдометрика

$$D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=\varlimsup_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\rho^p(\mathcal{F}_1(t),\mathcal{F}_2(t))\,dt\right)^{1/p},\quad \mathcal{F}_1,\,\mathcal{F}_2\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U),$$

и можно определить отношение эквивалентности: $\mathcal{F}_1\sim\mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда $D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=0$. Фактор-пространство классов эквивалентности является полным метрическим пространством [32].

Для всех $\mathcal{F}_1,\,\mathcal{F}_2\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$ и $\tau\in\mathbb{R}$

$$D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}_1(\cdot+\tau),\mathcal{F}_2(\cdot+\tau)).$$

Полное метрическое пространство (U,ρ) можно изометрически вложить в некоторое вещественное банахово пространство $(\mathcal{B},\|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ (и вложение выбрать так, чтобы любому заданному элементу $u_0\in U$ соответствовал нулевой элемент банахова пространства $\mathcal{B}$) [33, гл. 1]. Поэтому утверждения о функциях $\mathcal{F}\colon\mathbb{R}\to U$ можно доказывать, считая, что эти функции принимают значения в вещественном банаховом пространстве $\mathcal{B}$ ($\rho(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{\mathcal{B}}\,,\ u_1,\ u_2\in\mathcal{B}$). И в дальнейшем будут также рассматриваться функции $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p\geqslant1$.

Для функций $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ определяется полунорма

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{M}^p}=\varlimsup_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Множество $X\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если найдется число $l>0$ такое, что $[t,t+l]\cap X\neq\varnothing$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Для числа $\varepsilon>0$ и функции $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$ обозначим $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\varepsilon)\doteq\{\tau\in\mathbb{R}\colon D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}(\cdot),\mathcal{F}(\cdot+\tau))<\varepsilon\}$. Числа $\tau\in\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\varepsilon)$ называются $(\varepsilon,\mathcal{M}^p)$*-почти периодами* функции $\mathcal{F}$.

Функция $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$, $p\geqslant1$, принадлежит *пространству* $B^p(\mathbb{R};U)$ *п. п. по Безиковичу функций*, если для любого $\varepsilon>0$ существует п. п. по Степанову функция $\mathcal{F}_1\colon\mathbb{R}\to U$ степени p (такие функции принадлежат $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$), для которой $D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F},\mathcal{F}_1)<\varepsilon$. Функция $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ принадлежит пространству $B^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon>0$ существует п. п. по Бору функция $\mathcal{F}_1\colon\mathbb{R}\to\mathcal{B}$, для которой $D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F},\mathcal{F}_1)<\varepsilon$.

Для функции $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p\geqslant1$, и любого числа $\lambda\in\mathbb{R}$ существует конечный предел

$$a(\mathcal{F};\lambda)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-i\lambda t}\,\mathcal{F}(t)\,dt$$

(так как банахово пространство $\mathcal{B}$ предполагается вещественным, то рассматриваются отдельно вещественная и мнимая части функции $e^{-i\lambda t}$). При этом $a(\mathcal{F};\lambda)\neq0$ не более, чем для счетного множества чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, которые называются *показателями Фурье* функции $\mathcal{F}$. Пусть $\operatorname{Mod}\mathcal{F}$ — *модуль частот* функции $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, то есть наименьший модуль (группа по сложению), содержащий все показатели Фурье функции $\mathcal{F}$.

Последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, называется $\mathcal{F}$*-возвращающей* для функции $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};U)$, если $D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}(\cdot),\mathcal{F}(\cdot+\tau_j))\to0$ при $j\to+\infty$. Для функций $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};U)$ также можно определить модуль частот $\operatorname{Mod}\mathcal{F}$, состоящий из тех и только тех чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\tau_j}\to1$ при $j\to+\infty$ для любой $\mathcal{F}$-возвращающей последовательности $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ [9,34]. Так определенный модуль частот $\operatorname{Mod}\mathcal{F}$ совпадает для функций $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ с определенным выше модулем частот с помощью показателей Фурье. При этом последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, является $\mathcal{F}$-возвращающей для функции $\mathcal{F}\in B^p(\mathbb{R};U)$ тогда и только тогда, когда $e^{i\lambda\tau_j}\to1$ при $j\to+\infty$ для любого $\lambda\in\operatorname{Mod}\mathcal{F}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* (U,ρ) — *полное метрическое пространство,* $F(\cdot)\in B^p(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$ *и* $\mathcal{G}(\cdot)\in B^p(\mathbb{R};U)$, $p\geqslant 1$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует функция* $\mathcal{F}(\cdot)\in B^p(\mathbb{R};U)$ *такая, что* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}\subseteq\operatorname{Mod}F+\operatorname{Mod}\mathcal{G}$, $\mathcal{F}(t)\in F(t)$ *и* $\rho(\mathcal{F}(t),\mathcal{G}(t))<\varepsilon+\rho(\mathcal{G}(t),F(t))$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$.

Теорема 1 доказана в [9]. В настоящей работе приведено доказательство аналогичного утверждения для более общего класса обобщенных п. п. типа Безиковича функций.

Пусть $\mathfrak{G}$ — множество отображений $(0,+\infty)\ni\varepsilon\mapsto\Gamma(\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}$ таких, что

(1) $0\in\Gamma(\varepsilon)$, $\Gamma(\varepsilon)$ — относительно плотные множества при всех $\varepsilon>0$,

(2) $\Gamma(\varepsilon_1)\subseteq\Gamma(\varepsilon_2)$ при $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$.

На множестве $\mathfrak{G}$ определяется отношение частичного порядка: $\Gamma_1\preccurlyeq\Gamma_2$, если для любого $\varepsilon_1>0$ найдется число $\varepsilon_2>0$ такое, что $\Gamma_1(\varepsilon_1)\supseteq\Gamma_2(\varepsilon_2)$. Если $\Gamma_1\preccurlyeq\Gamma_2$ и $\Gamma_2\preccurlyeq\Gamma_1$, то отображения Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*.

Через $\mathfrak{B}^p(\mathbb{R};U)$ обозначается множество функций $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$, для которых множества $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\varepsilon)$ $(\varepsilon,\mathcal{M}^p)$-почти периодов относительно плотны при всех $\varepsilon>0$ [35, 36]; $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot)\in\mathfrak{G}$. При $1\leqslant p\leqslant p_1$ справедливо вложение $\mathfrak{B}^{p_1}(\mathbb{R};U)\subseteq\mathfrak{B}^p(\mathbb{R};U)$, при этом $\mathbb{T}_{p_1}(\mathcal{F};\varepsilon)\subseteq\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\varepsilon)$ для всех $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^{p_1}(\mathbb{R};U)$ и $\varepsilon>0$ (и, следовательно, $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_{p_1}(\mathcal{F};\cdot)$).

Для функции $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)$ обозначим

$$\omega_\tau(\mathcal{F})=\sup_{\tau'\in[0,\tau]}D_p^{(\mathcal{M})}(\mathcal{F}(\cdot),\mathcal{F}(\cdot+\tau')),\quad \tau\geqslant 0.$$

Пусть $\widetilde{\Omega}$ — множество неубывающих функций $[0,+\infty)\ni\tau\mapsto\widetilde{\omega}(\tau)\in[0,+\infty)$, для которых $\widetilde{\omega}(\tau)>0$ при $\tau>0$ и $\widetilde{\omega}(\tau)\to 0$ при $\tau\to+0$ (тогда $\widetilde{\omega}(0)=0$). Обозначим

$$\mathcal{M}^p_c(\mathbb{R};U)=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)\colon\omega_\tau(\mathcal{F})\to 0 \text{ при } \tau\to+0\},$$

$$\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};U)=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)\colon\omega_\tau(\mathcal{F})\leqslant\widetilde{\omega}(\tau)\text{ при всех }\tau\geqslant 0\},\quad\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}.$$

Для измеримых множеств $X\subseteq\mathbb{R}$ будет использоваться обозначение

$$\varkappa(X)=\varlimsup_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\operatorname{mes}X\cap[-T,T].$$

Если X_1, $X_2\subseteq\mathbb{R}$ — измеримые множества, то $\varkappa(X_1\cup X_2)\leqslant\varkappa(X_1)+\varkappa(X_2)$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ — множество функций $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ таких, что для любого $\varepsilon\in(0,1]$ найдется измеримое множество $X(\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}$ (можно считать, что $\mathcal{N}(\mathcal{F})\subseteq X(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$), для которого:

(1) $\varkappa(X(\varepsilon))<\varepsilon$,

(2) функция $\mathcal{F}(t)$ определена при всех $t\in\mathbb{R}\backslash X(\varepsilon)$,

(3) для множества $\{\mathcal{F}(t)\colon t\in\mathbb{R}\backslash X(\varepsilon)\}$ существует конечная ε-сеть (которую можно выбрать из элементов этого множества).

Если, более того, $\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\|\chi_{X(\varepsilon)}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{M}^p}\to 0$ при $\varepsilon\to+0$, то такие функции образуют множество $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})\doteq\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{R};\mathcal{B})$.

Для функции $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ обозначим

$$\mathcal{A}(\mathcal{F};b)\doteq\{t\in\mathbb{R}\colon\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}\geqslant b\},\quad b>0.$$

Следующие три условия эквивалентны:

(1) $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$,

(2) $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для любого измеримого множества $X\subseteq\mathbb{R}$, для которого $\varkappa(X)<\delta$, выполняется неравенство $\|\chi_X(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{M}^p}<\varepsilon$,

(3) $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\|\chi_{\mathcal{A}(\mathcal{F};b)}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{M}^p} \to 0$ при $b \to +\infty$.

Если $1 \leqslant p < p_1$, $b > 0$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^{p_1}(\mathbb{R};\mathcal{B})$, то

$$\|\chi_{\mathcal{A}(\mathcal{F};b)}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{M}^p} \leqslant b^{1-(p_1/p)} \|\mathcal{F}\|^{p_1/p}_{\mathcal{M}^{p_1}},$$

поэтому $\widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};\mathcal{B}) \cap \mathcal{M}^{p_1}(\mathbb{R};\mathcal{B}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$.

Пространства $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{R};U)$, $\widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};U)$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)$ состоят из функций, которые при изометрическом вложении метрического пространства (U,ρ) в некоторое вещественное банахово пространство $(\mathcal{B},\|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ становятся функциями из пространств $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $\widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ соответственно. (Эти пространства не зависят от выбора банахова пространства $\mathcal{B}$ и изометрического вложения.)

Обозначим

$$\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};U) \doteq \mathfrak{B}^p(\mathbb{R};U) \cap \mathcal{M}^p_c(\mathbb{R};U), \quad \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U) \doteq \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};U) \cap \widetilde{\mathcal{M}}^p(\mathbb{R};U),$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U) = \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};U) \cap \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U).$$

Если $1 \leqslant p < p_1$ и $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p_1}_c(\mathbb{R};U)$, то $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U)$. Следующий пример показывает, что (в случае $U = (\mathbb{R},|\cdot|)$) существуют функции $f \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, не принадлежащие $\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Пример 1. Обозначим $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[n^4, n^4+n^2)$, $Y = \{t \in \mathbb{R} \colon |t| \in X\}$. Определим функцию $f \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Если $n^4 \leqslant |t| < n^4+n^2$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то положим $f(t) = n^{1/p}$. Если $t \in \mathbb{R}\setminus Y$, то $f(t) = 0$. Так как $\varkappa(Y) = 0$ и при всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\|f(\cdot)-f(\cdot+\tau)\|_{\mathcal{M}^p} = 0$, то $f \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$. С другой стороны, $\|\chi_Y f\|_{\mathcal{M}^p} = \|f\|_{\mathcal{M}^p} = 2^{-2/p}$, поэтому $f \notin \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Для функций $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}^p(\mathbb{R};U)$ и чисел $a > 0$ положим

$$\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\varepsilon) \doteq \mathbb{T}_p(\mathcal{F};\varepsilon) \cap \{na \colon n \in \mathbb{Z}\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 1. *Если $\mathcal{F}_j \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};U_j)$, $p \geqslant 1$, где (U_j,ρ_j) — полные метрические пространства, $j = 1,\dots,n$ $(n \in \mathbb{N})$, и множества $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$ относительно плотны, то множества $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;a,\varepsilon)$ также относительно плотны при всех $a > 0$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Для чисел $a > 0$ и $\varepsilon > 0$ выберем число $\varepsilon' \in (0,a]$ так, что $\omega_{\varepsilon'}(\mathcal{F}_j) < \frac{\varepsilon}{3}$, $j = 1,\dots,n$. Существует конечное множество чисел $\tau_\nu \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;\frac{\varepsilon}{3})$, $\nu = 1,\dots,N$, таких, что для любого $\tau \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;\frac{\varepsilon}{3})$ найдутся числа τ_ν, $m \in \mathbb{Z}$ и $\tau' \in (-\varepsilon',\varepsilon')$, для которых $\tau - \tau_\nu = ma + \tau'$. Тогда для всех $j = 1,\dots,n$

$$\|\mathcal{F}_j(\cdot) - \mathcal{F}_j(\cdot+ma)\|_{\mathcal{M}^p} \leqslant \|\mathcal{F}_j(\cdot) - \mathcal{F}_j(\cdot+\tau)\|_{\mathcal{M}^p} + \|\mathcal{F}_j(\cdot) - \mathcal{F}_j(\cdot-\tau_j)\|_{\mathcal{M}^p} +$$

$$+ \|\mathcal{F}_j(\cdot) - \mathcal{F}_j(\cdot-\tau')\|_{\mathcal{M}^p} < 2\frac{\varepsilon}{3} + \omega_{\varepsilon'}(\mathcal{F}_j) < \varepsilon.$$

Поэтому $ma \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;a,\varepsilon)$. С другой стороны, $|ma - \tau| \leqslant a + \max\limits_{\nu} |\tau_\nu|$ (и число τ выбирается произвольно в относительно плотном множестве $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;\frac{\varepsilon}{3})$). Следовательно, множество $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbb{T}_p(\mathcal{F}_j;a,\varepsilon)$ также относительно плотно. $\square$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (U,ρ) — *полное метрическое пространство,* $F(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, $\mathcal{G}(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U)$, $p\geqslant 1$. *Предположим, что* $\mathbb{T}_p(F;\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *и* $\mathbb{T}_p(\mathcal{G};\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *для некоторого отображения* $\Gamma\in\mathfrak{G}$ *и* $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a>0$ *и* $\varepsilon>0$ *существует функция* $\mathcal{F}(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U)$ *такая, что:*

(1) $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\in\mathfrak{G}$,

(2) $\mathcal{F}(t)\in F(t)$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$,

(3) $\rho(\mathcal{F}(t),\mathcal{G}(t))<\varepsilon+\rho(\mathcal{G}(t),F(t))$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 2 $F(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, то также (см. лемму 5) $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})\subset\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, поэтому включение $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ можно исключить из предположений теоремы 2.

З а м е ч а н и е 2. Если $(U,\rho)=(\mathbb{R}^n,\rho)$, где $\rho(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ — евклидово расстояние между векторами $x_1\in\mathbb{R}^n$ и $x_2\in\mathbb{R}^n$, или $(U,\operatorname{dist})=(\operatorname{cl}\mathbb{R}^n,\operatorname{dist})$, то любое ограниченное множество в U предкомпактно и, следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{p}(\mathbb{R};U)=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)\colon \varkappa(\mathcal{A}(\mathcal{F};b))\to 0 \text{ при } b\to+\infty\},$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}^p(\mathbb{R};U)\colon \|\chi_{\mathcal{A}(\mathcal{F};b)}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{M}^p}\to 0 \text{ при } b\to+\infty\}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $(\mathcal{B},\|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ — *вещественное банахово пространство и* $F(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$, $p\geqslant 1$. *Предположим, что функция* $\mathbb{R}\ni t\mapsto\inf\limits_{u\,\in\,F(t)}\|u\|_{\mathcal{B}}$ *принадлежит* $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a>0$ *и* $\varepsilon>0$ *существует функция* $\mathcal{F}(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *такая, что:*

(1) $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)$,

(2) $\mathcal{F}(t)\in F(t)$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$,

(3) $\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}<\varepsilon+\inf\limits_{u\,\in\,F(t)}\|u\|_{\mathcal{B}}$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$.

Теорема 3 является частным случаем теоремы 2, из которого теорема 2 вытекает как следствие.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Так как полное метрическое пространство изометрически вкладывается в некоторое вещественное банахово пространство, то в условиях теоремы 2 можно считать, что метрическое пространство (U,ρ) является вещественным банаховым пространством $(\mathcal{B},\|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ (при этом $\rho(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{\mathcal{B}}$, u_1, $u_2\in\mathcal{B}$). Определим многозначное отображение $\mathbb{R}\ni t\mapsto\widetilde{F}(t)=F(t)-\mathcal{G}(t)=\{u-\mathcal{G}(t)\colon u\in F(t)\}$. Тогда (см. лемму 4) $\widetilde{F}(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$ и $\mathbb{T}_p(\widetilde{F};\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};\cdot)\preccurlyeq\Gamma$. С другой стороны, функция $\mathbb{R}\ni t\mapsto\inf\limits_{u\,\in\,\widetilde{F}(t)}\|u\|_{\mathcal{B}}=\rho(\mathcal{G}(t),F(t))$ принадлежит $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Поэтому из теоремы 3 для любых $a>0$ и $\varepsilon>0$ следует существование функции $\widetilde{\mathcal{F}}(\cdot)\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ такой, что $\mathbb{T}_p(\widetilde{\mathcal{F}};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\widetilde{F};a,\cdot)$, $\widetilde{\mathcal{F}}(t)\in\widetilde{F}(t)$ почти всюду (п. в.) и $\|\widetilde{\mathcal{F}}(t)\|_{\mathcal{B}}<\varepsilon+\rho(\mathcal{G}(t),F(t))$ п. в. Тогда функция $\mathcal{F}(\cdot)\doteq\widetilde{\mathcal{F}}(\cdot)+\mathcal{G}(\cdot)$ принадлежит $\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\widetilde{\mathcal{F}};a,\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\in\mathfrak{G}$ (см. леммы 1 и 3), $\mathcal{F}(t)\in F(t)$ п. в. и $\rho(\mathcal{F}(t),\mathcal{G}(t))<\varepsilon+\rho(\mathcal{G}(t),F(t))$ п. в. $\square$

Теорема 3 доказывается в § 3.

§ 2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приведены утверждения, используемые при доказательстве теоремы 3. Простые леммы приведены без доказательства.

Л е м м а 2. *Если функция* $\mathcal{F}\in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *при некотором* $p\geqslant 1$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, *то* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *при всех* $p\geqslant 1$. *При этом отображения* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot)$, $p\geqslant 1$, *эквивалентны и при каждом* $a>0$ *также эквивалентны отображения* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)$, $p\geqslant 1$.

Лемма 2 является следствием неравенств

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}\,dt \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}^{p}\,dt\right)^{1/p} \leqslant \|\mathcal{F}\|_{L^\infty}^{1-(1/p)}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}\,dt\right)^{1/p},$$

которое выполняется для всех $T>0$ и всех функций $\mathcal{F}\in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$.

Л е м м а 3. *Пусть* $\Gamma\in\mathfrak{G}$. *Функции* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно функции* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), $p\geqslant 1$, *для которых* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot)\preccurlyeq\Gamma$, *образуют линейное пространство. Также линейное пространство образуют функции* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно функции* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), *для которых* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *при заданном числе* $a>0$.

Л е м м а 4. *Пусть* $a>0$, $\Gamma\in\mathfrak{G}$, $F\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$, $\mathcal{G}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p\geqslant 1$, $\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *и* $\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$. *Тогда многозначное отображение* $\mathbb{R}\ni t\mapsto\widetilde{F}(t)\doteq F(t)-\mathcal{G}(t)=\{u-\mathcal{G}(t)\colon u\in F(t)\}$ *принадлежит* $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$ *и* $\mathbb{T}_p(\widetilde{F};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$. *Если, более того,* $F\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{G}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, *то также* $\widetilde{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$.

Лемма 4 следует из неравенства $\operatorname{dist}(F_1+u_1,F_2+u_2)\leqslant\operatorname{dist}(F_1,F_2)+\|u_1-u_2\|_{\mathcal{B}}$, где $F_1,F_2\in\operatorname{cl}\mathcal{B}$ и $u_1,u_2\in\mathcal{B}$, и определений пространств $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U)$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U)$. С помощью неравенства $|\rho(u_1,F_1)-\rho(u_2,F_2)|\leqslant\rho(u_1,u_2)+\operatorname{dist}(F_1,F_2)$, где $u_1,u_2\in U$, $F_1,F_2\in\operatorname{cl}U$, доказывается лемма 5.

Л е м м а 5. *Если* $F\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, $\mathcal{G}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};U)$ (*соответственно* $F\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, $\mathcal{G}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U)$ *и* $F\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, $\mathcal{G}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};U)$), $p\geqslant 1$, *и* $\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$, $\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *для некоторых* $a>0$ *и* $\Gamma\in\mathfrak{G}$, *то* $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (*соответственно* $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *и* $\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$) *и* $\mathbb{T}_p(\rho(\mathcal{G}(\cdot),F(\cdot));a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)\cap\mathbb{T}_p(\mathcal{G};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$.

Л е м м а 6. *Пусть* $F\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}U)$, $p\geqslant 1$. *Если* $\rho(u,F(\cdot))\in\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *для некоторого* $u\in U$, *то* $\rho(u,F(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *для всех* $u\in U$ (*и* $\mathbb{T}_p(\rho(u,F(\cdot));a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)$ *для всех* $a>0$ *и* $u\in U$).

Л е м м а 7. *Если* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $g\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$, *и* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$, $\mathbb{T}_p(g;a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$ *для некоторых* $a>0$ *и* $\Gamma\in\mathfrak{G}$, *то* $g\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathbb{T}_p(g\mathcal{F};a,\cdot)\preccurlyeq\Gamma$.

Л е м м а 8. *Если* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), $p\geqslant 1$, *и* $G\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ — *липшицева функция, принимающая значения в некотором вещественном банаховом пространстве* $\mathcal{B}'$, *то* $G(\mathcal{F}(\cdot))\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B}')$ (*соответственно* $G(\mathcal{F}(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B}')$ *и* $G(\mathcal{F}(\cdot))\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B}')$), $\mathbb{T}_p(G(\mathcal{F}(\cdot));\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot)$ *и* $\mathbb{T}_p(G(\mathcal{F}(\cdot));a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)$ *при всех* $a>0$.

С л е д с т в и е 1. *Если* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p\geqslant 1$, *то* $\|\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{B}}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *и* $\mathbb{T}_p(\|\mathcal{F}(\cdot)\|_{\mathcal{B}};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)$ *при всех* $a>0$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), $p\geqslant 1$, *то для любого* $b>0$ *функция*

$$\mathcal{F}_{[b]}(t)=\begin{cases}\mathcal{F}(t), & \text{если } \|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}\leqslant b,\\ b\,\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{F}(t), & \text{если } \|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}}>b,\end{cases}$$

принадлежит $\mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B})$) *и* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_{[b]};a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)$ *при всех* $a>0$.

Л е м м а 9. *Если* $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $\mathcal{F}_\nu \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $\nu \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, *и* $\|\mathcal{F}-\mathcal{F}_\nu\|_{\mathcal{M}^p} \to 0$ *при* $\nu \to +\infty$, *то* $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$. *Если, кроме того,* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_\nu;\cdot) \preccurlyeq \Gamma$, $\nu \in \mathbb{N}$, *для некоторого* $\Gamma \in \mathfrak{G}$, *то* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot) \preccurlyeq \Gamma$. *Если* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_\nu;a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$, $\nu \in \mathbb{N}$, *для некоторых* $a>0$ *и* $\Gamma \in \mathfrak{G}$, *то также* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$.

Следствием леммы 9 и определений пространств $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ является лемма 10.

Л е м м а 10. *Пусть* $\Gamma \in \mathfrak{G}$, $p \geqslant 1$. *Если* $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $\mathcal{F}_\nu \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\mathcal{F}_\nu \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_\nu;\cdot) \preccurlyeq \Gamma$, $\nu \in \mathbb{N}$, *и* $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_\nu(t)\|_{\mathcal{B}} \to 0$ *при* $\nu \to +\infty$, *то* $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$) *и* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};\cdot) \preccurlyeq \Gamma$. *Если* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_\nu;a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$ *для некоторого* $a>0$ *и всех* $\nu \in \mathbb{N}$, *то также* $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$.

Л е м м а 11. *Пусть* $a>0$, $\Gamma \in \mathfrak{G}$ *и* $X \subseteq \mathbb{R}$ — *измеримое множество, для которого* $\chi_X \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *и* $\mathbb{T}_1(\chi_X;a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$. *Предположим также, что* $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$), $p \geqslant 1$, $\mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$ *и функция* $\mathcal{F}(\cdot)$ *в существенном ограничена на множестве* X. *Тогда* $\chi_X(\cdot)\mathcal{F}(\cdot) \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ (*соответственно* $\chi_X(\cdot)\mathcal{F}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ *и* $\chi_X(\cdot)\mathcal{F}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$) *и* $\mathbb{T}_p(\chi_X\mathcal{F};a,\cdot) \preccurlyeq \Gamma$.

Для доказательства леммы 11 достаточно воспользоваться леммой 7 и следствием 2.

Для измеримых множеств $X \subseteq \mathbb{R}$ и функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим $M(X;f) \doteq \{t \in \mathbb{R}\colon f(t) \in X\}$; $M(\varnothing;f) = \varnothing$.

Л е м м а 12. *Пусть* b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 < b_2$ *и* $f \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$. *Предположим, что*

$$\varkappa\big(M\big((b_1-\varepsilon,b_1)\cup[b_2,b_2+\varepsilon);f\big)\big) \to 0 \tag{2.1}$$

при $\varepsilon \to +0$. *Тогда* $\chi_{M([b_1,b_2);f)} \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *и* $\mathbb{T}_1(\chi_{M([b_1,b_2);f)};a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(f;a,\cdot)$ *при всех* $a>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $0<\varepsilon<b_2-b_1$ определим функции

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant b_1-\varepsilon,\\ 1-\varepsilon^{-1}(b_1-t), & \text{если } b_1-\varepsilon<t<b_1,\\ 1, & \text{если } b_1 \leqslant t \leqslant b_2-\varepsilon,\\ \varepsilon^{-1}(b_2-t), & \text{если } b_2-\varepsilon<t<b_2,\\ 0, & \text{если } t \geqslant b_2. \end{cases}$$

В силу лемм 2 и 8 $g_\varepsilon(f(\cdot)) \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ и $\mathbb{T}_1(g_\varepsilon(f(\cdot));a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(f;a,\cdot)$ при всех $a>0$. С другой стороны, из (2.1) следует, что $\|\chi_{M([b_1,b_2);f)}(\cdot)-g_\varepsilon(f(\cdot))\|_{\mathcal{M}^1} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Поэтому в силу леммы 9 $\chi_{M([b_1,b_2);f)} \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ и $\mathbb{T}_1(\chi_{M([b_1,b_2);f)};a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(f;a,\cdot)$ при всех $a>0$. □

Л е м м а 13. *Пусть* $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$, $a>0$, $p \geqslant 1$. *Тогда для любых* $\widetilde{\varepsilon} \in (0,1]$ *и* $\delta>0$ *существуют определенная при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и принимающая конечное множество значений периодическая с периодом* $a>0$ *функция* $g \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *для которой* $\|g\|_{L^\infty}<\delta$, *и число* $\widetilde{\delta}>0$ *такие, что для любой функции* $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ *выполняется неравенство*

$$\varkappa\big(\big\{t \in \mathbb{R} : |f(t)+g(t)| < \widetilde{\delta}\big\}\big) \,<\, \widetilde{\varepsilon}.$$

При этом существует функция $\widetilde{\omega}' \in \widetilde{\Omega}$, *для которой* $f+g \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}';\mathbb{R};\mathbb{R})$ *для любой функции* $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\varepsilon} \in (0,1]$ и $\delta > 0$. Выберем числа $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ так, что $s \geqslant 4\,\widetilde{\varepsilon}^{-1} \geqslant 4$ и $k > 2(s-1)^2\widetilde{\varepsilon}^{-1}$. Выберем также какие-либо числа $\tau_0 \in (0,1]$ и $N \in \mathbb{N}$, для которых $\tau_0 = aN^{-1}$ и $2\,k^{1/p}\,\widetilde{\omega}(\tau_0) < \delta(2s)^{-1}$. Обозначим $\tau(q) = q\tau_0 s^{-1}$, $q = 0,1,\ldots,s-1$. Для всех $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ и $q = 0,1,\ldots,s-1$

$$\|f(\cdot) - f(\cdot + \tau(q))\|_{\mathcal{M}^p} \leqslant \widetilde{\omega}(\tau_0).$$

Поэтому найдется число $T_0(f) > 4\,\widetilde{\varepsilon}^{-1}$ такое, что при $T \geqslant T_0(f)$ и при всех $q = 0,1,\ldots,s-1$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t) - f(t+\tau(q))|^p\,dt \leqslant (2\,\widetilde{\omega}(\tau_0))^p$$

(в дальнейшем для выбранных функций $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ будет предполагаться, что $T \geqslant T_0(f)$). Обозначим

$$\mathcal{C}(f) \doteq \{t \in \mathbb{R}\colon |f(t) - f(t+\tau(q))| < 2\,k^{1/p}\,\widetilde{\omega}(\tau_0) \text{ для всех } q = 1,\ldots,s-1\}.$$

При всех $T \geqslant T_0(f)$

$$\operatorname{mes}[-T,T]\setminus\mathcal{C}(f) \leqslant 2Tk^{-1}(s-1).$$

Если

$$\widetilde{\mathcal{C}}(f) \doteq \bigl\{t \in \mathbb{R}\colon |f(t+\tau(q_1)) - f(t+\tau(q_2))| < \delta(2s)^{-1} \text{ для всех } q_1,\ q_2 \in \{0,1,\ldots,s-1\}, q_1 < q_2\bigr\},$$

то

$$\widetilde{\mathcal{C}}(f) \supseteq \bigcap_{q=0}^{s-2}(\mathcal{C}(f) - \tau(q)),$$

поэтому

$$\frac{1}{2T}\operatorname{mes}[-T,T]\setminus\widetilde{\mathcal{C}}(f) \leqslant \frac{1}{2T}\sum_{q=0}^{s-2}\operatorname{mes}[-T+\tau(q),T+\tau(q)]\setminus\mathcal{C}(f) \leqslant (s-1)^2\,\frac{T+1}{Tk} < \frac{T+1}{T}\,\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}.$$

Определим функцию $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\delta,s,N;t) \in \mathbb{R}$. Положим $g(\delta,s,N;t) = (m-1)s^{-1}\delta$ при $t \in \bigl[(m-1)s^{-1}\tau_0, ms^{-1}\tau_0\bigr)$, $m = 1,\ldots,s$, и при других t значения $g(\delta,s,N;t)$ определим так, чтобы функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\delta,s,N;t)$ была периодической с периодом aN^{-1}. Так как при любом $t \in \mathbb{R}$ числа $g(\delta,s,N;t+\tau(q))$, $q = 0,1,\ldots,s-1$, совпадают с точностью до перестановки с числами $qs^{-1}\delta$, $q = 0,1,\ldots,s-1$, то при $t \in \widetilde{\mathcal{C}}(f)$ среди чисел $f(t+\tau(q)) + g(\delta,s,N,t+\tau(q))$, $q = 0,1,\ldots,s-1$, имеется не более одного числа, для которого

$$|f(t+\tau(q)) + g(\delta,s,N,t+\tau(q))| < \delta(2s)^{-1}.$$

Пусть

$$\mathcal{K}(f) \doteq \bigl\{t \in \mathbb{R}\colon |f(t) + q(\delta,s,N;t)| < \delta(2s)^{-1}\bigr\}.$$

Если $t \in \widetilde{\mathcal{C}}$, то $\sum\limits_{q=0}^{s-1}\chi_{\mathcal{K}(f)}(t+\tau(q)) \leqslant 1$. Поэтому (при $T \geqslant T_0(f)$)

$$\frac{s}{2T}\int_{-T}^{T}\chi_{\mathcal{K}(f)}(t)\,dt - \frac{s}{T} \leqslant \frac{1}{2T}\sum_{q=0}^{s-1}\int_{-T+\tau(q)}^{T+\tau(q)}\chi_{\mathcal{K}(f)}(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Bigl(\sum_{q=0}^{s-1}\chi_{\mathcal{K}(f)}(t+\tau(q))\Bigr)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{2T}\operatorname{mes}[-T,T]\setminus\widetilde{\mathcal{C}}(f) + \frac{1}{2T}\operatorname{mes}[-T,T]\cap\widetilde{\mathcal{C}}(f) \leqslant s\,(T+1)(2T)^{-1}\widetilde{\varepsilon} + 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\chi_{\mathcal{K}(f)}(t)\,dt \leqslant T^{-1}+(T+1)(2T)^{-1}\widetilde{\varepsilon}+s^{-1}.$$

Но $s^{-1}\leqslant\widetilde{\varepsilon}/4$ и $T^{-1}\leqslant\widetilde{\varepsilon}/4$. Откуда $\varkappa\big(\mathcal{K}(f)\big)<\widetilde{\varepsilon}$. Осталось положить $\widetilde{\delta}=(2s)^{-1}\delta$ и выбрать функцию $g(\cdot)=g(\delta,s,N;\cdot)$. При этом из определения функции $g(\delta,s,N;\cdot)$ следует существование функции $\widetilde{\omega}'\in\widetilde{\Omega}$ такой, что $f+g\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}';\mathbb{R};\mathbb{R})$ для всех $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$. $\square$

Л е м м а 14. *Пусть $\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}$, $a>0$, $p\geqslant 1$. Тогда для любого $\delta>0$ существует периодическая с периодом $a>0$ функция $g\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $|g(t)|<\delta$ при всех $t\in\mathbb{R}$, такая, что для любого $\widetilde{\varepsilon}\in(0,1]$ найдется число $\widetilde{\delta}>0$ такое, что для любой функции $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$*

$$\varkappa\big(\{t\in\mathbb{R}\colon |f(t)+g(t)|<\widetilde{\delta}\}\big)\;<\;\widetilde{\varepsilon}.$$

При этом существует функция $\widetilde{\omega}'\in\widetilde{\Omega}$, такая, что для всех функций $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ справедливо включение $f+g\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}';\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta>0$. Из леммы 13 следует существование периодической с периодом $a>0$ функции $g_1\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $|g_1(t)|<\delta/2$ при всех $t\in\mathbb{R}$, и числа $\delta_1\in(0,\delta/2]$ таких, что для любой функции $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ и любой функции $\widetilde{g}\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $\|\widetilde{g}\|_{L^\infty}\leqslant\widetilde{\delta}_1$, выполняется неравенство

$$\varkappa\big(\{t\in\mathbb{R}:|f(t)+g(t)+\widetilde{g}(t)|<\widetilde{\delta}_1\}\big)<\frac{1}{2}\,.$$

Пусть $\widetilde{\omega}_1\in\widetilde{\Omega}$ — функция, для которой $f+g_1\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}_1;\mathbb{R};\mathbb{R})$ при всех $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$. Далее последовательно при $\nu=2,3,\dots$ с помощью леммы 13 выберем периодические с периодом $a>0$ функции $g_\nu\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которых $|g_\nu(t)|\leqslant\min\{\frac12\widetilde{\delta}_{\nu-1}\,,\,2^{-\nu}\delta\}$ при всех $t\in\mathbb{R}$, числа $\widetilde{\delta}_\nu\in\big(0,\min\{2^{-\nu}\delta,\,2^{-\nu+1}\widetilde{\delta}_1\,,\dots,\,2^{-1}\widetilde{\delta}_{\nu-1}\}\big]$ и функции $\widetilde{\omega}_\nu\in\widetilde{\Omega}$ такие, что для любой функции $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$ и любой функции $\widetilde{g}\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $\|\widetilde{g}\|_{L^\infty}\leqslant\widetilde{\delta}_\nu$, выполняется неравенство

$$\varkappa\Big(\Big\{t\in\mathbb{R}\colon \Big|f(t)+\sum_{\mu=1}^{\nu}g_\mu(t)+\widetilde{g}(t)\Big|<\widetilde{\delta}_\nu\Big\}\Big)<2^{-\nu}.\tag{2.2}$$

При этом $f+\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}g_\mu\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}_\nu;\mathbb{R};\mathbb{R})$ для всех функций $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$. Положим теперь $g\doteq\sum\limits_{\mu=1}^{+\infty}g_\mu$. Тогда g — периодическая с периодом $a>0$ функция из $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $|g(t)|<\sum\limits_{\mu=1}^{+\infty}2^{-\mu}\delta=\delta$ при всех $t\in\mathbb{R}$ (и $g\in\mathcal{M}^{p_1}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ при всех $p_1\geqslant 1$). Для всех $\nu\in\mathbb{N}$ и $t\in\mathbb{R}$

$$\Big|\sum_{\mu=\nu+1}^{+\infty}g_\mu(t)\Big|\leqslant\sum_{\mu=\nu+1}^{+\infty}2^{-\mu+\nu}\widetilde{\delta}_\nu=\widetilde{\delta}_\nu\,,$$

Поэтому из (2.2) следует, что для всех функций $f\in\mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega};\mathbb{R};\mathbb{R})$

$$\varkappa\big(\{t\in\mathbb{R}\colon |f(t)+g(t)|<\widetilde{\delta}_\nu\}\big)<2^{-\nu},\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Так как

$$\Big\|g-\sum_{\mu=1}^{\nu}g_\mu\Big\|_{L^\infty}\leqslant\sum_{\mu=\nu+1}^{+\infty}2^{-\mu}\delta=2^{-\nu}\delta\to 0$$

при $\nu \to +\infty$ и $f + \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} g_\mu \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}_\nu; \mathbb{R}; \mathbb{R})$ для всех $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}; \mathbb{R}; \mathbb{R})$ и $\nu \in \mathbb{N}$, то для некоторой функции $\widetilde{\omega}' \in \widetilde{\Omega}$ также $f + g \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}'; \mathbb{R}; \mathbb{R})$ для всех $f \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}; \mathbb{R}; \mathbb{R})$. $\square$

Т е о р е м а 4. *Для любых функции $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R}; \mathcal{B})$, $p \geqslant 1$, и чисел $a > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся попарно непересекающиеся измеримые множества $X_j \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})$ (некоторые из которых могут быть пустыми) и элементы $u_j \in \mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что:*

(1) $\chi_{X_j} \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *и* $\mathbb{T}_1(\chi_{X_j}; a, \cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot)$,

(2) $\bigcup\limits_{s=1}^{+\infty} X_s = \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})$,

(3) $\varkappa\big(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{j} X_s\big) \to 0$ *при* $j \to +\infty$,

(4) $\|\mathcal{F}(t) - u_j\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ *для всех* $t \in X_j$.

При этом для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{s=1}^{j} u_s \chi_{X_s}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R}; \mathcal{B}), \quad \mathbb{T}_p\bigg(\sum_{s=1}^{j} u_s \chi_{X_s}; a, \cdot\bigg) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot),$$

$$\bigg(\sum_{s=1}^{j} \chi_{X_s}(\cdot)\bigg)\mathcal{F}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R}; \mathcal{B}), \quad \mathbb{T}_p\bigg(\bigg(\sum_{s=1}^{j} \chi_{X_s}\bigg)\mathcal{F}; a, \cdot\bigg) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot).$$

Если $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R}; \mathcal{B}) \subset \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R}; \mathcal{B})$, то также

$$\sum_{s=1}^{+\infty} u_s \chi_{X_s}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R}; \mathcal{B}), \quad \mathbb{T}_p\bigg(\sum_{s=1}^{+\infty} u_s \chi_{X_s}; a, \cdot\bigg) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a > 0$ и $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R}; \mathcal{B})$, $p \geqslant 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для множества $\{\mathcal{F}(t) \colon t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})\}$ существует $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $u_j \in \mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что для множеств

$$Y_j \;=\; \big\{t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F}) \colon \|\mathcal{F}(t) - u_j\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3\big\}$$

выполняется равенство $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} Y_j = \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(\mathcal{F})$ и $\varkappa\big(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{j} Y_s\big) \to 0$ при $j \to +\infty$. Если $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R}; \mathcal{B}) \subset \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R}; \mathcal{B})$, то ($\frac{\varepsilon}{3}$-сеть можно выбрать так, чтобы) также

$$\big\|\chi_{\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{j} Y_s}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\big\|_{\mathcal{M}^p} \to 0 \;\text{ при }\; j \to +\infty. \tag{2.3}$$

Обозначим $f_j(\cdot) \doteq \|\mathcal{F}(\cdot) - u_j\|_{\mathcal{B}}$, $j \in \mathbb{N}$. В силу следствия 1 $f_j \in \mathfrak{B}^p_c(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\mathbb{T}_p(f_j; a, \cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot)$. При этом для некоторой функции $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ (можно считать, что $\widetilde{\omega}(\tau) = \omega_\tau(\mathcal{F})$, $\tau \geqslant 0$) справедливы включения $f_j \in \mathcal{M}^p_c(\widetilde{\omega}; \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда из леммы 14 следует, что найдется определенная при всех $t \in \mathbb{R}$ и периодическая с периодом $a > 0$ функция $g \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ такая, что $|g(t)| < \varepsilon/3$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и для каждой функции f_j, $j \in \mathbb{N}$, и для всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varkappa\big(\big\{t \in \mathbb{R} \colon |f_j(t) + g(t) - \lambda| < \widetilde{\delta}\big\}\big) \to 0$$

при $\widetilde{\delta} \to 0$. При этом $\mathbb{T}_p(f_j + g - \lambda; a, \cdot) = \mathbb{T}_p(f_j; a, \cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot)$. В силу леммы 12 $\chi_{M([0,2\varepsilon); f_j+g)}(\cdot) \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ и $\mathbb{T}_1(\chi_{M([0,2\varepsilon); f_j+g)}; a, \cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$X_1 = M\big([0, 2\varepsilon); f_1 + g\big) \backslash \mathcal{N}(\mathcal{F}),$$

$$X_j = M\big([0, 2\varepsilon); f_j + g\big) \backslash \Big(\mathcal{N}(\mathcal{F}) \bigcup \Big(\bigcup_{s=1}^{j-1} M\big([0, 2\varepsilon); f_s + g\big)\Big)\Big), \quad j \geqslant 2.$$

Множества X_j попарно не пересекаются. Из лемм 3 и 7 получаем, что $\chi_{X_j}(\cdot) \in \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\mathbb{T}_1(\chi_{X_j};a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot)$. Если $t \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(\mathcal{F})$, то $t \in Y_j \subseteq M([0,2\varepsilon/3); f_j+g)$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Поэтому $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} X_j = \mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(\mathcal{F})$ и $\varkappa\Bigl(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{s=1}^{j} X_s\Bigr) \to 0$ при $j \to +\infty$. Для функции $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathfrak{B})$ из (2.3) также следует, что

$$\bigl\|\chi_{\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{s=1}^{j} X_s}(\cdot)\mathcal{F}(\cdot)\bigr\|_{\mathcal{M}^p} \to 0 \ \text{ при } \ j \to +\infty. \tag{2.4}$$

Если $t \in X_j$, то $\|\mathcal{F}(t)-u_j\|_{\mathcal{B}} = f_j(t) = \bigl(f_j(t)+g(t)\bigr)-g(t) < \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Утверждения (1)–(4) теоремы 4 доказаны. Так как для всех $j \in \mathbb{N}$ функция $\sum\limits_{s=1}^{j} u_s\chi_{X_s}(\cdot)$ принимает конечное множество значений, то в силу леммы 3

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{j} u_s\chi_{X_s}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathfrak{B}) \cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}) \subset \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathfrak{B}),\\ \mathbb{T}_p\Bigl(\sum_{s=1}^{j} u_s\chi_{X_s};a,\cdot\Bigr) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для функции $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathfrak{B})$ и любого $j \in \mathbb{N}$ существует число $b > 0$ такое, что $\mathcal{F}(t) = = \mathcal{F}_{[b]}(t)$ при всех $t \in \sum\limits_{s=1}^{j} X_s$, поэтому (см. лемму 3 и следствие 2)

$$\Bigl(\sum_{s=1}^{j}\chi_{X_s}(\cdot)\Bigr)\mathcal{F}(\cdot) = \Bigl(\sum_{s=1}^{j}\chi_{X_s}(\cdot)\Bigr)\mathcal{F}_{[b]}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathfrak{B}) \cap L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}) \subset \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathfrak{B}),$$

$$\mathbb{T}_p\Bigl(\Bigl(\sum_{s=1}^{j}\chi_{X_s}\Bigr)\mathcal{F};a,\cdot\Bigr) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot).$$

Если $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathfrak{B})$, то из (2.4), (2.5) и леммы 9 следует, что

$$\sum_{s=1}^{+\infty} u_s\chi_{X_s}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B}), \quad \mathbb{T}_p\Bigl(\sum_{s=1}^{+\infty} u_s\chi_{X_s};a,\cdot\Bigr) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(\mathcal{F};a,\cdot).$$

Но, с другой стороны, так как функции $\sum\limits_{s=1}^{j} u_s\chi_{X_s}(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, принимают конечное множество значений и $\varkappa\bigl(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{s=1}^{j} X_s\bigr) \to 0$ при $j \to +\infty$, то из (2.4) получаем, что $\sum\limits_{s=1}^{+\infty} u_s\chi_{X_s}(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$. □

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть $\varepsilon > 0$, $a > 0$ и $F \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl}\mathcal{B})$. Введем обозначение $\rho(0,F(t)) \doteq \inf\limits_{u\in F(t)}\|u\|_{\mathcal{B}}$, $t \in \mathbb{R}$. Из лемм 5 и 6 следует, что $\rho(0,F(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{B}}^{p,\circ}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (и $\mathbb{T}_p(\rho(0,F(\cdot));a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(F;a,\cdot)$). В силу теоремы 4 для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют измеримые (по Лебегу) и попарно непересекающиеся множества $X^{(n)}_j \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F)$ (некоторые из них могут быть пустыми) и множества $U^{(n)}_j \in \operatorname{cl}\mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что:

(1) $\chi_{X_j^{(n)}}(\cdot) \in \mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\mathbb{T}_1(\chi_{X_j^{(n)}};a,\cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(F;a,\cdot)$,

(2) $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} X_j^{(n)} = \mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F)$,

(3) $\varkappa\big(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{s=1}^{j} X_s^{(n)}\big) \to 0$ при $j\to+\infty$,

(4) $\operatorname{dist}(F(t),U_j^{(n)}) < 2^{-n-2}\varepsilon$ при всех $t\in X_j^{(n)}$.

Для чисел $t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F)$ однозначно определяются индексы $j_n(t)\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, для которых $t\in X^{(n)}_{j_{n(t)}}$. Будем далее последовательно при $n=1,2,3,\dots$ для индексов $j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}$, если $X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}\neq\varnothing$, выбирать элементы $u_{j_1\cdots j_n}\in U_{j_n}^{(n)}$. При $n=1$ элементы $u_{j_1}\in U_{j_1}^{(1)}$ выберем так, что $\|u_{j_1}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/8 + \inf\limits_{u\in U_{j_1}^{(1)}}\|u\|_{\mathcal{B}}$. Тогда для любого $t\in X_{j_1}^{(1)}$

$$\|u_{j_1}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/8 + \operatorname{dist}(F(t),U_{j_1}^{(1)}) + \rho(0,F(t)) < \varepsilon/4 + \rho(0,F(t)). \tag{3.1}$$

Если элементы $u_{j_1\cdots j_n}\in U_{j_n}^{(n)}$ уже выбраны при некотором $n\in\mathbb{N}$ и $X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}\cap X_{j_{n+1}}^{(n+1)}\neq$ $\neq\varnothing$, то элементы $u_{j_1\cdots j_n j_{n+1}}\in U_{j_{n+1}}^{(n+1)}$ выберем так, что

$$\|u_{j_1\cdots j_n} - u_{j_1\cdots j_n j_{n+1}}\|_{\mathcal{B}} \leqslant 2\operatorname{dist}(U_{j_n}^{(n)},U_{j_{n+1}}^{(n+1)}).$$

Если $t\in X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}\cap X_{j_{n+1}}^{(n+1)}$, то

$$\operatorname{dist}(U_{j_n}^{(n)},U_{j_{n+1}}^{(n+1)}) \leqslant \operatorname{dist}(F(t),U_{j_n}^{(n)}) + \operatorname{dist}(F(t),U_{j_{n+1}}^{(n+1)}) < (2^{-n-2}+2^{-n-3})\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\|u_{j_1\cdots j_n} - u_{j_1\cdots j_n j_{n+1}}\|_{\mathcal{B}} < \frac{3}{4}\,2^{-n}\varepsilon. \tag{3.2}$$

При всех $n\in\mathbb{N}$ определим функции

$$\mathcal{F}_n(t) = \sum_{j_1=1}^{+\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{+\infty} u_{j_1\cdots j_n}\,\chi_{X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}}(t), \quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F).$$

В силу леммы 7 для всех $j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}$

$$\chi_{X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}}(\cdot)\in\mathfrak{B}^1_c(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad \mathbb{T}_1\big(\chi_{X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}};a,\cdot\big) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(F;a,\cdot).$$

Кроме того,

$$\bigcup_{j_1=1}^{+\infty}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{+\infty} X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)} = \mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F)$$

и $\varkappa\Big(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j_1=1}^{j}\cdots\bigcup\limits_{j_n=1}^{j} X_{j_1}^{(1)}\cap\dots\cap X_{j_n}^{(n)}\Big) \to 0$ при $j\to+\infty$. Поэтому из теоремы 4 получаем, что $\mathcal{F}_n\in\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}_n;a,\cdot)\preccurlyeq\mathbb{T}_p(F;a,\cdot)$. Из (3.1) и (3.2) следует, что при всех $t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{N}(F)$ выполняются неравенства

$$\|\mathcal{F}_1(t)\|_{\mathcal{B}} < \frac{\varepsilon}{4} + \rho(0,F(t)) \tag{3.3}$$

и

$$\|\mathcal{F}_n(t)-\mathcal{F}_{n+1}(t)\|_{\mathcal{B}} < \frac{3}{4}\,2^{-n}\varepsilon, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Так как $\rho(0, F(\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{B}}_c^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, то (см. (3.3)) $\mathcal{F}_1 \in \widetilde{\mathfrak{B}}_c^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и, следовательно (см. (3.4)), $\mathcal{F}_n \in \widetilde{\mathfrak{B}}_c^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При $n \to +\infty$ функции $\mathcal{F}_n(\cdot)$ равномерно на множестве $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(F)$ сходятся к некоторой функции $\mathcal{F}(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R};\mathcal{B})$. В силу леммы 10 $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}_c^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ и $\mathbb{T}_p(\mathcal{F}; a, \cdot) \preccurlyeq \mathbb{T}_p(F; a, \cdot)$. При $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(F)$ для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{u \in F(t)} \|u - \mathcal{F}_n(t)\|_{\mathcal{B}} \leqslant \operatorname{dist}\,(F(t), U^{(n)}_{j_n(t)}) < 2^{-n-2}\varepsilon.$$

Откуда (при $n \to +\infty$) получаем, что $\mathcal{F}(t) \in F(t)$. Наконец, для всех $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(F)$ из (3.3) и (3.4) следует неравенство

$$\|\mathcal{F}(t)\|_{\mathcal{B}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{F}_n(t) - \mathcal{F}_{n+1}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|\mathcal{F}_1(t)\|_{\mathcal{B}} < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \rho(0, F(t)) = \varepsilon + \rho(0, F(t)).$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential inclusions and optimal control. Lecture Notes in Nonlinear Anal. Vol. 2 / Andres J., Górniewicz L., Nistri P. (Eds.). Toruń: Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, 1998. P. 19–32.
2. Andres J., Bersani A. M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Applicandae Mathematica. 2001. Vol. 65. Nos. 1–3. P. 35–57. https://doi.org/10.1023/A:1010658802322
3. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32. № 2. С. 172–175. https://www.mathnet.ru/rus/smj4623
4. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Mathematica. 1983. Vol. 76. No. 2. P. 163–174. https://eudml.org/doc/218500
5. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия Отдела математики и информатики Удмуртского государственного университета. 1993. Вып. 1. С. 16–78.
6. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 316. Issue 1. P. 110–127. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.037
7. Kovanko A. S. Sur la compocité des systèmes de fonctions presque périodiques généralisées de H. Weyl // Доклады Академии наук СССР. Новая серия. 1944. Т. 43. С. 275–276.
8. Данилов Л. И. Об одном классе почти периодических по Вейлю сечений многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 24–45. https://doi.org/10.20537/vm090102
9. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 97–120. https://doi.org/10.20537/vm080106
10. Данилов Л. И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения. III // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 25–52. https://doi.org/10.20537/vm140403
11. Данилов Л. И. Рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 139–146.
12. Данилов Л. И. Рекуррентные и почти автоморфные сечения многозначных отображений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 45–52. https://www.mathnet.ru/rus/iimi301

13. Данилов Л. И. Динамические системы сдвигов и измеримые сечения многозначных отображений // Математический сборник. 2018. Т. 209. № 11. С. 69–102. https://doi.org/10.4213/sm8994
14. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
15. Fink A. M. Almost periodic differential equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/BFb0070324
16. Du Wei-Shih, Kostić M., Pinto M. Almost periodic functions and their applications: A survey of results and perspectives // Journal of Mathematics. 2021. Vol. 2021. 5536018. https://doi.org/10.1155/2021/5536018
17. Kostić M. Selected topics in almost periodicity. Berlin: De Gruyter, 2022. https://doi.org/10.1515/9783110763522
18. N'Guérékata G. M. Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces. New York: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4482-8
19. Diagana T. Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces. Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00849-3
20. Alvarez E., Lizama C. Weighted pseudo almost periodic solutions to a class of semilinear integro-differential equations in Banach spaces // Advances in Difference Equations. 2015. Vol. 2015. Issue 1. Article number: 31. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0370-5
21. Kostić M. Almost periodic and almost automorphic type solutions to integro-differential equations. Berlin: De Gruyter, 2019. https://doi.org/10.1515/9783110641851
22. Kostić M. Quasi-asymptotically almost periodic functions and applications // Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. 2021. Vol. 52. P. 183–212. https://doi.org/10.1007/s00574-020-00197-7
23. Kostić M., Kumar V. Remotely c-almost periodic type functions in $\mathbb{R}^n$ // Archivum Mathematicum. 2022. Vol. 58. Issue 2. P. 85–104. https://doi.org/10.5817/AM2022-2-85
24. Ding Hui-Sheng, Long Wei, N'Guèrèkata G. M. Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with Stepanov almost periodic coefficients // Journal of Computational Analysis and Applications. 2011. Vol. 13. Issue 2. P. 231–242.
25. N'Guèrèkata G. M., Kostić M. Generalized asymptotically almost periodic and generalized asymptotically almost automorphic solutions of abstract multiterm fractional differential inclusions // Abstract and Applied Analysis. 2018. Vol. 2018. 5947393. https://doi.org/10.1155/2018/5947393
26. Khalladi M. T., Kostić M., Pinto M., Rahmani A., Velinov D. Generalized c-almost periodic functions and applications // Bulletin of International Mathematical Virtual Institute. 2021. Vol. 11. Issue 2. P. 283–293.
27. Diagana T., Kostić M. Almost periodic and asymptotically almost periodic type functions in Lebesgue spaces with variable exponents $L^{p(x)}$ // Filomat. 2020. Vol. 34. Issue 5. P. 1629–1644. https://doi.org/10.2298/FIL2005629D
28. Kostić M. On Besicovitch–Doss almost periodic solutions of abstract Volterra integro-differential equations // Novi Sad Journal of Mathematics. 2017. Vol. 47. Issue 2. P. 187–200. https://doi.org/10.30755/nsjom.06546
29. Kostić M. Multi-dimensional Besicovitch almost periodic type functions and applications // arXiv: 2202.10521v1 [math.FA]. 2022. https://arxiv.org/abs/2202.10521v1
30. Kostić M., Du Wei-Shih, Fedorov V. E. Doss ρ-almost periodic type functions in $\mathbb{R}^n$ // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 21. 2825. https://doi.org/10.3390/math9212825
31. Andres J., Bersani A. M., Grande R. F. Hierarchy of almost-periodic function spaces // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII. 2006. Vol. 26. No. 2. P. 121–188. https://zbmath.org/1133.42002
32. Marcinkiewicz J. Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1939. Vol. 208. P. 157–159.
33. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

34. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. Вып. 1 (35). С. 33–48. https://www.mathnet.ru/rus/iimi78
35. Doss R. On generalized almost periodic functions // Annals of Mathematics. Second Series. 1954. Vol. 59. No. 3. P. 477–489. https://doi.org/10.2307/1969713
36. Doss R. On generalized almost periodic functions (II) // Journal of the London Mathematical Society. 1962. Vol. s1-37. Issue 1. P. 133–140. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-37.1.133

Поступила в редакцию 28.01.2023

Принята к публикации 20.03.2023

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4776-9864
E-mail: lidanilov@mail.ru

Цитирование: Л. И. Данилов. Об одном классе почти периодических типа Безиковича сечений многозначных отображений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 57–75.

L. I. Danilov

On a class of Besicovitch almost periodic type selections of multivalued maps

Keywords: Besicovitch almost periodic type functions, selections, multivalued maps.

MSC2020: 28B20, 42A75

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-04

Let $\mathcal{B}$ be a Banach space and let $\mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$, $p \geqslant 1$, be the Marcinkiewicz space with a seminorm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p}$. By $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\mathcal{B})$ we denote the set of functions $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ that satisfy the following three conditions: (1) $\|\mathcal{F}(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot + \tau)\|_{\mathcal{M}^p} \to 0$ as $\tau \to 0$, (2) for every $\varepsilon > 0$ the set of $(\varepsilon, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^p})$-almost periods of the function $\mathcal{F}$ is relatively dense, (3) for every $\varepsilon > 0$ there exists a set $X(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ such that $\|\chi_{X(\varepsilon)}\|_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} < \varepsilon$ and the set $\{\mathcal{F}(t) : t \in \mathbb{R} \setminus X(\varepsilon)\}$ has a finite ε-net. Let $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathcal{B})$ be the set of functions $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R};\mathcal{B})$ that satisfy the condition (3) and the following condition: for any $\varepsilon > 0$ there is a number $\delta > 0$ such that the estimate $\|\chi_X \mathcal{F}\|_{\mathcal{M}^p} < \varepsilon$ is fulfilled for all sets $X \subseteq \mathbb{R}$ with $\|\chi_X\|_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} < \delta$. The sets $\widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U)$ and $\widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)$ for a complete metric space (U,ρ) are defined analogously. By $\operatorname{cl} U$ denote the metric space of nonempty, closed, and bounded subsets of the space (U,ρ) with Hausdorff metrics. In the paper, in particular, for any $F \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};\operatorname{cl} U)$, $p \geqslant 1$, and $u \in U$, $\varepsilon > 0$, we prove under the condition $\rho(u, F(\cdot)) \in \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ the existence of a function $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathfrak{B}}^p_c(\mathbb{R};U) \cap \widetilde{\mathcal{M}}^{p,\circ}(\mathbb{R};U)$ such that $\mathcal{F}(t) \in F(t)$ and $\rho(u, \mathcal{F}(t)) < \varepsilon + \rho(u, F(t))$ for almost every $t \in \mathbb{R}$.

REFERENCES

1. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions, *Differential inclusions and optimal control. Lecture Notes in Nonlinear Anal. Vol. 2*, Eds.: Andres J., Górniewicz L., Nistri P. Toruń: Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, 1998, pp. 19–32.
2. Andres J., Bersani A. M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics, *Acta Applicandae Mathematica*, 2001, vol. 65, nos. 1–3, pp. 35–57. https://doi.org/10.1023/A:1010658802322
3. Dolbilov A. M., Shneiberg I. Ya. Multivalued almost-periodic mappings and selections of them, *Siberian Mathematical Journal*, 1991, vol. 32, issue 2, pp. 326–328. https://doi.org/10.1007/BF00972781
4. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps, *Studia Mathematica*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 163–174. https://eudml.org/doc/218500
5. Danilov L. I. Almost periodic selections of multivalued maps, *Izvestiya Otdela Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1993, issue 1, pp. 16–78 (in Russian).
6. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, vol. 316, issue 1, pp. 110–127. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.037
7. Kovanko A. S. Sur la compocité des systèmes de fonctions presque périodiques généralisées de H. Weyl, *Doklady Akademii Nauk SSSR. Novaya Seriya*, 1944, vol. 43, pp. 275–276 (in French).
8. Danilov L. I. On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2009, issue 1, pp. 24–45 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm090102
9. Danilov L. I. On Besicovitch almost periodic selections of multivalued maps, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 1, pp. 97–120 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080106
10. Danilov L. I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. III, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 4, pp. 25–52 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140403

11. Danilov L. I. Recurrent multivalued maps and their selections, *Systems dynamics and control processes: Proceedings of international conference dedicated to the 90th annivesary of Academician N. N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, September 15–20, 2014*, Yekaterinburg: Educational and Methodological Center of Ural Polytechnic Institute, 2015, pp. 139–146 (in Russian).
12. Danilov L. I. Recurrent and almost automorphic selections of multivalued mappings, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 45–52 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/iimi301
13. Danilov L. I. Shift dynamical systems and measurable selectors of multivalued maps, *Sbornik: Mathematics*, 2018, vol. 209, issue 11, pp. 1611–1643. https://doi.org/10.1070/SM8994
14. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
15. Fink A. M. *Almost periodic differential equations*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/BFb0070324
16. Du Wei-Shih, Kostić M., Pinto M. Almost periodic functions and their applications: A survey of results and perspectives, *Journal of Mathematics*, 2021, vol. 2021, article ID: 5536018. https://doi.org/10.1155/2021/5536018
17. Kostić M. *Selected topics in almost periodicity*, Berlin: De Gruyter, 2022. https://doi.org/10.1515/9783110763522
18. N'Guérékata G. M. *Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces*, New York: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4482-8
19. Diagana T. *Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces*, Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00849-3
20. Alvarez E., Lizama C. Weighted pseudo almost periodic solutions to a class of semilinear integro-differential equations in Banach spaces, *Advances in Difference Equations*, 2015, vol. 2015, issue 1, article number: 31. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0370-5
21. Kostić M. *Almost periodic and almost automorphic type solutions to integro-differential equations*, Berlin: De Gruyter, 2019. https://doi.org/10.1515/9783110641851
22. Kostić M. Quasi-asymptotically almost periodic functions and applications, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 2021, vol. 52, pp. 183–212. https://doi.org/10.1007/s00574-020-00197-7
23. Kostić M., Kumar V. Remotely c-almost periodic type functions in $\mathbb{R}^n$, *Archivum Mathematicum*, 2022, vol. 58, issue 2, pp. 85–104. https://doi.org/10.5817/AM2022-2-85
24. Ding Hui-Sheng, Long Wei, N'Guèrèkata G. M. Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with Stepanov almost periodic coefficients, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2011, vol. 13, issue 2, pp. 231–242.
25. N'Guérékata G. M., Kostić M. Generalized asymptotically almost periodic and generalized asymptotically almost automorphic solutions of abstract multiterm fractional differential inclusions, *Abstract and Applied Analysis*, 2018, vol. 2018, 5947393. https://doi.org/10.1155/2018/5947393
26. Khalladi M. T., Kostić M., Pinto M., Rahmani A., Velinov D. Generalized c-almost periodic functions and applications, *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 2021, vol. 11, issue 2, pp. 283–293.
27. Diagana T., Kostić M. Almost periodic and asymptotically almost periodic type functions in Lebesgue spaces with variable exponents $L^{p(x)}$, *Filomat*, 2020, vol. 34, issue 5, pp. 1629–1644. https://doi.org/10.2298/FIL2005629D
28. Kostić M. On Besicovitch–Doss almost periodic solutions of abstract Volterra integro-differential equations, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2017, vol. 47, issue 2, pp. 187–200. https://doi.org/10.30755/nsjom.06546
29. Kostić M. Multi-dimensional Besicovitch almost periodic type functions and applications, *arXiv: 2202.10521v1,* [*math.FA*]. 2022. https://arxiv.org/abs/2202.10521v1
30. Kostić M., Du Wei-Shih, Fedorov V. E. Doss ρ-almost periodic type functions in $\mathbb{R}^n$, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 21, 2825. https://doi.org/10.3390/math9212825
31. Andres J., Bersani A. M., Grande R. F. Hierarchy of almost-periodic function spaces, *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII*, 2006, vol. 26, no. 2, pp. 121–188.

https://zbmath.org/1133.42002
32. Marcinkiewicz J. Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1939, vol. 208, pp. 157–159.
33. Bogachev V. I., Smolyanov O. G. *Deistvitel'nyi i funktsional'nyi analiz: universitetskii kurs* (Real and functional analysis: a university course), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamic, 2011.
34. Danilov L. I. On uniform approximation of Weyl and Besicovitch almost periodic functions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2006, issue 1 (35), pp. 33–48 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/iimi78
35. Doss R. On generalized almost periodic functions, *Annals of Mathematics. Second Series*, 1954, vol. 59, no. 3, pp. 477–489. https://doi.org/10.2307/1969713
36. Doss R. On generalized almost periodic functions (II), *Journal of the London Mathematical Society*, 1962, vol. s1-37, issue 1, pp. 133–140. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-37.1.133

Received 28.01.2023

Accepted 20.03.2023

Leonid Ivanovich Danilov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4776-9864
E-mail: lidanilov@mail.ru

Citation: L. I. Danilov. On a class of Besicovitch almost periodic type selections of multivalued maps, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 57–75.