Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2022. Том 60. С. 114–136

УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями изучается проблема формирования оценки решения на основании данных наблюдаемого выходного сигнала. Для получения оценки решения предложены два типа наблюдателей: асимптотический наблюдатель и асимптотический наблюдатель с ограниченной ошибкой. Асимптотический наблюдатель характеризуется тем, что его ошибка асимптотически приближается к нулю. При этом, если исходная система имеет свойство финальной наблюдаемости, то скорость стремления к нулю ошибки оценивания можно задать заранее за счет выбора характеристического квазиполинома однородной системы, описывающей поведение ошибки. В противном случае ошибка оценивания описывается неоднородной системой, а скорость ее сходимости к нулю зависит не только от выбора характеристического квазиполинома однородной системы, но и от поведения неоднородной части, динамика которой зависит от матриц, определяющих структуру выходного сигнала. Отличительной чертой асимптотического наблюдателя с ограниченной ошибкой является то, что его ошибка оценивания остается ограниченной некоторой постоянной, зависящей от начального условия наблюдателя. При этом условия существования такого наблюдателя налагают более слабые требования к параметрам исходной системы в сравнении с условиями существования асимптотического наблюдателя.

Ключевые слова: линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система, запаздывание, наблюдаемый выходной сигнал, оценка решения, асимптотический наблюдатель, ошибка.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-07

Введение

Динамическая система, переменные состояния которой есть оценки переменных состояния другой системы, называется наблюдателем. Этот термин впервые ввел D. G. Luenberger [1], он же показал, что для каждой конечномерной наблюдаемой линейной динамической системы может быть спроектирован наблюдатель, ошибка оценивания которого стремится к нулю с заданной скоростью. В дальнейшем эти идеи стали распространяться на бесконечномерные системы. В работе [2] для систем с запаздыванием построен асимптотический наблюдатель типа Люенбергера. В [3] для систем запаздывающего типа построен наблюдатель, на основе которого предлагается проект регулятора для стабилизации системы управления; дальнейшее развитие этих идей дается в [4]. В [5] рассматривается проблема проектирования наблюдателя для неавтономных линейных бесконечномерных систем. Показано, что при условии слабой наблюдаемости наблюдатель типа Люенбергера может реконструировать так называемое наблюдаемое подпространство системы, однако в этом случае будет лишь слабая сходимость оценки к решению. В статье [6] предложен динамический наблюдатель типа Люенбергера для оценки полного состояния неавтономного линейного параболического уравнения по конечномерному выходу.

Сложность проектирования наблюдателей для объектов с последействием усугубляется неоднозначностью постановки задач оценивания переменных состояния. Бесконечномерность пространства состояний мотивирует дать много неэквивалентных определений наблюдаемости. Наиболее сильное из них — это понятие полной наблюдаемости начального состояния [7]. Однако для формирования управления важно знать не начальное состояние, а уметь восстановить текущее состояние системы в любой момент времени. В случае систем с последействием эти понятия не тождественны. Например, для линейных систем запаздывающего типа можно говорить о сильной, спектральной и слабой наблюдаемости [7].

Сильная наблюдаемость является двойственной к понятию сильной управляемости и равносильна тому, что форма Смита матрицы наблюдаемости имеет вид $\mathrm{col}[I, 0]$. В данном случае проблема проектирования наблюдателей [7] сводится к проблеме размещения полюсов для систем над кольцами [8]. В [9] построили точный наблюдатель, но чувствительный к внешним помехам, в [10] предложен подход к построению наблюдателя посредством работы с полиномами и решения алгебраических уравнений. Весьма интересный подход, позволяющий ослабить требование сильной наблюдаемости до асимптотической наблюдаемости и противопоставить исходному объекту для дальнейшего изучения некоторую сильно наблюдаемую систему, предложен в [11].

Менее жесткие требования на параметры системы предъявляет свойство спектральной наблюдаемости [7], которое является двойственным по отношению к спектральной управляемости. Одним из методов проектирования наблюдателей в данном случае является подход [12, 13], основанный на решении задачи назначения конечного спектра [12–19]. Другой подход, базирующийся на свойстве точечной вырожденности, предложен в [20], где для систем запаздывающего типа с одномерным выходом построен финитный наблюдатель (ошибка оценки такого наблюдателей есть финитная функция).

Понятие слабой наблюдаемости [7] соответствует расширению определения ненаблюдаемого подпространства на системы с запаздыванием. В терминах формы Смита слабая наблюдаемость эквивалентна существованию у матрицы наблюдаемости ненулевых диагональных элементов. Слабо наблюдаемые системы мало изучены, поскольку по отношению к двойственной задаче для слабо управляемой системы коэффициенты характеристического квазиполинома нельзя назначить произвольно [7, 21].

Иной подход, применимый в случае систем нейтрального типа, разработан в работах [22–26]. В [22] предлагаются способы проектирования наблюдателей на базе решения задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости, в [23] построена процедура асимптотической оценки асимптотически наблюдаемых систем, систематизация этих результатов дана в [24, с. 375]. Отличительной чертой наблюдателей [22, 23] является возможность их применения к системам, не имеющим свойств финальной или спектральной наблюдаемости, что существенно расширяет спектр их применения. В статьях [25, 26] для систем нейтрального типа предложены схемы проектирования финитных наблюдателей (ошибка таких наблюдателей есть финитная функция), представляющих собой выходы систем запаздывающего типа с конечным спектром.

В настоящей работе идеи проектирования наблюдателей на базе решения задач модальной управляемости, предложенные в [22, 24], обобщаются на случай линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями. В качестве основы для построения представленной теории выступают результаты исследования проблемы управления спектром, полученные в [27, 28].

§ 1. Объект исследования

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с последействием

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t - ih), \quad t > 0, \tag{1.2}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0], \tag{1.3}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — решение уравнения (1.1), $y(t) \in \mathbb{R}^r$ — наблюдаемый выход; $h = \mathrm{const} > 0$, D, $A_i, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Считаем, что начальная функция $\eta \in \mathbf{PC}_D([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$. Здесь для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A(\mathbf{T}, \mathbb{R}^n)$ обозначает множество кусочно-непрерывных на числовом промежутке $\mathbf{T}$ функций $\eta\colon \mathbf{T} \to \mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta(t)$, $t \in \mathbf{T}$, непрерывна. Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему (1.1) назовем вполне регулярной, если

$$\deg |pD - A_0| = n_1. \tag{1.4}$$

Далее будем изучать только вполне регулярные системы (1.1). В случае вполне регулярной системы (1.1) для заданного начального условия (1.3) существует единственная кусочно-непрерывная функция $x(t)$, $t \geqslant -mh$ (решение (1.1), (1.3)), удовлетворяющая (1.3) и уравнению (1.1) почти всюду, при этом функция $Dx(t)$, $t > 0$, непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную [27].

З а м е ч а н и е 1. Обратим внимание, что класс систем вида (1.1), несмотря на условие (1.4), является достаточно широким и включает в себя множество систем нейтрального типа. Действительно, рассмотрим систему вида

$$\frac{d}{dt}\left(z(t) - \sum_{i=1}^{l_1} S_i z(t - ih)\right) = \sum_{i=0}^{l_2} K_i z(t - ih), \tag{1.5}$$

где S_i, $K_i \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$. Положив $z_2(t) = z(t)$, $z_1(t) = z_2(t) - \sum\limits_{i=1}^{l_1} S_i z_2(t - ih)$, систему (1.5) запишем в виде

$$\dot z_1(t) = \sum_{i=0}^{l_2} K_i z_2(t - ih), \quad z_2(t) = z_1(t) + \sum_{i=1}^{l_1} S_i z_2(t - ih). \tag{1.6}$$

Система (1.5) есть система вида (1.1). Действительно, пусть $m = \max\{l_1, l_2\}$. Если $l_1 > l_2$, то положим $K_i = 0$, $i = \overline{l_1 + 1, m}$, в противном случае $S_i = 0$, $i = \overline{l_2 + 1, m}$. Обозначив $x = \mathrm{col}[z_1, z_2]$, $n = 2n_1$,

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ I_{n_1} & -I_{n_1} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & K_i \\ 0 & S_i \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, m},$$

перепишем (1.5) в виде (1.1).

Заметим, что в ряде случаев к системам вида (1.1) сводится анализ и непрерывно-дискретных систем.

Введем полиномиальные матрицы $A(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $C(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$. Определим оператор сдвига λ_h, действующий по формуле $\lambda_h f(t) = f(t - h)$, и перепишем систему (1.1), (1.2) в более удобном для дальнейших рассуждений виде

$$\frac{d}{dt}\,(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1.7}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0. \tag{1.8}$$

Любую дифференциальную систему, зависящую от выхода (1.8), решение которой $z(t)$ есть оценка решения уравнения (1.7), будем называть *наблюдателем* для системы (1.7), (1.8), а разность $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ — *ошибкой* оценивания.

О п р е д е л е н и е 1.1. Наблюдатель для системы (1.7), (1.8) будем называть *асимптотическим наблюдателем*, если независимо от начальных состояний исходной системы и наблюдателя выполняется соотношение $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Наблюдатель для системы (1.7), (1.8) будем называть *асимптотическим наблюдателем с ограниченной ошибкой*, если существуют зависящие от начального состояния наблюдателя числа Δ, $t_* > 0$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, такие, что $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Delta + \omega(t)$, $t > t_*$.

Цель настоящей статьи — получить условия существования и схемы проектирования асимптотического наблюдателя и асимптотического наблюдателя с ограниченной ошибкой.

§ 2. Некоторые обозначения и вспомогательные сведения

Приведем ряд обозначений, которые будем использовать ниже.

Введем [24, с. 252] множество $\mathbf{J}^{r\times n}$ $(n, r \in \mathbb{N})$, состоящее из операторов $\mathfrak{J}$, характеризующихся следующим условием. Если $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r\times n}$, то $\mathfrak{J}\colon \mathbf{PC}(\Delta_{\mathfrak{J}}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^r$ и $\mathfrak{J}$ имеет вид

$$\mathfrak{J}[\varphi] = J_0(\lambda_h)\varphi(0) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)\varphi(-kh - s)ds. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{PC}(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — множество кусочно-непрерывных на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций, $J_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $\mathbb{R}^{n\times m}[\lambda]$ — множество матриц размера $n \times m$, элементы которых суть полиномы переменной λ, $\breve{m} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — любое число;

$$J_0^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\widetilde{m}_k} e^{\alpha_{k\rho}s}\Big(J_1^{(k\rho)}(s)\cos\beta_{k\rho}s + J_2^{(k\rho)}(s)\sin\beta_{k\rho}s\Big), \tag{2.2}$$

где $\alpha_{k\rho}$, $\beta_{k\rho} \in \mathbb{R}$, $\widetilde{m}_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — любые числа, $J_j^{(k\rho)}(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s]$, $j = 1, 2$. Число $h_{\mathfrak{J}}$ и отрезок $\Delta_{\mathfrak{J}}$ зависят от оператора $\mathfrak{J}$ и определяются формулами $h_{\mathfrak{J}} = h\max\big\{\deg J_0(\lambda), \breve{m} + 1\big\}$, $\Delta_{\mathfrak{J}} = [-h_{\mathfrak{J}}, 0]$. Число $h_{\mathfrak{J}}$ назовем величиной запаздывания оператора $\mathfrak{J}$.

Для любого оператора $\mathfrak{J}$ и кусочно-непрерывной функции $x(t)$, $t \geqslant -h_{\mathfrak{J}}$, будем обозначать $x_t = x_t(\tau) = x(t + \tau)$, $\tau \in \Delta_{\mathfrak{J}}$, $t \geqslant 0$, $\mathfrak{J}[x_t] = J_0(\lambda_h)x(t) + \sum\limits_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)x(t - kh - s)\,ds$.

Оператору (2.1) поставим в соответствие матрицу

$$J(p, e^{-ph}) = J_0(e^{-ph}) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)}\,ds. \tag{2.3}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера для записи комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим интегралы в (2.3), после чего положим $\lambda = e^{-ph}$. В итоге соотношение (2.3) примет вид

$$J(p, \lambda) = J_0(\lambda) + J_1(p, \lambda). \tag{2.4}$$

Элементами матрицы $J_1(p, \lambda)$ являются правильные относительно переменой p дробно-рациональные функции вида $\dfrac{b(p, \lambda)}{c(p)}$, где $b(p, \lambda)$ и $c(p)$ — полиномы с комплексными коэффициентами, причем $c(p) \not\equiv \mathrm{const}$.

Определим отображение σ, которое каждому оператору $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r\times n}$ вида (2.1) ставит в соответствие матрицу $J(p, \lambda)$ вида (2.4), каковы бы ни были $r, n \in \mathbb{N}$. Действие отображения σ будем записывать в виде $\mathfrak{J} \overset{\sigma}{\mapsto} J(p, \lambda)$. Поскольку каждому оператору $\mathfrak{J}$ однозначно соответствует матрица $J(p, e^{-ph})$, то также будем писать $J(p, e^{-ph}) \overset{\sigma}{\mapsto} J(p, \lambda)$.

Множество всех матриц (2.4), которые предствимы в виде (2.3), обозначим $\mathcal{C}^{r\times n}(p, \lambda)$ ($\mathcal{C}^{1\times 1}(p, \lambda) = \mathcal{C}(p, \lambda)$). Справедливо следующее утверждение (см. следствие 1 в [29] или теорему 5.2 в [24, с. 259]).

Л е м м а 2.1. *Рассмотрим дробно-рациональную функцию* $a(p,\lambda) = \dfrac{a_1(p,\lambda)}{a_2(p)}$, *где* $a_2(p) = \prod_{i=1}^{\widehat{l}}(p-p_i)^{l_i}$, $p_i \in \mathbb{C}$ *(*$p_i \neq p_j$ *при* $i \neq j$*)*, $\widehat{l}, l_i \in \mathbb{N}$. *Функция* $a(p,\lambda)$ *принадлежит множеству* $\mathcal{C}(p,\lambda)$ *тогда и только тогда, когда* $\deg_p a_1(p,\lambda) \leqslant \deg a_2(p)$ *и выполняются равенства* $\left.\dfrac{d^j a_1(p,e^{-ph})}{dp^j}\right|_{p=p_i} = 0$, $j=\overline{0,l_i-1}$, $i=\overline{1,\widehat{l}}$.

Введем матрицы $\widetilde{J}_0(\lambda_h) = \big(J_0(\lambda_h)\big)'$, $\widetilde{J}_0^{(k)}(s) = \big(J_0^{(k)}(s)\big)'$, где символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования. Для каждого оператора $\mathfrak{J}$ вида (2.1) определим оператор $\mathfrak{J}'$, задаваемый правилом

$$\mathfrak{J}'[\varphi] = \widetilde{J}_0(\lambda_h)\varphi(0) + \sum_{k=0}^{\check{m}} \int_0^h \widetilde{J}_0^{(k)}(s)\varphi(-kh-s)\,ds. \tag{2.5}$$

Операцию, в результате которой оператору $\mathfrak{J}$ ставится в соответствие оператор $\mathfrak{J}'$, назовем операцией транспонирования, а соответствующий оператор (2.5) транспонированным (по отношению к оператору $\mathfrak{J}$) оператором.

Далее понадобится следующее понятие. Будем говорить, что матрица $\Omega(p,\lambda)$, элементы которой есть дробно-рациональные функции с комплексными коэффициентами, имеет *CR-структуру* (CR — completely regular), если существуют матрицы $\Omega_0 \in \mathbb{R}^{\phi\times\phi}$, $\widehat{\Omega}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\phi\times\phi}[\lambda]$, и матрица $\widetilde{\Omega}_1(p,\lambda)$, элементы которой есть дробно-рациональные функции, такие, что $\Omega(p,\lambda) = p\Omega_0 + \widehat{\Omega}(\lambda) + \widetilde{\Omega}_1(p,\lambda)$, и $\deg|p\Omega_0 + \widehat{\Omega}(0)| = \operatorname{rank}\Omega_0$.

Ниже в настоящей работе проектирование наблюдателей будем осуществлять на базе решения задачи управления спектром. Поэтому приведем некоторые результаты исследования, связанные с этой задачей и полученные в [27,28].

Введем следующую систему управления

$$\frac{d}{dt}\,(Qx(t)) = L(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t>0, \tag{2.6}$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r}[\lambda]$, u — кусочно-непрерывное управление. Считаем, что система (2.6) является вполне регулярной: deg $|pD - L(0)| = \operatorname{rank} Q$. Тогда [27] для любого начального условия

$$\begin{gathered} x(t)=\eta(t), \quad t\in[-m_{_L}h,0], \quad u(t)\equiv 0, \quad t\in[-m_{_B}h,0], \\ \eta\in\mathbf{PC}_Q([-m_{_L}h,0],\mathbb{R}^n) \end{gathered} \tag{2.7}$$

при любой кусочно-непрерывной функции $u(t)$ существует единственное решение начальной задачи (2.6), (2.7). Здесь обозначено $m_{_L} = \deg L(\lambda)$, $m_{_B} = \deg B(\lambda)$.

Определим регулятор

$$u(t) = \mathfrak{R}_0\big[X_t\big], \quad \dot{x}_3(t) = \mathfrak{R}_1\big[X_t\big], \quad x_4(t) = \mathfrak{R}_2\big[X_t\big], \quad t>0, \tag{2.8}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i=3,4,$ — вспомогательные переменные, $n_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $X = \operatorname{col}\big[x,x_3,x_4\big]$, $\mathfrak{R}_0 \in \mathbf{J}_0^{r\times(n+\bar{n})}$, $\mathfrak{R}_i \in \mathbf{J}_0^{n_{i+2}\times(n+\bar{n})}$, $i=1,2$, $\bar{n} = n_3+n_4$ (равенство $n_i=0$ означает, что в регуляторе (2.8) отсутствует переменная x_i и соответствующее уравнение). В регуляторе (2.8) операторы $\mathfrak{R}_i$, $i=\overline{0,2}$, строятся такими, что матрицы $R_i(p,\lambda)$, где $\mathfrak{R}_i \overset{\sigma}{\mapsto} R_i(p,\lambda)$, имеют следующую структуру:

1) $R_i(p,\lambda) = \big[R_{i0}(p,\lambda), R_{i1}(p,\lambda), R_{i2}(\lambda)\big]$, $i=\overline{0,2}$, где блоки $R_{i0}(p,\lambda)$, $R_{i1}(p,\lambda)$, $R_{i2}(\lambda)$ состоят соответственно из n, n_3, n_4 столбцов матрицы $R_i(p,\lambda)$, взятых в порядке их следования;

2) $R_{i0}(p,\lambda) = \Xi_{i1}(\lambda) + \Xi_{i2}(p,\lambda)Q$, $i = \overline{0,2}$, где $\Xi_{i1}(\lambda)$ — полиномиальные матрицы, элементы матриц $\Xi_{i2}(p,\lambda)$ принадлежат $\mathcal{C}(p,\lambda)$.

Эти условия имеют следующий смысл. Пусть X — решение системы (2.6), (2.8). Если в операторах $\mathfrak{R}_i$, $i = \overline{0,2}$, имеются интегральные слагаемые, то под знаками интегралов стоят функции Qx и x_3.

Рассмотрим полином следующего вида

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{n_d} p^i d_i(\lambda), \tag{2.9}$$

где $d_i(\cdot)$ — некоторые полиномы, причем $d_{n_d}(0) \neq 0$, $n_d \geqslant n_1$. Обозначим: $W_1(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрицы системы (2.6), $W_1(p,\lambda) = pQ - L(\lambda)$, $\Delta_0(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрицы замкнутой системы (2.6), (2.8),

$$\Delta_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W_1(p,\lambda) - B(\lambda)R_{00}(p,\lambda) & -B(\lambda)R_{01}(p,\lambda) & -B(\lambda)R_{02}(\lambda) \\ -R_{10}(p,\lambda) & pI_{n_3} - R_{11}(p,\lambda) & -R_{12}(\lambda) \\ -R_{20}(p,\lambda) & -R_{21}(p,\lambda) & I_{n_4} - R_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Систему (2.6) назовем *модально управляемой* в классе регуляторов (2.8), если существует число $n_0 \geqslant n_1$ такое, что для любого полинома (2.9) при $n_d \geqslant n_0$ найдутся $\nu \in \mathbb{R}$ и регулятор вида (2.8), обеспечивающий условия:

(1) матрица $\Delta_0(p,\lambda)$ имеет CR-структуру;

(2) $\bigl|\Delta_0(p,\lambda)\bigr| = \nu d(p,\lambda)$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Систему (2.6) назовем *слабо модально управляемой* в классе регуляторов (2.8), если существует число $n_0 \geqslant n_1$ такое, что для любого полинома (2.9) при $n_d \geqslant n_0$ найдутся $\nu \in \mathbb{R}$ и регулятор вида (2.8), обеспечивающий условия:

(1) матрица $\Delta_0(p,\lambda)$ имеет CR-структуру;

(2) существуют $n_* \in \mathbb{N}$, $n_* \leqslant n_4$, и $P_{13}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n_*}[\lambda]$, $P_{23}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(\bar{n}-n_*)\times n_*}[\lambda]$ такие, что выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(\bar{n}-n_*)} & P_{13}(\lambda) \\ 0_{(\bar{n}-n_*)\times n} & I_{\bar{n}-n_*} & P_{23}(\lambda) \\ 0_{n_*\times n} & 0_{n_*\times(\bar{n}-n_*)} & I_{n_*} \end{bmatrix} \Delta_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(p,\lambda) & 0_{(n+\bar{n}-n_*)\times n_*} \\ \Delta_{21}(p,\lambda) & I_{n_*} - R_*(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блок $\Delta_{11}(p,\lambda) \in \mathcal{C}^{(n+\bar{n}-n_*)\times(n+\bar{n}-n_*)}$ имеет CR-структуру, $\Delta_{21}(p,\lambda) \in \mathcal{C}^{n_*\times(n+\bar{n}-n_*)}$, $R_*(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_*\times n_*}[\lambda]$;

(3) $\bigl|\Delta_{11}(p,\lambda)\bigr| = \nu d(p,\lambda)$.

Рассмотрим уравнение (2.6). Пусть $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$, $B_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$. По неоднородной части уравнения (2.6) построим дескрипторное разностное уравнение с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots. \tag{2.11}$$

Свойства уравнения (2.11) изучены в статьях [30, 31]. В частности, показано, что последовательность $g(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, определяемая уравнением (2.11) и начальными условиями $g(i) = g_i$, $i = \overline{1,m}$, $g_i \in \mathbb{R}^r$, существует в том и только в том случае, если $g_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1,m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) — некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор (один и тот же для всех матриц T_i). Найдем любую матрицу $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ из системы уравнений $B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^{m} B_i T_i = 0$, $T_k S = T_{k-1}$, $k = \overline{2,m}$. Положим $T = T_m$, $G_0 = B_0 T$,

$G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i = \overline{1, m-1}$, и введем матрицу $G(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i$, которую будем неоднократно использовать ниже.

Пусть $\Upsilon_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$, $\Upsilon_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 Q = 0$ и $Q\gamma_2 = 0$ соответственно. Имеют место следующие утверждения [27].

Т е о р е м а 2.1. *Система* (2.6) *модально управляема в классе регуляторов* (2.8) *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$1)\ \mathrm{rank}\big[W_1(p, e^{-ph}),\ B(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\ \mathrm{rank}\big[\Upsilon_1 L(\lambda)\Upsilon_2,\ \Upsilon_1 B(\lambda)\big] = n - \mathrm{rank}\, Q \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Т е о р е м а 2.2. *Для того чтобы система* (2.6) *была слабо модально управляема в классе регуляторов* (2.8) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1)\ \mathrm{rank}\big[W_1(p, e^{-ph}),\ B(e^{-ph}), G(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\ \mathrm{rank}\big[\Upsilon_1 L(\lambda)\Upsilon_2,\ \Upsilon_1 B(\lambda),\ \Upsilon_1 G(\lambda)\big] = n - \mathrm{rank}\, Q \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

§ 3. Вполне регулярные дифференциально-алгебраические системы с конечным спектром

Рассмотрим произвольную линейную автономную вполне регулярную дифференциально-алгебраическую систему

$$\frac{d}{dt}\,(Dx(t)) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih) + \sum_{i=0}^{\check{m}} \int_0^h J_0^{(i)}(s)x(t - kh - s)\, ds + F(t), \quad t > 0, \tag{3.1}$$

где все обозначения те же, что и в (1.1), функции $J_0^{(i)}(s)$ имеют вид (2.2), $F(t)$ — некоторая заданная кусочно-непрерывная функция.

Л е м м а 3.1. *Пусть система* (3.1) *является вполне регулярной, т.е. выполняется условие* (1.4). *Тогда существует преобразование переменных* $x = P_0 \mathrm{col}[w_1, w_2]$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|P_0| \neq 0$, $w_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $i = 1, 2$, *при котором система* (3.1) *преобразуется в систему*

$$\begin{gathered}
\dot{w}_1(t) = \sum_{i=0}^{m} \big(A_{11}^i w_1(t - ih) + A_{12}^i w_2(t - ih)\big) + \\
+ \sum_{i=0}^{\check{m}} \int_0^h \Big(J_{11}^{(i)}(s) w_1(t - kh - s) + J_{12}^{(i)}(s) w_2(t - kh - s)\Big)\, ds + f_1(t), \\
w_2(t) = \sum_{i=1}^{m} A_{22}^i w_2(t - ih) + \sum_{i=0}^{m} A_{21}^i w_1(t - ih) + \\
+ \sum_{i=0}^{\check{m}} \int_0^h \Big(J_{21}^{(i)}(s) w_1(t - kh - s) + J_{22}^{(i)}(s) w_2(t - kh - s)\Big)\, ds + f_2(t), \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $A_{kj}^i \in \mathbb{R}^{n_k \times n_j}$, $k,\ j = 1, 2$, *матричные функции* $J_{kj}^{(i)}(s)$, $k, j = 1, 2$, *размера* $n_k \times n_j$ *имеют вид* (2.2), $f_1(t), f_2(t)$ — *некоторые кусочно-непрерывные функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы 3.1 для системы (3.1) проведем по схеме доказательства похожего утверждения из статьи [27], сформулированного для системы, не содержащей распределенное запаздывание. Выберем неособые матрицы P_0 и P_1, такие, что $P_1DP_0 = \mathrm{diag}\,[I_{n_1}, 0_{n_2\times n_2}]$. Пусть

$$P_1A_iP_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ \overline{A}_{21}^i & \overline{A}_{22}^i \end{bmatrix}, \quad P_1J_0^{(i)}(s)P_0 = \begin{bmatrix} J_{11}^{(i)}(s) & J_{12}^{(i)}(s) \\ \overline{J}_{21}^{(i)}(s) & \overline{J}_{22}^{(i)}(s) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{0, m},$$

где блоки A_{1j}^i, $J_{1j}^{(i)}(s)$, $j = 1, 2$, имеют размер $n_1 \times n_j$, а блоки $\overline{A}_{2j}^i$, $\overline{J}_{1j}^{(i)}(s)$, $j = 1, 2$, имеют размер $n_2 \times n_j$.

Из (1.4) следует, что $\deg\left|pP_1DP_0 - P_1A_0P_0\right| = n_1$, поэтому $\left|\overline{A}_{22}^0\right| \neq 0$. Докажем это. Предположим противное. Тогда, выбрав матрицы Ω_1, Ω_2 такими, что $\Omega_1\overline{A}_{22}^0\Omega_2 = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$ и, разложив определитель

$$\det\Big(\mathrm{diag}[I_{n_1}, \Omega_1]\big(pP_1DP_0 - P_1A_0P_0\big)\mathrm{diag}[I_{n_1}, \Omega_2]\Big)$$

по элементам последней строки, видим, что его степень не может равняться n_1, что противоречит (1.4).

Положим $A_{2j}^i = -\big(\overline{A}_{22}^0\big)^{-1}\overline{A}_{2j}^i$, $J_{2j}^i(s) = -\big(\overline{A}_{22}^0\big)^{-1}\overline{J}_{2j}^{(i)}(s)$, $j = 1, 2$, $\mathrm{col}[f_1(t), f_2(t)] = \mathrm{diag}\left[I_{n_1}, -\big(\overline{A}_{22}^0\big)^{-1}\right]P_1F(t)$, $f_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$. Выполнив в системе (3.1) замену переменных $x = P_0\,\mathrm{col}[w_1, w_2]$, $w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, и, умножив матрицы полученной системы слева на $\mathrm{diag}\left[I_{n_1}, -\big(\overline{A}_{22}^0\big)^{-1}\right]P_1$, придем к системе (3.2). Лемма доказана. □

Рассмотрим характеристическую матрицу $W_w(p, e^{-ph})$ системы (3.2), записанную в виде

$$W_w(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_{n_1} - A_{11}(\lambda) - \widetilde{A}_{11}(p,\lambda) & -A_{12}(\lambda) - \widetilde{A}_{12}(p,\lambda) \\ -A_{21}(\lambda) - \widetilde{A}_{21}(p,\lambda) & I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda) - \widetilde{A}_{22}(p,\lambda) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$A_{kj}(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_{kj}^i, \quad k, j = 1, 2, \quad (k, j) \neq (2, 2), \quad A_{22}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1}A_{22}^i,$$

$$\widetilde{A}_{ij}(p, e^{-ph}) = \sum_{k=0}^{\check{m}} \int_0^h J_{ij}^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)}\,ds, \quad \widetilde{A}_{ij}(p, e^{-ph}) \overset{\sigma}{\mapsto} \widetilde{A}_{ij}(p, \lambda).$$

Обозначим $\Lambda_w = \Big\{p \in \mathbb{C}\colon \left|W_w(p, e^{-ph})\right| = 0\Big\}$ — множество собственных значений (спектр) уравнения (3.2).

Л е м м а 3.2. *Если множество Λ_w состоит из конечного числа элементов и $0 \notin \Lambda_w$, то*

$$\left|I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda) - \widetilde{A}_{22}(p,\lambda)\right| \equiv 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу того, что множество Λ_w состоит из конечного числа элементов, найдутся числа $d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n_1}$, такие, что

$$\left|W_w(p,\lambda)\right| = \sum_{i=0}^{n_1} d_i p^i. \tag{3.4}$$

Пусть $\Pi_W(p,\lambda)$ — матрица, присоединенная к матрице $\bigl(I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda) - \widetilde{A}_{22}(p,\lambda)\bigr)$, и $\bigl|I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda) - \widetilde{A}_{22}(p,\lambda)\bigr| = \theta(p,\lambda)$. Умножив матрицу $W_w(p,\lambda)$ справа на матрицу

$$\Pi_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} \\ 0_{n_2\times n_1} & \Pi_W(p,\lambda) \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

в силу равенства (3.4) получим соотношение

$$\begin{vmatrix} pI_{n_1} - A_{11}(\lambda) - \widetilde{A}_{11}(p,\lambda) & -\bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)\Pi_W(p,\lambda) \\ -A_{21}(\lambda) - \widetilde{A}_{21}(p,\lambda) & \theta(p,\lambda)I_{n_2} \end{vmatrix} = \bigl(\theta(p,\lambda)\bigr)^{n_2-1}\sum_{i=0}^{n_1} d_i p^i. \tag{3.6}$$

С другой стороны, из вида определителя в левой части равенства (3.6) следует, что он представим в виде

$$\begin{vmatrix} pI_{n_1} - A_{11}(\lambda) - \widetilde{A}_{11}(p,\lambda) & -\bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)\Pi_W(p,\lambda) \\ -A_{21}(\lambda) - \widetilde{A}_{21}(p,\lambda) & \theta(p,\lambda)I_{n_2} \end{vmatrix} = \bigl(\theta(p,\lambda)\bigr)^{n_2} d_{n_1} p^{n_1} + \widehat{d}(p,\lambda), \tag{3.7}$$

где $\widehat{d}(p,\lambda)$ — некоторая дробно-рациональная функция. Сравнивая слагаемые в правых частях равенств (3.6), (3.7), заключаем, что $\theta(p,\lambda) \equiv 1$. Лемма доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Утверждение, обратное к лемме 3.2, не имеет места.

Л е м м а 3.3. *Если множество Λ_w состоит из конечного числа элементов и $0 \notin \Lambda_w$, то существует обратимое преобразование переменных $\widetilde{w}(t) = \mathfrak{P}[w_t]$, где $\mathfrak{P} \in \mathbf{J}^{n\times n}$, $w = \operatorname{col}[w_1, w_2]$, такое, что решение система* (3.2) *при $t > t^*$ однозначно определяется системой* (*ниже $\widetilde{w}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $\widetilde{w} = \operatorname{col}[\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2]$*)

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{w}}_1(t) &= \widehat{A}(\lambda_h)\widetilde{w}_1(t) + \sum_{k=0}^{\widetilde{m}} \int_0^h \widehat{J}^{(k)}(s)\widetilde{w}_1(t - kh - s)\,ds + \widetilde{f}_1(t), \\ \widetilde{w}_2(t) &= \widetilde{f}_2(t), \quad t > t^*. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь $\widetilde{m} \in \mathbb{N}$, $t^* \geqslant 0$ — некоторые числа; матрицы $\widehat{A}(\lambda)$ и $\widehat{J}^{(k)}(s)$ таковы, что

$$\widehat{A}(\lambda) + \widehat{J}(p,\lambda) = A_{11}(\lambda) + \widetilde{A}_{11}(p,\lambda) + \bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)\Pi_W(p,\lambda)\bigl(A_{21}(\lambda) + \widetilde{A}_{21}(p,\lambda)\bigr),$$

где $\widehat{J}(p, e^{-ph}) = \sum\limits_{k=0}^{\widetilde{m}} \int_0^h \widehat{J}^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)}\,ds$, $\widehat{J}(p, e^{-ph}) \overset{\sigma}{\mapsto} \widehat{J}(p,\lambda)$; $\widetilde{f}_1(t) = f_1(t) + \mathfrak{F}[f_{2t}]$, $\mathfrak{F} \overset{\sigma}{\mapsto} \bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)$, $\widetilde{f}_2(t) = f_2(t)$. При этом характеристический квазиполином системы (3.8) *равен характеристическому квазиполиному системы* (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим характеристическую матрицу $W_w(p,\lambda)$, определяемую формулой (3.3). Умножив ее справа на матрицу $\Pi_1(p,\lambda)$, описанную формулой (3.5), в силу леммы 3.2 получим матрицу

$$\widehat{W_1}(p,\lambda) = W_w(p,\lambda)\Pi_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_{n_1} - A_{11}(\lambda) - \widetilde{A}_{11}(p,\lambda) & -\bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)\Pi_W(p,\lambda) \\ -A_{21}(\lambda) - \widetilde{A}_{21}(p,\lambda) & I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

Умножив матрицу $\widehat{W_1}(p,\lambda)$ слева и справа на матрицы

$$K_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \bigl(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\bigr)\Pi_W(p,\lambda) \\ 0_{n_2\times n_1} & I_{n_2} \end{bmatrix},$$
$$K_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} \\ A_{21}(\lambda) + \widetilde{A}_{21}(p,\lambda) & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

соответственно, получим

$$\widehat{W}_2(p,\lambda) = K_0(p,\lambda)\widehat{W}_1(p,\lambda)K_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_{n_1} - \overline{A}(p,\lambda) & 0_{n_2} \\ 0_{n_2\times n_1} & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

где $\overline{A}(p,\lambda) = A_{11}(\lambda)+\widetilde{A}_{11}(p,\lambda)+\big(A_{12}(\lambda)+\widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\big)\Pi_W(p,\lambda)\big(A_{21}(\lambda)+\widetilde{A}_{21}(p,\lambda)\big)$. Определим оператор $\mathfrak{P} \in \mathbf{J}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ таким, что

$$\mathfrak{P} \overset{\sigma}{\mapsto} \Pi_1(p,\lambda)K_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} \\ \Pi_W(p,\lambda)\big(A_{21}(\lambda) + \widetilde{A}_{21}(p,\lambda)\big) & \Pi_W(p,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Заметим, что определитель в матрице из формулы (3.9) равен единице, поэтому преобразование переменных $\widetilde{w}(t) = \mathfrak{P}[w_t]$ будет обратимым. Выполнив это преобразование, подействуем на обе части второго уравнения системы (3.2) оператором $\mathfrak{K}$ таким, что $\mathfrak{K} \overset{\sigma}{\mapsto} \big(A_{12}(\lambda) + \widetilde{A}_{12}(p,\lambda)\big)\Pi_W(p,\lambda)$, и прибавим полученное соотношение к первому уравнению (эти действия в данном случае равносильны умножению матрицы $\widehat{W}_1(p,\lambda)$ на матрицу $K_0(p,\lambda)$ слева). В итоге получим систему (3.8) с характеристической матрицей $\widehat{W}_2(p,\lambda)$. Матрица $\widehat{W}_2(p,\lambda)$ получается за счет умножения характеристической матрицы системы (3.2) слева и справа на матрицы, определители которых равны единице (см. вид матриц $\Pi_1(p,\lambda)$, $K_0(p,\lambda)$, $K_1(p,\lambda)$). Поэтому характеристические квазиполиномы систем (3.2) и (3.8) равны. Число t^* берется таким, чтобы неизвестная функция и правая часть системы (3.8) были определены. Лемма доказана. □

§ 4. Проектирование наблюдателя на базе решения задачи модальной управляемости

Определим следующий наблюдатель

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\,(Dz(t)) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{N}_{00}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{N}_{01}[z_{3t}] + \mathfrak{N}_{02}[z_{4t}] - \mathfrak{N}_{00}[y_t], \\ \dot{z}_3(t) = \mathfrak{N}_{10}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{N}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{N}_{12}[z_{4t}] - \mathfrak{N}_{10}[y_t], \\ z_4(t) = N_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + N_{21}(\lambda)z_3(t) + N_{22}(\lambda_h)z_4(t) - N_{20}(\lambda_h)y(t),\ t > t_0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 3,4$; $\mathfrak{N}_{00} \in \mathbf{J}^{n\times r}$, $\mathfrak{N}_{10} \in \mathbf{J}^{n_3\times r}$, $\mathfrak{N}_{0j} \in \mathbf{J}^{n\times n_{j+2}}$, $\mathfrak{N}_{1j} \in \mathbf{J}^{n_3\times n_{j+2}}$, $N_{20}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_4\times n}[\lambda]$, $N_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_4\times n_{j+2}}[\lambda]$ $(j = 1,2)$; $t_0 = \max\big\{h_{\mathfrak{N}_{00}}, h_{\mathfrak{N}_{10}}, h\deg N_{20}(\lambda)\big\}$, где $h_{\mathfrak{N}_{ij}}$ — величина запаздывания для оператора $\mathfrak{N}_{ij}$.

Зададим для системы (4.1) начальные условия

$$z(t) = \widetilde{z}(t), \quad z_i(t) = \widetilde{z}_i(t), \quad t \in [t_0 - h_1, t_0], \quad i = 3,4, \tag{4.2}$$

где $h_1 = \max\big\{h_{\mathfrak{N}_{00}} + m,\, h_{\mathfrak{N}_{10}} + m,\, \deg N_{20}(\lambda) + m,\, h_{\mathfrak{N}_{ij}},\, i = 0,1,\, j = 1,2,\, h\deg N_{2j}(\lambda),\, j = 1,2\big\}$ — длина отрезка последействия системы (4.1), $\widetilde{z} \in \mathbf{PC}_D\big([t_0 - h_1, t_0], \mathbb{R}^n\big)$, $\widetilde{z}_3$ — непрерывная функция, $\widetilde{z}_4$ — кусочно-непрерывная функция.

Пусть $\operatorname{col}\big[z(t), z_3(t), z_4(t)\big]$ — решение системы (4.1), порождаемое начальным условием (4.2). Тогда $z(t)$, $t > t_0$, — оценка решения уравнения (1.7) наблюдателем (4.1), а $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$, $t > t_0$, — ошибка оценивания. Несложно видеть, что система, определяющая поведение ошибки ε, есть однородная ($y \equiv 0$) система (4.1)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\,(D\varepsilon(t)) = A(\lambda_h)\varepsilon(t) - \mathfrak{N}_{00}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{N}_{01}[z_{3t}] + \mathfrak{N}_{02}[z_{4t}], \\ \dot{z}_3(t) = \mathfrak{N}_{10}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{N}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{N}_{12}[z_{4t}], \\ z_4(t) = N_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)\varepsilon(t) + N_{21}(\lambda)z_3(t) + N_{22}(\lambda_h)z_4(t), \quad t > t_0.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Система (4.3) является линейной автономной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системой, асимптотическое поведение которой зависит от ее спектра. В связи с эти выясним возможности управления спектром этой системы. Введем характеристическую матрицу $W(p, e^{-ph})$ системы (1.7), $W(p,\lambda) = pD - A(\lambda)$. Пусть $\overline{W}_1(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (4.3), где

$$\overline{W}_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - N_{00}(p,\lambda)C(\lambda) & -N_{01}(p,\lambda) & -N_{02}(p,\lambda) \\ -N_{10}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{n_3} - N_{11}(p,\lambda) & -N_{12}(p,\lambda) \\ -N_{20}(\lambda)C(\lambda) & -N_{21}(\lambda) & I_{n_4} - N_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

где $\mathfrak{N}_{ij} \overset{\sigma}{\mapsto} N_{ij}(p,\lambda)$. Обозначим Γ_1, Γ_2 — фундаментальные матрицы решений алгебраических уравнений $\gamma D = 0_{1\times n}$, $D\gamma = 0_{n\times 1}$ соответственно.

Т е о р е м а 4.1. *Для того чтобы для любого наперед заданного полинома* $d(p,\lambda)$ *вида* (2.9)*,* $n_d \geqslant n_1 + 1$*, существовали наблюдатель* (4.1) *и* $\nu \in \mathbb{R}$ *такие, что ошибка оценивания* ε *этого наблюдателя является векторной компонентой решения некоторой линейной автономной однородной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы с характеристическим квазиполиномом, равным* $\nu d(p, e^{-ph})$*, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия*

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \quad 2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \mathrm{rank}\, D \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Достаточность.** От системы (1.7), (1.8) перейдем к системе (2.6), положив

$$Q = D', \quad L(\lambda) = \big(A(\lambda)\big)', \quad B(\lambda) = \big(C(\lambda)\big)'. \tag{4.6}$$

В силу (4.5) параметры системы (2.6) удовлетворяют условиям теоремы 2.1, то есть система (2.6) является модально управляемой. Зададим полином (2.9) и построим регулятор (2.8) такой, что для системы (2.6), (2.8) с характеристической матрицей (2.10) и заданным полиномом (2.9) выполняются все условия определения 2.1.

Используя параметры регуляторы (2.8) построим наблюдатель (4.1), положив $\mathfrak{N}_{ij} = (\mathfrak{R}_{ji})'$, $i = 0, 1$, $j = \overline{0,2}$, $N_{2i}(\lambda) = \big(R_{i2}(\lambda)\big)'$, $i = \overline{0,2}$. Тогда для характеристической матрицы $\overline{W}_1(p, e^{ph})$, где $\overline{W}_1(p,\lambda)$ определяется формулой (4.4), выполняется соотношение $\overline{W}_1(p,\lambda) = \big(\Delta_0(p,\lambda)\big)'$. Достаточность условий теоремы 4.1 доказана.

Необходимость. Пусть ошибка $\varepsilon(t)$ наблюдателя (4.1) является векторной компонентой решения некоторой линейной автономной однородной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы с наперед заданным характеристическим квазиполиномом, равным $d(p, e^{-ph})$. Тогда система (2.6) с матрицами (4.6) модально управляема. Поэтому для системы (2.6) с матрицами (4.6) выполняются условия теоремы 2.1. Отсюда следует необходимость условий (4.5). Теорема доказана. □

Таким образом, если выполняются условия (4.5), то за счет выбора квазиполинома (2.9) можно получить асимптотический наблюдатель (4.1), ошибка которого стремится к нулю с заданной скоростью. При практическом построении асимптотического наблюдателя (4.1) для упрощения вычислений в качестве квазиполинома (2.9) можно брать полином, корни которого имеют отрицательные действительные части.

§ 5. Проектирование наблюдателей на базе решения задачи слабой модальной управляемости

Предположим, что условия (4.5) нарушаются. Изучим вопрос формирования наблюдателя на базе решения задачи слабой модальной управляемости. Для этого, как и ранее, будем использовать систему управления (2.6) с матрицами (4.6). Составим разностное уравнение с дискретным временем (2.11). Построим для него матрицы T, S, $G(\lambda)$ и определим матрицы $T_y = T'$, $S_y = S'$, $G_y(\lambda) = \big(G(\lambda)\big)'$.

Рассмотрим наблюдатель (4.1), ошибка которого описывается системой (4.3).

Т е о р е м а 5.1. *Для того чтобы для любого наперед заданного квазиполинома* $d(p, e^{-ph})$ *вида* (2.9)*,* $n_d \geqslant n_1 + 1$*, существовали* $\nu \in \mathbb{R}$ *и наблюдатель* (4.1)*, характеристическая матрица* $\overline{W}_1(p, e^{-ph})$ *ошибки оценивания которого удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *матрица* $\overline{W}_1(p, \lambda)$ *имеет* CR*-структуру;*

(2) *существуют* $n_* \in \mathbb{N}$, $n_* \leqslant n_4$, *и* $P_{31}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_* \times n}[\lambda]$, $P_{32}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_* \times (\bar{n} - n_*)}[\lambda]$ *такие, что выполняется равенство*

$$\overline{W}_1(p,\lambda) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(\bar{n}-n_*)} & 0_{n\times n_*} \\ 0_{(\bar{n}-n_*)\times n} & I_{\bar{n}-n_*} & 0_{(\bar{n}-n_*)\times n_*} \\ P_{31}(\lambda) & P_{32}(\lambda) & I_{n_*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{W}_{11}(p,\lambda) & \overline{W}_{21}(p,\lambda) \\ 0_{n_*\times(n+\bar{n}-n_*)} & I_{n_*} - R_*(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

где $\bar{n} = n_3 + n_4$, $\overline{W}_{11}(p,\lambda)$, $\overline{W}_{21}(p,\lambda)$ *— некоторые блоки, причем блок* $\overline{W}_{11}(p,\lambda)$ *имеет* CR*-структуру,* $R_*(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_*\times n_*}[\lambda]$*;*

(3) $\big|\overline{W}_{11}(p,\lambda)\big| = \nu d(p,\lambda)$*,*

необходимо и достаточно, чтобы

$$1)\,\mathrm{rank} \begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G_y(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \quad 2)\,\mathrm{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \\ G_y(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \mathrm{rank}\, D \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Достаточность.** Пусть выполняются условия (5.2). Выберем полином (2.9), $n_d \geqslant n_1 + 1$. В силу условий (5.2) и теоремы 2.2 система управления (2.6) с матрицами (4.6) слабо модально управляема. Для выбранного квазиполинома (2.9) построим регулятор вида (2.8), обеспечивающий выполнение условий определения 2.2. Такой регулятор можно построить в виде [27]

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathfrak{R}_{00}[x_t] + \mathfrak{R}_{01}[x_{3t}] + R_{02}(\lambda)x_{41}(t) + B(\lambda_h)Tx_{42}(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \mathfrak{R}_{10}[x_t] + \mathfrak{R}_{11}[x_{3t}] + R_{12}(\lambda_h)x_{41}(t), \\ x_{41}(t) &= \mathfrak{R}_{20}[x_t] + \mathfrak{R}_{21}[x_{3t}] + R_{22}(\lambda_h)x_{41}(t), \\ x_{42}(t) &= \mathfrak{R}_{30}[x_t] + \mathfrak{R}_{31}[x_{3t}] + R_{32}(\lambda_h)x_{41}(t) + Sx_{42}(t-h). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь векторная переменная x_3 описана ранее, $x_{41} \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_4}$, $x_{42} \in \mathbb{R}^{r_0}$ — векторные компоненты векторной переменной x_4 ($\widetilde{n}_4 + r_0 = n_4$, $n_* = r_0$), $x_4 = \mathrm{col}[x_{41}, x_{42}]$; $\mathfrak{R}_{00} \in \mathbf{J}^{r\times n}$, $\mathfrak{R}_{10} \in \mathbf{J}^{n_3\times n}$, $\mathfrak{R}_{20} \in \mathbf{J}^{\widetilde{n}_4\times n}$, $\mathfrak{R}_{30} \in \mathbf{J}^{r_0\times n}$, $\mathfrak{R}_{01} \in \mathbf{J}^{r\times n_3}$, $\mathfrak{R}_{11} \in \mathbf{J}^{n_3\times n_3}$, $\mathfrak{R}_{21} \in \mathbf{J}^{\widetilde{n}_4\times n_3}$, $\mathfrak{R}_{31} \in \mathbf{J}^{r_0\times n_3}$, $R_{02}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times\widetilde{n}_4}[\lambda]$, $R_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_3\times\widetilde{n}_4}[\lambda]$, $R_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_4\times\widetilde{n}_4}[\lambda]$, $R_{32}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_0\times\widetilde{n}_4}[\lambda]$. При этом в случае регулятора (5.3) в определении 2.2 можно положить $P_{13}(\lambda) = G(\lambda)$, $P_{23}(\lambda) = 0_{\bar{n}-n_*\times n_*}$, $n_* = r_0$.

Используя параметры регулятора (5.3), построим наблюдатель (4.1), который удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,(Dz(t)) &= A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{02}[z_{41t}] + \mathfrak{M}_{03}[z_{42t}] - \mathfrak{M}_{00}[y_t], \\ \dot{z}_3(t) &= \mathfrak{M}_{10}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{41t}] + \mathfrak{M}_{13}[z_{42t}] - \mathfrak{M}_{10}[y_t], \\ z_{41}(t) &= M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z_t + M_{21}(\lambda_h)z_3(t) + M_{22}(\lambda_h)z_{41}(t) + M_{23}(\lambda_h)z_{42}(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t), \\ z_{42}(t) &= T_yC_y(\lambda_h)z(t) + S_yz_{42}(t-h) - T_yy(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь $z_{41},\ z_{42}$ — векторные компоненты вектора z_4 из системы (4.1), т. е. $z_4 = \mathrm{col}[z_{41},\ z_{42}]$; $\mathfrak{M}_{ij} = \big(\mathfrak{R}_{ji}\big)',\ i = 0, 1,\ j = \overline{0,3},\ M_{2j}(\lambda) = \big(R_{j2}(\lambda)\big)',\ j = \overline{0,3}$. Начальные условия для системы (5.4) берем в виде (4.2).

Запишем систему, описывающую поведение ошибки $\varepsilon(t) = z(t) - x(t),\ t \geqslant t_0 - h_1$, наблюдателя (5.4), которая совпадает с однородной $(y \equiv 0)$ системой (5.4)

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\,(D\varepsilon(t)) = A(\lambda_h)\varepsilon(t) + \mathfrak{M}_{00}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{02}[z_{41t}] + \mathfrak{M}_{03}[z_{42t}],\\
\dot z_3(t) = \mathfrak{M}_{10}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{41t}] + \mathfrak{M}_{13}[z_{42t}],\\
z_{41}(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)\varepsilon(t) + M_{21}(\lambda_h)z_3(t) + M_{22}(\lambda_h)z_{41}(t) + M_{23}(\lambda_h)z_{42}(t),\\
z_{42}(t) = T_yC_y(\lambda_h)\varepsilon(t) + S_yz_{42}(t-h), \quad t > t_0.
\end{gathered} \tag{5.5}
$$

Пусть $\mathfrak{M}_{ij} \overset{\sigma}{\mapsto} M_{ij}(p,\lambda)$. Тогда характеристическая матрица $\overline{W}_1(p, e^{-ph})$ системы (5.5) (или, что то же самое, системы (5.4)) может быть записана в виде $(e^{-ph} = \lambda)$

$$
\overline{W}_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - M_{00}(p,\lambda)C(\lambda) & -M_{01}(p,\lambda) & -M_{02}(p,\lambda) & -M_{03}(p,\lambda)\\ -M_{10}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{n_3} - M_{11}(p,\lambda) & -M_{12}(p,\lambda) & -M_{13}(p,\lambda)\\ -M_{20}(\lambda)C(\lambda) & -M_{21}(\lambda) & I_{\tilde n_4} - M_{22}(\lambda) & -M_{23}(\lambda)\\ -T_yC(\lambda) & 0_{r_0\times n_3} & 0_{r_0\times\tilde n_4} & I_{r_0} - \lambda S_y \end{bmatrix}. \tag{5.6}
$$

В соотношении (5.1) полагаем $P_{31}(\lambda) = G_y(\lambda),\ P_{31}(\lambda) = 0_{r_0\times(\bar n - r_0)}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при выборе регулятора (2.8) в виде (5.3), матрица $\big(\overline{W}_1(p,\lambda)\big)'$ совпадает с матрицей $\Delta_0(p,\lambda)$ из определения 2.2. Отсюда следует утверждение теоремы.

Необходимость. Если для квазиполинома (2.9) существует наблюдатель вида (5.4), для которого выполняются условия 1)–3) теоремы 5.1, то система управления (2.6) с матрицами (4.6) слабо модально управлема. Отсюда следует необходимость условий (5.2). Теорема доказана. □

Перейдем к анализу содержательной части теоремы 5.1. Выберем полином $d(p,\lambda)$ вида (2.9). Для определенности далее до конца статьи будем считать, что при выполнении условий теоремы 5.1 наблюдатель (4.1) имеет вид (5.4), характеристическая матрица наблюдателя (5.4) определяется формулой (5.6), а динамика ошибки этого наблюдателя описывается системой (5.5). Обозначим

$$
E(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(\bar n - r_0)} & 0_{n\times r_0}\\ 0_{(\bar n - r_0)\times n} & I_{\bar n - r_0} & 0_{(\bar n - r_0)\times r_0}\\ G_y(\lambda) & 0_{r_0\times(\bar n - r_0)} & I_{r_0} \end{bmatrix}.
$$

В работе [30] доказана формула

$$
T_yC(\lambda) = \big(I_{r_0} - \lambda S_y\big)G_y(\lambda). \tag{5.7}
$$

Используя формулу (5.7), непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$
\overline{W}_1(p,\lambda)E(\lambda) =
$$

$$
\begin{bmatrix} W(p,\lambda) - M_{00}(p,\lambda)C(\lambda) - M_{03}(p,\lambda)G_y(\lambda) & -M_{01}(p,\lambda) & -M_{02}(p,\lambda) & -M_{03}(p,\lambda)\\ -M_{10}(p,\lambda)C(\lambda) - M_{13}(p,\lambda)G_y(\lambda) & pI_{n_3} - M_{11}(p,\lambda) & -M_{12}(p,\lambda) & -M_{13}(p,\lambda)\\ -M_{20}(\lambda)C(\lambda) - M_{23}(\lambda)G_y(\lambda) & -M_{21}(\lambda) & I_{\tilde n_4} - M_{22}(\lambda) & -M_{23}(\lambda)\\ 0_{r_0\times n} & 0_{r_0\times n_3} & 0_{r_0\times\tilde n_4} & I_{r_0} - \lambda S_y \end{bmatrix}. \tag{5.8}
$$

Обратим внимание, что в последней формуле количество строк во второй строке блоков в матрице $E(\lambda)$ равно сумме количеств столбцов второго и третьего столбцах блоков матрицы $\overline{W}_1(p,\lambda)$.

Умножение справа характеристической матрицы системы уравнений на унимодулярную матрицу, зависящую от λ, равносильно невырожденному преобразованию переменных. Поэтому, введя новую функцию $\alpha(t)$ согласно формуле

$$z_{42}(t) = G_y(\lambda)z(t) + \alpha(t), \quad t \geqslant t_0 - h_1 + (m-1)h, \tag{5.9}$$

и используя равенство (5.8), перепишем наблюдатель (5.4) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\,(Dz(t)) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{M}_{03}[G_y(\lambda_h)z_t - \alpha_t] + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}]+\\
+\mathfrak{M}_{02}[z_{41t}] - \mathfrak{M}_{00}[y_t],\\
\dot z_3(t) = \mathfrak{M}_{10}\big[C(\lambda_h)z_t\big] + \mathfrak{M}_{13}[G_y(\lambda_h)z_t - \alpha_t] + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{41t}] - \mathfrak{M}_{10}[y_t],\\
z_{41}(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + M_{23}(\lambda_h)\big(G_y(\lambda_h)z(t) - \alpha(t)\big) + M_{21}(\lambda_h)z_3(t)+\\
+M_{22}(\lambda_h)z_{41}(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t),
\end{gathered} \tag{5.10}$$

$$\alpha(t) = S_y\alpha(t-h) - T_y y(t), \quad t > t_1, \tag{5.11}$$

где $t_1 = t_0 + (m-1)h$.

Для того чтобы получить оценку $z(t)$ решения $x(t)$ системы (1.7), зададим для системы (5.10), (5.11) начальные условия

$$z(t) = \widetilde z(t), \quad z_3(t) = \widetilde z_3(t), \quad z_{41}(t) = \widetilde z_{41}(t), \quad \alpha(t) = \widetilde\alpha(t), \quad t \in [t_1 - h_2, t_1]. \tag{5.12}$$

Здесь $\widetilde z \in \mathbf{PC}_D$, $\widetilde z_3$ — непрерывная функция, $\widetilde z_{41}$, $\widetilde\alpha$ — кусочно-непрерывные функции; $h_2 = \max\big\{h_{\mathfrak{M}_{i3}} + (m-1)h,\ i=0,1,\ \deg M_{23}(\lambda) + (m-1)h, h_1\big\}$ — длина отрезка последействия системы (5.10).

Система (5.10), (5.11), в отличии от системы (5.4), интегрируется проще. Функцию $\alpha(t)$ находим независимо от уравнений (5.10)

$$\alpha(t+kh) = S_y^{k+1}\widetilde\alpha(t-(k+1)h) - \sum_{j=0}^{k} S_y^j y(t-jh), \quad t \in (t_1, t_1+h], \quad k = 0,1,\ldots. \tag{5.13}$$

Подставив функцию $\alpha(t)$, определяемую формулой (5.13), в уравнения (5.10), получим неоднородную линейную автономную вполне регулярную дифференциально-алгебраическую систему с соизмеримыми и распределенными запаздываниями. Решение такой системы легко находится по формуле Коши. При этом в силу теоремы 5.1 характеристический квазиполином однородной ($y \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$) системы (5.10) с точностью до постоянного множителя равен ранее выбранному квазиполиному, т. е. равен $\nu d(p, e^{-ph})$.

Преобразование, подобное описанному выше, можно сделать и с системой (5.5). Введя новую функцию $\beta(t)$ согласно формуле

$$z_{42}(t) = G_y(\lambda)\varepsilon(t) + \beta(t), \quad t \geqslant t_0 - h_1 + (m-1)h, \tag{5.14}$$

из системы (5.5) получим новую систему

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\,(D\varepsilon(t)) = A(\lambda_h)\varepsilon(t) + \mathfrak{M}_{00}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{M}_{03}[G(\lambda_h)\varepsilon_t - \beta_t] + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{02}[z_{41t}],\\
\dot z_3(t) = \mathfrak{M}_{10}\big[C(\lambda_h)\varepsilon_t\big] + \mathfrak{M}_{13}[G(\lambda_h)\varepsilon_t - \beta_t] + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{41t}],\\
z_{41}(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)\varepsilon(t) + M_{23}(\lambda_h)\big(\varepsilon(t) - \beta(t)\big) + M_{21}(\lambda_h)z_3(t) + M_{22}(\lambda_h)z_{41}(t),
\end{gathered} \tag{5.15}$$

$$\beta(t) = S_y\beta(t-h), \quad t > t_1. \tag{5.16}$$

Начальные условия для системы (5.15), (5.16) имеют вид

$$\varepsilon(t) = \widetilde{\varepsilon}(t), \quad z_3(t) = \widetilde{z}_3(t), \quad z_{41}(t) = \widetilde{z}_{41}(t), \quad \beta(t) = \widetilde{\beta}(t), \quad t \in [t_1 - h_2, t_1], \tag{5.17}$$

где $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbf{PC}_D$, $\widetilde{\beta}$ — кусочно-непрерывная функция, остальные функции в (5.17) описаны ранее.

Функция $\beta(t)$ не зависит от системы (5.15) и в силу уравнения (5.16) имеет вид

$$\beta(t + kh) = S_y^{k+1}\widetilde{\beta}(t - h), \quad t \in (t_1, t_1 + h], \quad k = 0, 1, \dots . \tag{5.18}$$

Подставив функцию (5.18) в (5.15), получим неоднородную линейную автономную вполне регулярную дифференциально-алгебраическую систему с характеристическим квазиполиномом $\nu d(p, e^{-ph})$, где квазиполином $d(p, e^{-ph})$ вида (2.9) выбран заранее.

Обозначим λ_i, $i = \overline{1, r_0}$, — собственные значения матрицы S_y. Рассмотрим начальные условия (5.17). Пусть

$$\widetilde{\beta}^* = \sup_{t \in (t_1 - h_2, t_1]} \left\| \widetilde{\beta}(t) \right\|_{\mathbb{R}^{r_0}} . \tag{5.19}$$

Т е о р е м а 5.2. *Пусть для системы* (1.7), (1.8) *выполняются условия* (5.2)*, и все собственные значения матрицы* S_y *удовлетворяют условию* $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, r_0}$. *Тогда за счет выбора коэффициентов характеристического квазиполинома* $\nu d(p, e^{-ph})$ *однородной* ($\alpha \equiv 0$, $y \equiv 0$) *системы* (5.10) *можно обеспечить соотношение*

$$\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty \tag{5.20}$$

каковы бы ни были начальные условия (5.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем, используя теорему 5.1, параметры наблюдателя (5.10), (5.11) так, чтобы характеристический квазиполином $\nu d(p, e^{-ph})$ однородной системы (5.10) был полиномом, все корни которого имеют отрицательные действительные части. Обозначим этот полином $d(p)$, т. е. $d(p) = \nu d(p, e^{-ph})$.

Рассмотрим систему (5.15), (5.16), описывающую поведение ошибки наблюдателя (5.10), (5.11). Характеристический квазиполином однородной ($\beta \equiv 0$) системы (5.15) в силу выше указанного выбора равен $d(p)$ и не содержит нулевого элемента. Положим $F_1(t) = \operatorname{col}\Big[-\mathfrak{M}_{03}[\beta_t], -\mathfrak{M}_{13}[\beta_t]\Big]$, $F_2(t) = -M_{23}(\lambda_h)\beta(t)$, $F(t) = \operatorname{col}[F_1, F_2]$. Тем самым соотношения (5.15) примут вид линейной автономной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы (3.1) с конечным спектром. В силу лемм 3.1, 3.3 найдется преобразование переменных

$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_1(t) \\ \widetilde{w}_2(t) \end{bmatrix} = \mathfrak{P}[z_t^\varepsilon], \quad \mathfrak{P} \in \mathbf{J}^{(n+n_3+\widetilde{n}_4)\times(n+n_3+\widetilde{n}_4)}, \quad z^\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ z_3 \\ z_{41} \end{bmatrix}, \tag{5.21}$$

описываемое формулой (3.9), где $\widetilde{w}_1 \in \mathbb{R}^{n_1+n_3}$, $\widetilde{w}_2 \in \mathbb{R}^{n_2+\widetilde{n}_4}$, что система (5.15) примет вид системы (3.8). Далее к системе (3.8), (5.18) применяем рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 6.3 из монографии [24, с. 389] (см. также доказательство теоремы 5 из [27]), при помощи которых показывается, что $\|\widetilde{w}_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to \infty$, $i = 1, 2$. Отсюда, с учетом того, что определитель матрицы в формуле (3.9) равен единице, из (5.21) следует (5.20). Теорема доказана. □

Установим теперь условия существования асимптотического наблюдателя с ограниченной ошибкой.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть для системы* (1.7), (1.8) *выполняются условия* (5.2), *и все собственные значения* λ_i, $i = \overline{1, r_0}$, *матрицы* S_c *удовлетворяют условию* $|\lambda_i| \leqslant 1$, $i = \overline{1, r_0}$, *причем собственным значениям* λ_i, *для которых* $|\lambda_i| = 1$, *отвечают жордановы клетки размерности равной единице. Тогда существует* $\beta \in \mathbb{R}$ *такое, что при подходящем выборе коэффициентов характеристического квазиполинома* $\nu d(p, e^{-ph})$ *однородной* ($\widehat{\psi} \equiv 0$, $y \equiv 0$) *системы* (5.10) *для любого начального условия* (5.12) *найдутся* $t_2 > 0$ *и функция* $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *обеспечивающие неравенство*

$$\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant b\widetilde{\beta}^* + \omega(t), \quad t > t_2. \tag{5.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно, аналогично доказательству теоремы 5.2, перейти от исходной системы (5.15) к системе (3.8), выбрав в качестве характеристического квазиполинома упомянутый выше полином $d(p)$. После этого следует повторить (с очевидными изменениями) доказательства теоремы 6 из [24, с. 392] (см. также доказательство следствия 1 из [27]). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 3. В статье [31] описан способ выбора матрицы S_c в зависимости требуемого спектра.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим оценку (5.22). Укажем связь $\widetilde{\beta}^*$ и функции $\widetilde{\alpha}(t)$ в начальном условии (5.12) для наблюдателя (5.10), (5.11). Из формул (5.9), (5.14) следует, что $\beta(t) = G_y(\lambda_h)x(t) + \alpha(t)$, $t > t_1 - h_2$. Поэтому в силу (5.19) $\widetilde{\beta}^* = \sup_{t\in(t_1-h_2,t_1]} \left\|G_y(\lambda_h)x(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right\|_{\mathbb{R}^{r_0}}$. Последнее равенство можно использовать для выбора функции $\widetilde{\alpha}(t)$ в начальных условиях (5.12) в случае асимптотического наблюдателя с ограниченной оценкой (5.10), (5.11) с целью уменьшения величины $\widetilde{\beta}^*$. Это может оказаться возможным, если известна некоторая информация о начальном условии системы (1.7). В частности, если функция x известна в некоторых точках множества $[-h, t_1]$, то можно, например, использовать ее приближение интерполяционным многочленом (или другой функцией). Или функция $x(t)$, $t \in (0, t_1]$, измерена с некоторой погрешностью.

Асимптотический наблюдатель с ограниченной оценкой и приведенные в замечании 4 рассуждения можно также использовать для нахождения решения в случае, когда начальное состояние системы (1.3) известно с некоторой погрешностью, а уравнение (1.7) является неустойчивым.

§ 6. Пример

Рассмотрим систему (1.7) вида

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\right) = \begin{bmatrix} -\lambda_h - 1 & -2 & -\lambda_h - 2 \\ -2 & \lambda_h - 3 & -3 \\ 2\lambda_h + 1 & \lambda_h + 2 & 3\lambda_h + 2 \end{bmatrix} x(t). \tag{6.1}$$

Предположим, что для системы (6.1) выход (1.8) определяется формулой

$$y(t) = \begin{bmatrix} \lambda_h^2 & 2\lambda_h^2 - \lambda_h & 2\lambda_h^2 - \lambda_h \\ \lambda_h^2 & \lambda_h^2 & \lambda_h^2 \\ 0 & \lambda_h & \lambda_h \end{bmatrix} x(t). \tag{6.2}$$

Несложная проверка показывает, что выполняются условия финальной наблюдаемости (4.5). Поэтому для построения асимптотического наблюдателя воспользуемся доказательством теоремы 3.

Вначале от исходной системы наблюдения (6.1), (6.2) перейдем к системе управления (2.6). В данном случае эта система имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\right) = \begin{bmatrix} -\lambda_h - 1 & -2 & 2\lambda_h + 1 \\ -2 & \lambda_h - 3 & \lambda_h + 2 \\ -\lambda_h - 2 & -3 & 3\lambda_h + 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \lambda_h^2 & \lambda_h^2 & 0 \\ 2\lambda_h^2 - \lambda_h & \lambda_h^2 & \lambda_h \\ 2\lambda_h^2 - \lambda_h & \lambda_h^2 & \lambda_h \end{bmatrix} u(t). \tag{6.3}$$

Строим для данной системы регулятор (2.8) такой, что для системы (6.3), замкнутой регулятором (2.8), и квазиполинома (2.9), взятого в виде полинома $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$, будут выполняться все условия определения 2.1. Следуя работе [27], находим регулятор (2.8), который запишем в виде

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = \mathfrak{R}_1[X_t], \quad x_2(t) = \big[1,\, 1-\lambda_h,\, -1,\, 0\, -\lambda_h^2 - \lambda_h\big] X(t),$$

где $X = \mathrm{col}\big[x,\, x_3,\, x_4\big]$, $x_3,\, x_4 \in \mathbb{R}$ — вспомогательные переменные, оператор $\mathfrak{R}_1$ таков, что $\mathfrak{R}_1 \overset{\sigma}{\mapsto} R_1(p,\lambda)$,

$$R_1(p,\lambda) = \big[\nu_2(p,\lambda),\, \nu_2(p,\lambda) - \nu_1(p,\lambda),\, \nu_1(p,\lambda) - \nu_2(p,\lambda),\, \nu_3(p,\lambda),\, 0\big],$$

а дробно-рациональные функции $\nu_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,3}$, таковы, что функции $\nu_i(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,3}$, представимы в виде

$$\nu_1(p, e^{-ph}) = \frac{1}{3}(143 + 30e^{-ph} + 12e^{-2ph} + 3e^{-3ph}) - \frac{1}{3}\int_0^1 (-48 + 184e^{-ph} + 95e^{-2ph})e^{-ps}\, ds + \\ + \frac{1}{3}\int_0^1 (3 + 95e^{-ph} + 114e^{-2ph}) s e^{-ps} ds + \frac{1}{3}\int_0^1 (-9 - 9e^{-ph} - 19e^{-2ph}) s^2 e^{-ps}\, ds,$$

$$\nu_2(p, e^{-ph}) = \frac{1}{3}(-317 - 137e^{-ph} - 60e^{-2ph} - 18e^{-3ph} - 3e^{-4ph}) + \\ + \frac{1}{6}\int_0^1 (-294 + 722e^{-ph} + 748e^{-2ph} + 190e^{-3ph})e^{-ps}\, ds - \\ - \frac{1}{3}\int_0^1 (24 + 211e^{-ph} + 361e^{-2ph} + 114e^{-3ph}) s e^{-ps}\, ds + \\ + \frac{1}{3}\int_0^1 (2 + e^{-ph})(9 + 9e^{-ph} + 19e^{-2ph}) s^2 e^{-ps}\, ds,$$

$$\nu_3(p, e^{-ph}) = -6 - 2e^{-ph} - e^{-2ph} + \frac{1}{3}\int_0^1 (-33 + 59e^{-ph} + 38e^{-2ph})e^{-ps}\, ds - \\ - \frac{2}{3}\int_0^1 (9 + 9e^{-ph} + 19e^{-2ph}) s e^{-ps}\, ds.$$

Матрица $\Delta_0(p,\lambda)$, определяемая формулой (2.10), имеет вид

$$\Delta_0(p,\lambda) = \\ = \begin{bmatrix} -p+\lambda+1 & -p+2 & p-2\lambda-1 & 0 & \lambda^2 \\ -p+2 & -\lambda+3 & -\lambda-2 & \lambda & \lambda^2 \\ -2p+\lambda+2 & -p+3 & p-3\lambda-2 & \lambda & \lambda^2 \\ -\nu_2(p,\lambda) & -\nu_2(p,\lambda)+\nu_1(p,\lambda) & -\nu_1(p,\lambda)+\nu_2(p,\lambda) & p-\nu_3(p,\lambda) & 0 \\ 0 & -1+\lambda & 1 & 0 & 1+\lambda^2+\lambda \end{bmatrix}.$$

Делая проверку, видим, что уравнение $\det \Delta_0(p,\lambda) = 0$ имеет следующие корни: -1, -2, -3.

Теперь выписываем наблюдатель (4.1):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} z(t) = \begin{bmatrix}-\lambda_h-1 & -2 & -\lambda_h-2\\ -2 & \lambda_h-3 & -3\\ 2\lambda_h+1 & \lambda_h+2 & 3\lambda_h+2\end{bmatrix} z(t) + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}] + \begin{bmatrix}0\\ 1-\lambda_h\\ -1\end{bmatrix} z_4(t),$$

$$\begin{gathered}\dot{z}_3(t) = \big[0,\, -\lambda_h,\, -\lambda_h\big] z(t) + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}] - \big[0,\, -\lambda_h,\, -\lambda_h\big] y(t),\\ z_4(t) = \big[-\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2\big] z(t) - (\lambda_h^2+\lambda_h) z_4(t) - \big[-\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2\big] y(t),\end{gathered} \tag{6.4}$$

где $\mathfrak{M}_{01} \overset{\sigma}{\mapsto} \operatorname{col}\big[\nu_2(p,\lambda),\, \nu_2(p,\lambda) - \nu_1(p,\lambda),\, \nu_1(p,\lambda) - \nu_2(p,\lambda)\big]$, $\mathfrak{M}_{11} \overset{\sigma}{\mapsto} \nu_3(p,\lambda)$. Система, описывающая поведение ошибки наблюдателя (6.4) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \varepsilon(t) = \begin{bmatrix}-\lambda_h-1 & -2 & -\lambda_h-2\\ -2 & \lambda_h-3 & -3\\ 2\lambda_h+1 & \lambda_h+2 & 3\lambda_h+2\end{bmatrix} \varepsilon(t) + \mathfrak{M}_{01}[z_{3t}] + \begin{bmatrix}0\\ 1-\lambda_h\\ -1\end{bmatrix} z_4(t),$$

$$\begin{gathered}\dot{z}_3(t) = \big[0,\, -\lambda_h,\, -\lambda_h\big] \varepsilon(t) + \mathfrak{M}_{11}[z_{3t}],\\ z_4(t) = \big[-\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2,\, -\lambda_h^2\big] \varepsilon(t) - (\lambda_h^2+\lambda_h) z_4(t).\end{gathered}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что полученная система имеет конечный спектр, состоящий из чисел -1, -2, -3. Это значит, что $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$.

§ 7. Заключение

Для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием предложены два подходы к решению задачи восстановления решения по результатам наблюдаемого выходного сигнала. Один из них базируется на обобщении классического подхода проектирования наблюдателя, асимптотически точно восстанавливающего решение системы, за счет конструирования модального регулятора для двойственной системы управления. При этом ошибка такого наблюдателя стремится к нулю с заданной скоростью.

Другой подход в своей основе содержит решение задачи слабой модальной управляемости и позволяет построить два типа наблюдателей: асимптотический наблюдатель и асимптотический наблюдатель с ограниченной ошибкой. Ошибка асимптотического наблюдателя в данном случае стремится к нулю со скоростью, зависящей от параметров исходной системы. В случае асимптотического наблюдателя с ограниченной ошибкой ошибка оценки с возрастанием времени остается ограниченной некоторой постоянной, зависящей от начальных условий исходной системы и наблюдателя. К достоинству такого наблюдателя относится возможность получить решение системы с заданной ошибкой в случае, когда начальное состояние известно с некоторой ошибкой. Тем самым можно получать решения неустойчивых систем в случаях, когда начальное состояние измерено с некоторой погрешностью, и имеется возможность наблюдать выходной сигнал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luenberger D. An introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16. Issue 6. P. 596–602. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826
2. Zheng Gang, Bejarano F. J. Observer design for linear singular time-delay systems // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025
3. Ху Гуан-Да. Свойство разделения стабилизирующего контроллера на основе наблюдателя для линейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 4. С. 936–947. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.418

4. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Mathematical Journal. 2022. Vol. 63. Issue 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X
5. Brivadis L., Andrieu V., Serres U., Gauthier J.-P. Luenberger observers for infinite-dimensional systems, back and forth nudging, and application to a crystallization process // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59. Issue 2. P. 857–886. https://doi.org/10.1137/20M1329020
6. Rodrigues S. S. Oblique projection exponential dynamical observer for nonautonomous linear parabolic-like equations // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59. Issue 1. P. 464–488. https://doi.org/10.1137/19M1278934
7. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems // Kybernetika. 2001. Vol. 37. No. 4. P. 427–458. https://zbmath.org/?q=1265.93108
8. Morse A. S. Ring models for delay-differential systems // Automatica. 1976. Vol. 12. Issue 5. P. 529–531. https://doi.org/10.1016/0005-1098(76)90013-3
9. Pourboghrat F., Chyung Dong Hak. Exact state-variable reconstruction of delay systems // International Journal of Control. 1986. Vol. 44. Issue 3. P. 867–877. https://doi.org/10.1080/00207178608933637
10. Emre E., Khargonekar P. Regulation of split linear systems over rings: Coefficient-assignment and observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. Vol. 27. Issue 1. P. 104–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102815
11. Ильин А. В., Буданова А. В., Фомичев В. В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402. https://doi.org/10.7868/S0869565213040051
12. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: A derivation from abstract operator conditions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1978. Vol. 16. Issue 4. P. 599–645. https://doi.org/10.1137/0316041
13. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. Issue 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336
14. Watanabe K., Ouchi T. An observer of systems with delays in state variables // International Journal of Control. 1985. Vol. 41. Issue 1. P. 217–229. https://doi.org/10.1080/0020718508961121
15. Wang Qing-Guo, Lee Tong Heng, Tan Kok Kiong. Automatic tuning of finite spectrum assignment controllers for delay system // Automatica. 1995. Vol. 31. Issue 3. P. 477–482. https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)00118-3
16. Метельский А. В. Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83. https://doi.org/10.1134/S0374064115010070
17. Зайцев В. А., Ким И. Г. О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 315–325. https://doi.org/10.20537/vm170303
18. Zaitsev V. A. Kim I. G., Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
19. Зайцев В. А., Ким И. Г. Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-01
20. Метельский А. В. Дифференциально-разностный наблюдатель для системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 516–533. https://doi.org/10.1134/S0374064120040093
21. Sename O., Lafay J.-F., Rabah R. Controllability indices of linear systems with delay // Kybernetika. 1995. Vol. 31. No. 6. P. 559–580. https://zbmath.org/?q=0864.93023
22. Хартовский В. Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422. https://doi.org/10.1134/S0374064119030142

23. Хартовский В. Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. https://doi.org/10.1134/S0374064119120112
24. Хартовский В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022.
25. Метельский А. В., Хартовский В. Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102. https://doi.org/10.1134/S0005231019120055
26. Метельский А. В., Хартовский В. Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. https://doi.org/10.31857/S0374064121020138
27. Хартовский В. Е. Критерии модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 514–529. https://doi.org/10.1134/S0374064118040088
28. Хартовский В. Е. Управление спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 1. С. 23–43. https://doi.org/10.31857/S0002338820010084
29. Метельский А. В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20447471
30. Хартовский В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 290–311. https://doi.org/10.35634/vm200211
31. Хартовский В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 102–121. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-08

Поступила в редакцию 06.02.2023

Принята к публикации 10.04.2023

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Цитирование: В. Е. Хартовский. Проектирование асимптотических наблюдателей для линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60. С. 114–136.

V. E. Khartovskii

Designing asymptotic observers for linear completely regular differential algebraic systems with delay

Keywords: linear autonomous completely regular differential-algebraic system, delay, observed output signal, solution estimation, asymptotic observer, estimation error.

MSC2020: 93C41, 34K34, 34K35

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-07

We study the problem of generating a solution estimate based on the observed output signal data for linear autonomous completely regular differential algebraic systems with commensurate delays. To obtain an estimate for the solution, two types of observers are proposed: an asymptotic observer and an asymptotic observer with bounded error. An asymptotic observer is characterized by the fact that its error asymptotically approaches zero. In this case, if the original system has the property of final observability, then the rate of convergence of the estimation error to zero can be set in advance by choosing the characteristic quasi-polynomial of the homogeneous system that describes the behavior of the error. Otherwise, the estimation error is described by an inhomogeneous system, and the rate of its convergence to zero depends not only on the choice of the characteristic quasi-polynomial of the homogeneous system, but also on the behavior of the inhomogeneous part, the dynamics of which depends on the matrices that determine the structure of the output signal. A distinctive feature of an asymptotic observer with bounded error is that its estimation error remains bounded by some constant depending on the observer's initial condition. In this case, the conditions for the existence of such an observer impose weaker requirements on the parameters of the original system in comparison with the conditions for the existence of an asymptotic observer.

REFERENCES

1. Luenberger D. An introduction to observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, issue 6, pp. 596–602. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826
2. Zheng Gang, Bejarano F. J. Observer design for linear singular time-delay systems, *Automatica*, 2017, vol. 80, pp. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025
3. Hu Guang-Da. A separation property of the observer-based stabilizing controller for linear delay systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, issue 4, pp. 763–772. https://doi.org/10.1134/S0037446621040182
4. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, issue 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X
5. Brivadis L., Andrieu V., Serres U., Gauthier J.-P. Luenberger observers for infinite-dimensional systems, back and forth nudging, and application to a crystallization process, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, issue 2, pp. 857–886. https://doi.org/10.1137/20M1329020
6. Rodrigues S. S. Oblique projection exponential dynamical observer for nonautonomous linear parabolic-like equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, issue 1, pp. 464–488. https://doi.org/10.1137/19M1278934
7. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems, *Kybernetika*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 427–458. https://zbmath.org/?q=1265.93108
8. Morse A. S. Ring models for delay-differential systems, *Automatica*, 1976, vol. 12, issue 5, pp. 529–531. https://doi.org/10.1016/0005-1098(76)90013-3
9. Pourboghrat F., Chyung Dong Hak. Exact state-variable reconstruction of delay systems, *International Journal of Control*, 1986, vol. 44, issue 3, pp. 867–877. https://doi.org/10.1080/00207178608933637

10. Emre E., Khargonekar P. Regulation of split linear systems over rings: Coefficient-assignment and observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, vol. 27, issue 1, pp. 104–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102815
11. Il'in A. V., Budanova A. V., Fomichev V. V. Synthesis of observers for asymptotically observable time delay systems, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 129–132. https://doi.org/10.1134/S1064562413010249
12. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: A derivation from abstract operator conditions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1978, vol. 16, issue 4, pp. 599–645. https://doi.org/10.1137/0316041
13. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, issue 6, pp. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336
14. Watanabe K., Ouchi T. An observer of systems with delays in state variables, International Journal of Control, 1985, vol. 41, issue 1, pp. 217–229. https://doi.org/10.1080/0020718508961121
15. Wang Qing-Guo, Lee Tong Heng, Tan Kok Kiong. Automatic tuning of finite spectrum assignment controllers for delay system, *Automatica*, 1995, vol. 31, issue 3, pp. 477–482. https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)00118-3
16. Metel'skii A. V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 69–82. https://doi.org/10.1134/S0012266115010073
17. Zaitsev V. A., Kim I. G. On arbitrary spectrum assignment in linear stationary systems with commensurate time delays in state variables by static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 315–325 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170303
18. Zaitsev V. A., Kim I. G., Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
19. Zaitsev V. A., Kim I. G. Spectrum assignment in linear systems with several commensurate lumped and distributed delays in state by means of static output feedback, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 5–19. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-01
20. Metel'skii A. V. Differential-difference observer for a delay system with one-dimensional output, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, issue 4, pp. 504–522. https://doi.org/10.1134/S0012266120040096
21. Sename O., Lafay J.-F., Rabah R. Controllability indices of linear systems with delay, *Kybernetika*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 559–580. https://zbmath.org/?q=0864.93023
22. Khartovskii V. E. Synthesis of observers for linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 3, pp. 404–417. https://doi.org/10.1134/S0012266119030133
23. Khartovskii V. E. Asymptotic estimates of solutions of linear time-invariant systems of the neutral type with commensurable delays, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 12, pp. 1649–1664. https://doi.org/10.1134/S0012266119120115
24. Khartovskii V. E. *Upravlenie lineinymi sistemami neitral'nogo tipa: kachestvennyi analiz i realizatsiya obratnykh svyazei* (Control of linear systems of neutral type: qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: Yanka Kupala State University of Grodno, 2022.
25. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Finite observer design for linear systems of neutral type, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, issue 12, pp. 2152–2169. https://doi.org/10.1134/S0005117919120051
26. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Exact reconstruction of the solution for linear neutral type systems, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, issue 2, pp. 251–271. https://doi.org/10.1134/S0012266121020130
27. Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 4, pp. 509–524. https://doi.org/10.1134/S0012266118040080
28. Khartovskii V. E. Controlling the spectrum of linear completely regular differential-algebraic systems with delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, issue 1,

pp. 19–38. https://doi.org/10.1134/S1064230720010086

29. Metel'skii A. V. Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, issue 11, pp. 1405–1422. https://doi.org/10.1134/S0012266113110086
30. Khartovskii V. E. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Application to the 0-controllability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 290–311 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200211
31. Khartovskii V. E. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. II. Canonical representation and structural properties, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 102–121 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-08

Received 06.02.2023

Accepted 10.04.2023

Vadim Evgen'evich Khartovskii, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Y. Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Citation: V. E. Khartovskii. Designing asymptotic observers for linear completely regular differential algebraic systems with delay, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 60, pp. 114–136.