

УДК 519.651.2

© *А. В. Чернов***О МОНОТОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУСОЧНО НЕПРЕРЫВНЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СДВИГОВ И СЖАТИЙ ИНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА**

Для кусочно непрерывных монотонных функций, заданных на конечном отрезке $[-b; b]$, строится монотонная гладкая аппроксимация $Q(x)$ с любой заранее заданной точностью в метрике пространства $C(\Pi)$ при сколь угодно малой мере разности $[-b; b] \setminus \Pi$, $\Pi \subset [-b; b]$, с помощью сдвигов и сжатий функции (интеграла) Лапласа. При этом распространяется полученный автором ранее результат о сколь угодно точной в метрике пространства $C[-b; b]$ монотонной аппроксимации непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа на случай кусочно непрерывных функций. Кроме того, предлагается новый способ аппроксимации в виде линейной комбинации сдвигов и сжатий функции Лапласа. Приводятся и обсуждаются конкретные численные примеры применения исследуемых способов аппроксимации для кусочно постоянной (ступенчатой) и кусочно непрерывной монотонных функций. Проводится сравнение полученных результатов для обсуждаемых способов аппроксимации.

Ключевые слова: кусочно непрерывные монотонные функции, равномерная аппроксимация, интеграл Лапласа, функция Гаусса, квадратичная экспонента.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-10

Введение

При изучении различных способов аппроксимации функций одного переменного речь зачастую идет об аппроксимации без дополнительных условий. Однако бывают ситуации, когда требуется строить монотонную аппроксимацию для монотонной функции. Например, при решении некоторых задач математической статистики [1]. Рассмотрим также более подробно следующий содержательный пример.

В теории некорректных задач рассматривается, в частности, следующая характерная ситуация, см., например, [2, 3]. Пусть имеется операторное уравнение первого рода:

$$A^0 z = u^0, \quad z \in Z = L_2[a; b], \quad u^0 \in U, \quad (0.1)$$

где U — гильбертово пространство, $A^0: Z \rightarrow U$ — линейный ограниченный оператор. Предположим, что существует единственное решение z^0 уравнения (0.1) и имеется априорная информация о том, что $z^0 \in M = Z_{\downarrow C}$, где $Z_{\downarrow C}$ — множество ограниченных на $[a; b]$ невозрастающих функций $z \in L_2[a; b]$ таких, что

$$0 \leq z(s) \leq C \quad \forall s \in [a; b].$$

Известно, что множество $Z_{\downarrow C}$ является компактом в $L_2[a; b]$. Поэтому в данной ситуации применим так называемый *метод регуляризации на компактах*. Суть его состоит в следующем, см., например, [2, 3]. В предположении, что вместо точных параметров A^0 , u^0 известны лишь их приближения A^h , u^δ :

$$\|A^h - A^0\| \leq h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leq \delta, \quad \eta = (h, \delta),$$

определяется множество

$$Z_M(\eta) = \{z \in M: J_\eta(z) = \|A^h z - u^\delta\| \leq C_0 h + \delta\},$$

$$C_0 = \sup_{z \in M} \|z\| < +\infty,$$

и доказывается, что оно непусто, причем $z_\eta \rightarrow z^0$ при $\eta \rightarrow 0$ для любого способа выбора $z_\eta \in Z_M(\eta)$ (равномерно относительно этого выбора). Наиболее естественный способ выбора состоит в процессе минимизации невязки $J_\eta(z)$ до тех пор, пока не окажется выполненным условие

$$J_\eta(z) \leq C_0 h + \delta.$$

Соответственно, элемент z_η принимается как приближенное решение задачи (0.1).

Дискретизация описанного подхода проводится по следующей схеме. Фиксируется некоторая сетка

$$a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b;$$

значения $z(s_i) = z_i$, $i = \overline{1, n}$, понимаются как неизвестные параметры. Строго говоря, это не совсем «законно», поскольку $z \in L_2[a; b]$. Однако характерна ситуация, когда естественно ожидать кусочной непрерывности (а иногда и непрерывности) искомого решения, и в этом смысле такой прием допустим. Соответственно, вместо множества $Z_{\downarrow C}$ рассматривается его конечно-разностный аналог

$$M_{\downarrow C} = \{z \in \mathbb{R}^n: z_{i+1} - z_i \leq 0, i = \overline{1, n-1}; 0 \leq z_i \leq C, i = \overline{1, n}\},$$

и вместо минимизации невязки $J_\eta(z)$ на $Z_{\downarrow C}$ производится минимизация его дискретизации $\widehat{J}_\eta(z)$ на множестве $M_{\downarrow C}$. При этом множество $M_{\downarrow C}$ является выпуклым многогранником; формулы его вершин известны (и зависят от C). В случае, когда $\widehat{J}_\eta(z)$ — квадратичная выпуклая функция, задачу минимизации ее на $M_{\downarrow C}$ можно эффективно решить методом условного градиента.

Очевидно, что в случае, когда константа C неизвестна и/или отсутствует информация о приемлемой мелкости разбиения, описанный подход неприменим. В этом случае возникает проблема отыскания эффективного способа конечномерной монотонной аппроксимации искомого (кусочно непрерывного) монотонного решения. Если такой способ найден, минимизацию невязки можно проводить по (варьируемым) параметрам аппроксимации.

В данной статье для кусочно непрерывных монотонных функций, заданных на конечном отрезке $[-b; b]$, строится монотонная гладкая аппроксимация $Q(x)$ с любой заранее заданной точностью в метрике пространства $C(\Pi)$ при сколь угодно малой мере разности $[-b; b] \setminus \Pi$, $\Pi \subset [-b; b]$, с помощью сдвигов и сжатий функции (интеграла) Лапласа. При этом распространяется полученный автором ранее в [4] результат о сколь угодно точной в метрике пространства $C[-b; b]$ монотонной аппроксимации непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий функции Лапласа на случай кусочно непрерывных функций. Кроме того, предлагается новый способ аппроксимации в виде линейной комбинации сдвигов и сжатий функции Лапласа. Приводятся и обсуждаются конкретные численные примеры применения исследуемых способов аппроксимации для кусочно постоянной (ступенчатой) и кусочно непрерывной монотонных функций. Проводится сравнение полученных результатов для обсуждаемых способов аппроксимации.

Ранее автор посвятил ряд работ [5–8] вопросу построения сколь угодно точной равномерной аппроксимации функций с помощью квадратичных экспонент. Эффективность этого способа аппроксимации основана на следующих обстоятельствах. В теории обработки сигналов, изображений и т. д. широко используются подходы, основанные на теории вейвлетов (всплесков). Эти подходы оказались весьма эффективными в смысле возможности

сжатия и преобразования информации [9, 10]. Конкретное семейство вейвлетов порождается сдвигами и сжатиями из так называемого материнского вейвлета — некоторой функции, удовлетворяющей специальным условиям. Типичным примером является материнский вейвлет «мексиканская шляпа» (подробнее см. [9, гл. 3]). Сдвиги и сжатия квадратичной экспоненты (то есть функции Гаусса) — это тоже квадратичные экспоненты. В [5] было показано, что материнский вейвлет «мексиканская шляпа» на любом конечном отрезке можно сколь угодно точно в равномерной метрике приблизить линейной комбинацией в точности двух квадратичных экспонент. Поэтому на фиксированном отрезке аппроксимация квадратичными экспонентами сопоставима по эффективности с аппроксимацией вейвлетом «мексиканская шляпа». Отметим, что аппроксимация квадратичными экспонентами строится неоднозначно и допускает бесконечное количество вариантов и, вообще, имеет ряд общих черт с представлением фреймами [10, § 1.8]. Что касается указанной неоднозначности, то для инженерных приложений она оказывается полезной [10, § 1.8].

Касательно работ других авторов, посвященных аппроксимации функций (непрерывных, гладких, полиномиальных и т. д.) квадратичными экспонентами (функциями Гаусса), отметим следующее. Соответствующая интерполяция производилась, главным образом, на дискретной сетке с равномерным шагом на всей числовой оси [11–13], либо на конечном множестве отрезка числовой оси. Соответствующие алгоритмы аппроксимации называют *сеточными (grid)* [14–16]. Исследовались также и многомерные аналоги [17]. В основном, внимание исследователей концентрировалось на оценке погрешности аппроксимаций [18–21]. Эффективность сеточных алгоритмов аппроксимации функциями Гаусса обосновывалась, например, в [22]. Помимо простой, равномерной сетки, использовались также и многоуровневые конструкции [23]. Параметрами аппроксимации выступали обычно весовые коэффициенты функций Гаусса в соответствующих линейных комбинациях; в работе [17] исследовался вопрос о наилучшем выборе параметров формы. Вообще, функции Гаусса являются частным случаем радиальных базисных функций (*radial basis functions*) [24].

Однако построить *монотонную* аппроксимацию с помощью сдвигов и сжатий квадратичных экспонент (пока, по крайней мере) не удалось. Эффективность использования для этой цели интеграла Лапласа основана на том обстоятельстве, что для аппроксимации непрерывной неубывающей функции можно использовать интеграл с переменным верхним пределом от квадрата непрерывной функции, а ее, в свою очередь, можно аппроксимировать сдвигами и сжатиями квадратичных экспонент; подробнее см. в [4].

По сравнению с применением для аппроксимации непосредственно квадратичных экспонент, здесь можно усмотреть лишь некоторое неудобство, связанное с тем, что интеграл Лапласа не выражается в элементарных функциях. Но с практической точки зрения, при использовании любого математического пакета, квадратичная экспонента (так же, как и интеграл Лапласа) вычисляется все равно приближенно. Кроме того, существуют математические пакеты (в частности, MATLAB), в которых реализована *функция ошибки (error function)*:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ясно, что интеграл Лапласа

$$\widehat{\Phi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}).$$

Аналогично функции Гаусса, интеграл Лапласа обладает свойством локализации: достаточно знать его значения на $[0; 5]$, поскольку это нечетная функция, а при $x > 5$ значения ее практически не отличаются от $\frac{1}{2}$; на $[0; 5]$ из математической статистики известны таблицы

значений, которые можно использовать в готовом виде, не тратя времени на вычисления (в точках между узлами сетки можно использовать линейную интерполяцию). Наконец, в работе [4] было показано, что интеграл Лапласа можно с высокой степенью точности аппроксимировать суммой линейной функции и линейной комбинации двух-трех квадратичных экспонент и были указаны конкретные значения ее коэффициентов. Там же изучался также вопрос об устойчивости свойства монотонности функции $Q(x)$ при замене в ней интеграла Лапласа его аппроксимацией.

Сделаем краткий обзор по работам, посвященным аппроксимации монотонных функций. По-видимому, впервые эта проблема была поставлена в [25, 26]. В [27] был получен результат об аппроксимации непрерывной возрастающей функции возрастающими многочленами. В дальнейшем этот результат уточнялся, в основном, на случай монотонных функций различной степени гладкости, см., например, [28–30]. Вопрос о достижимости точности аппроксимации непрерывной неубывающей функции $f(x)$ неубывающим многочленом $\mathcal{P}_n(x)$ на уровне порядка $\omega_k(f, n^{-1})$, $k = 2, 3, 4$, где ω_k — модуль непрерывности порядка k , исследовался в [31]. Стоит отметить, что процедура построения аппроксимирующих многочленов была достаточно сложной и многоэтапной. Аппроксимация достаточно гладких s -монотонных функций изучалась в работе [32]. Функция $f: I = (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ называется s -монотонной для целого $s \geq 0$, если $\Delta_\tau^s f(t) \geq 0$ для всех $t \in I$, $\tau > 0$. Здесь $\Delta_\tau^s f(t) = \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} C_s^k f(t + k\tau)$ при $(t, t + s\tau) \subset I$ (иначе равная нулю) — s -я конечная разность с шагом τ . В [33] изучалась проблема L_1 -аппроксимации монотонных функций d переменных по n вычислениям функции методом Монте–Карло.

Упомянутые работы [27–33] носили, между тем, чисто теоретический характер; результаты численных экспериментов в них представлены не были (строго говоря, в [33] есть один пример с численными расчетами, но, как там сказано, он имеет лишь теоретическое значение).

Подчеркнем, что автора проблема аппроксимации функций интересует с точки зрения приближения бесконечномерных задач оптимизации конечномерными. В такой ситуации значения искомой функции в контрольных точках нам неизвестны, поскольку заранее неизвестна сама функция (и в этом состоит принципиальное отличие от обычной задачи аппроксимации). В этом случае неизвестные параметры аппроксимации определяются путем минимизации значения целевого функционала, вычисляемого на конечномерном множестве аппроксимаций Ω , если они являются допустимыми по смыслу задачи либо на суперпозициях, содержащих функции класса Ω и принимающих допустимые значения. Указанное принципиальное отличие следует учитывать при сравнении различных подходов к аппроксимации — подробнее об этом уже было сказано в [8]: здесь главное — это достижение приемлемой точности аппроксимации произвольной функции уже при небольшом количестве параметров. Как показано в [7, 8], (там же см. результаты численных экспериментов), достаточно эффективными (в указанном смысле) оказываются аппроксимации с помощью квадратичных экспонент. Однако вопрос сохранения монотонности аппроксимации при использовании квадратичных экспонент остается на данный момент неисследованной проблемой (во всяком случае, попытки автора продвинуться в этом направлении остаются пока безуспешными).

§ 1. Монотонная аппроксимация монотонных непрерывных функций сдвигами и сжатиями интеграла Лапласа

Для теории вероятностей и математической статистики важное значение имеет так называемый *интеграл Лапласа*

$$\widehat{\Phi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi_0(x), \quad \Phi_0(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Функцию $\Phi_0(x)$ мы, соответственно, называем *функцией Лапласа*. Эта функция далее будет играть существенную роль в наших построениях.

Далее, называя непрерывную функцию возрастающей на отрезке, мы имеем в виду, что она допускает продолжение до непрерывной строго возрастающей функции на некотором объемлющем интервале. Называя гладкую функцию возрастающей на отрезке, мы имеем в виду, что ее производная строго положительна на всем отрезке. В работе [4] были установлены, в частности, следующие результаты.

Теорема 1.1. Пусть $b > 0$, $\Psi \in C^1[-b; b]$ — неубывающая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константа C и непрерывная функция $r(t)$, $t \in [-b; b]$, а также параметры $\nu \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ такие, что

$$\Psi(x) = C + Q(x) + R(x), \quad R(x) = \int_0^x r(t) dt, \quad |r(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [-b; b],$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j^2 \gamma_j \Phi_0\left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j/2}\right) + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \gamma_{ij} e^{\sigma_{ij}} \Phi_0\left(\frac{x - \beta_{ij}}{\gamma_{ij}}\right), \quad (1.1)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_i \gamma_j^2 + \beta_j \gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \gamma_j^2}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\gamma_i \gamma_j}{\sqrt{2(\gamma_i^2 + \gamma_j^2)}}, \quad \sigma_{ij} = -\frac{(\beta_i - \beta_j)^2}{\gamma_i^2 + \gamma_j^2}. \quad (1.2)$$

Всякая функция вида (1.1) не убывает на \mathbb{R} . В случае возрастающей функции $\Psi(x)$ функцию $Q(x)$ тоже можно считать возрастающей на $[-b; b]$ (при некотором наборе параметров).

Теорема 1.2. Пусть $b > 0$, $\Psi \in C[-b; b]$ — возрастающая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константа C и непрерывная функция $R(x)$, а также параметры $\nu \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ такие, что

$$\Psi(x) = C + Q(x) + R(x),$$

где функция $Q(x)$ имеет вид (1.1) с параметрами (1.2) и является возрастающей на $[-b; b]$, $|R(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in [-b; b]$. Всякая функция вида (1.1) не убывает на \mathbb{R} .

Как видно из доказательства теоремы 1.1, выражение (1.1) можно заменить следующим:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j^2 \gamma_j \left[\Phi_0\left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j/2}\right) + \Phi_0\left(\frac{\beta_j}{\gamma_j/2}\right) \right] +$$

$$+ 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \gamma_{ij} e^{\sigma_{ij}} \left[\Phi_0\left(\frac{x - \beta_{ij}}{\gamma_{ij}}\right) + \Phi_0\left(\frac{\beta_{ij}}{\gamma_{ij}}\right) \right] = \quad (1.3)$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \exp\left[-\frac{(t - \beta_j)^2}{\gamma_j^2}\right] \right)^2 dt.$$

В этом случае $C = \Psi(0)$. Выражение (1.3) более удобно, если предполагается использовать производные по параметрам. Примем обозначения

$$b_{ij}(x) = \exp \left[-\frac{(x - \beta_{ij})^2}{2\gamma_{ij}^2} \right], \quad c_{ij}(x) = \gamma_{ij}^2 b_{ij}(x) [-(x - \beta_{ij}) + 2(\beta_j - \beta_{ij})],$$

$$a_{ij}(x) = \int_0^x b_{ij}(t) dt = \gamma_{ij} \left[\Phi_0 \left(\frac{x - \beta_{ij}}{\gamma_{ij}} \right) + \Phi_0 \left(\frac{\beta_{ij}}{\gamma_{ij}} \right) \right].$$

Нетрудно заметить, что $\beta_{ii} = \beta_i$, $\gamma_{ii} = \gamma_i/2$, $\sigma_{ii} = 0$, откуда

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{\nu} \alpha_i \alpha_j e^{\sigma_{ij}} a_{ij}(x).$$

Следующее утверждение необходимо при использовании методов первого порядка для минимизации квадратичной невязки между аппроксимацией $Q(x)$ вида (1.3) и аппроксимируемой функцией.

Т е о р е м а 1.3. Для функции (1.3) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} Q(x) = 2 \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i e^{\sigma_{ij}} a_{ij}(x), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} Q(x) = -\frac{4\alpha_j}{\gamma_j^2} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i e^{\sigma_{ij}} \left\{ (\beta_j - \beta_{ij}) a_{ij}(x) + \gamma_{ij}^2 [b_{ij}(x) - b_{ij}(0)] \right\}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_j} Q(x) = \frac{4\alpha_j}{\gamma_j^3} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i e^{\sigma_{ij}} \left\{ c_{ij}(x) - c_{ij}(0) + [\gamma_{ij}^2 + (\beta_{ij} - \beta_j)^2] a_{ij}(x) \right\}. \quad (1.6)$$

Теоремы 1.1–1.3 являются теоретической основой алгоритма построения монотонной аппроксимации непрерывных и кусочно непрерывных монотонных функций и состоящего в минимизации квадратичной невязки (по заданному набору контрольных точек) между шаблоном вида (1.1) или, что эквивалентно, вида (1.3) и аппроксимируемой функцией. При его практической реализации на компьютере возникает вопрос о конкретном способе вычисления значений интеграла Лапласа в формулах (1.1) или (1.3). Эти способы подробно обсуждаются в [4].

§ 2. Монотонная аппроксимация монотонных кусочно непрерывных функций сдвигами и сжатиями интеграла Лапласа

Т е о р е м а 2.1. Пусть $b > 0$, $\Psi(\cdot)$ — кусочно постоянная неубывающая функция на $[-b; b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константа C , измеримое подмножество $\Pi \subset [-b; b]$ (совокупность подотрезков), $\text{mes } \Pi' < \varepsilon$, $\Pi' = [-b; b] \setminus \Pi$, и кусочно непрерывная функция $R(x)$, а также параметры $\nu \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ такие, что

$$\Psi(x) = C + Q(x) + R(x),$$

где функция $Q(x)$ имеет вид (1.1) с параметрами (1.2) и является возрастающей на $[-b; b]$, $|R(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \Pi$, причем

$$\sup_{x \in \Pi'} \{C + Q(x)\} \leq \varepsilon + \sup_{x \in \Pi'} \Psi(x), \quad \inf_{x \in \Pi'} \{C + Q(x)\} \geq -\varepsilon + \inf_{x \in \Pi'} \Psi(x).$$

Всякая функция вида (1.1) не убывает на \mathbb{R} .

Доказательство. Пусть график функции $\Psi(x)$ на $[-b; b]$ представляется ступенчатой ломаной $M_1M_2 \dots M_k$, где отрезок M_1M_2 направлен горизонтально, отрезок M_2M_3 — вертикально, M_3M_4 — снова горизонтально и т. д. Будем считать, что точка M_i имеет координаты $(t_i; f_i)$, $i = \overline{1, k}$. Рассмотрим начальный «угловой сегмент» $M_1M_2M_3$. Для пары положительных параметров $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ определим точки M_i^δ , $i = \overline{1, 3}$, следующим образом:

$$M_1^\delta = (t_1; f_1 - \delta_2), \quad M_2^\delta = (t_2 - \delta_1; f_2 + \delta_2), \quad M_3^\delta = (t_3; f_3 - \delta_2);$$

здесь $f_2 = f_1$, так как отрезок M_1M_2 горизонтальный; $t_3 = t_2$, так как отрезок M_2M_3 вертикальный. Производя аналогичное построение для последующих «угловых сегментов», получаем в результате ломаную δ -аппроксимацию $M_1^\delta M_2^\delta \dots M_k^\delta$ ломаной $M_1M_2 \dots M_k$. Из построения очевидно, что функция, соответствующая ломаной $M_1^\delta M_2^\delta \dots M_k^\delta$, обозначим ее $\Psi_\delta(x)$, будет непрерывная и строго возрастающая (но негладкая), поэтому она подпадает под ситуацию, описанную в теореме 1.2. Поэтому непосредственно по теореме 1.2 получаем представление:

$$\Psi_\delta(x) = C + Q(x) + R_\delta(x), \quad |R_\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [-b; b].$$

Положим

$$\Pi'_\delta = \bigcup_{j=1,2,\dots} (t_{2j} - \delta_1; t_{2j}), \quad \Pi_\delta = [t_1; t_k] \setminus \Pi'_\delta.$$

По построению,

$$\text{mes } \Pi'_\delta \leq \left(1 + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right) \delta_1 \equiv \kappa \delta_1, \quad \sup_{x \in \Pi_\delta} |\Psi_\delta(x) - \Psi(x)| \leq \delta_2.$$

Теперь, пользуясь произволом в выборе параметров δ , для завершения доказательства остается лишь потребовать, чтобы

$$\kappa \delta_1 < \varepsilon, \quad \delta_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

и положить:

$$R(x) = \Psi(x) - \Psi_\delta(x) + R_\delta(x), \quad \Pi = \Pi_\delta. \quad \square$$

Непосредственно из теоремы 2.1 вытекает

С л е д с т в и е 2.1. Пусть $b > 0$, $p \in [1; +\infty)$; $\Psi(\cdot)$ — кусочно постоянная неубывающая функция на $[-b; b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константа C и кусочно непрерывная функция $R(x)$, а также параметры $\nu \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ такие, что

$$\Psi(x) = C + Q(x) + R(x),$$

где функция $Q(x)$ имеет вид (1.1) с параметрами (1.2) и является возрастающей на $[-b; b]$, $\|R(\cdot)\|_{L_p[-b; b]} \leq \varepsilon$. Всякая функция вида (1.1) не убывает на \mathbb{R} .

Л е м м а 2.1. Всякая кусочно непрерывная неубывающая функция на произвольном отрезке $[a; b]$, за исключением (конечного) множества точек разрыва (I рода) с любой степенью точности равномерно аппроксимируется неубывающей кусочно постоянной функцией.

Доказательство. Мы предполагаем, что функция $\Psi(x)$ непрерывна на $[a; b]$ всюду, за исключением конечного числа точек разрыва I рода. Пусть $(a_1; b_1) \subset [a; b]$ — произвольно фиксированный промежуток непрерывности функции $\Psi(x)$. Продолжим функцию $\Psi(x)$ по непрерывности с интервала $(a_1; b_1)$ на отрезок $[a_1; b_1]$. Пользуясь теоремой Кантора, выберем разбиение

$$a_1 = s_1 < s_2 < \dots < s_k = b_1$$

так, чтобы

$$\max_{i=\overline{1, k-1}} \max_{x, y \in [s_i; s_{i+1}]} |\Psi(x) - \Psi(y)| < \varepsilon.$$

Положим

$$\Psi_\varepsilon(x) = \{\Psi(s_i), x \in [s_i; s_{i+1}]; i = \overline{1, k-1}\}.$$

По построению, функция $\Psi_\varepsilon(x)$ кусочно постоянная, неубывающая и имеет место оценка

$$\sup_{x \in [a_1; b_1]} |\Psi_\varepsilon(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Аналогичное построение можно провести и на всех остальных промежутках непрерывности функции $\Psi(x)$. Тем самым функция $\Psi(x)$ равномерно аппроксимируется с точностью ε на всем отрезке $[a; b]$, с точностью до конечного множества точек разрыва, кусочно постоянной неубывающей функцией $\Psi_\varepsilon(x)$. \square

Т е о р е м а 2.2. Пусть $b > 0$, $\Psi(\cdot)$ — кусочно непрерывная неубывающая функция на $[-b; b]$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом леммы 2.1, нужно лишь воспользоваться теоремой 2.1 (как видно из ее доказательства, значения функции в точках разрыва не играют роли, поскольку эти точки включаются в множество Π'). \square

Непосредственно из теоремы 2.2 вытекает

С л е д с т в и е 2.2. Пусть $b > 0$, $p \in [1; +\infty)$; $\Psi(\cdot)$ — кусочно непрерывная неубывающая функция на $[-b; b]$. Тогда справедливо утверждение следствия 2.1.

Далее рассмотрим также альтернативный способ аппроксимации, не использующий конструкции работы [4].

Т е о р е м а 2.3. Пусть $\Psi(\cdot)$ — кусочно постоянная неубывающая функция вида

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m_1, \\ h_i, & x \in (m_i; m_{i+1}], \quad i = \overline{1, k-1}, \\ h_k, & x > m_k, \end{cases}$$

$$0 < h_i < h_{i+1}, \quad m_i < m_{i+1}, \quad i = \overline{1, k-1};$$

$$Q_\gamma(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - m_i}{\gamma}\right), \quad \gamma > 0, \quad \alpha_1 = h_1, \quad \alpha_i = h_i - h_{i-1}, \quad i = \overline{2, k}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и соответствующие множества

$$\Pi'_\delta = \bigcup_{i=1}^k (m_i - \delta; m_i + \delta), \quad \text{mes } \Pi'_\delta < \varepsilon, \quad \Pi_\delta = \mathbb{R} \setminus \Pi'_\delta,$$

такие, что

$$\Psi(x) = C + Q_\gamma(x) + R(x), \quad C = \frac{h_k}{2},$$

где $|R(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \Pi_\delta$, причем

$$\sup_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \leq h_k = \sup_{x \in \Pi'_\delta} \Psi(x), \quad \inf_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \geq 0 = \inf_{x \in \Pi'_\delta} \Psi(x).$$

Всякая функция вида $Q_\gamma(x)$ при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, $\gamma > 0$ возрастает на \mathbb{R} .

Доказательство. Монотонность функции $Q_\gamma(x)$ очевидна:

$$Q'_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \exp\left(-\frac{t_i^2(x)}{2}\right) > 0, \quad t_i(x) = \frac{x - m_i}{\gamma}.$$

Как известно из таблицы значений и свойств интеграла Лапласа,

$$\widehat{\Phi}_0(3.09) \approx 0.499, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \widehat{\Phi}_0(x) = 0.5,$$

причем функция $\widehat{\Phi}_0(x)$ строго возрастает и нечетна. Отсюда ясно, что найдется убывающая функция $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_0(x) &= \frac{1}{2} - R_0(x), \quad 0 < h_k R_0(x) < \frac{\varepsilon}{k} \quad \forall x \geq \sigma(\varepsilon); \\ \widehat{\Phi}_0(x) &= -\frac{1}{2} + R_0(-x), \quad \forall x \leq -\sigma(\varepsilon). \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство

$$-\sigma(\varepsilon) < \frac{x - m_i}{\gamma} < \sigma(\varepsilon). \quad (2.1)$$

Оно равносильно условию

$$x \in (m_i - \delta_\varepsilon; m_i + \delta_\varepsilon), \quad \delta_\varepsilon = \gamma\sigma(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Зафиксировав произвольно $\varepsilon > 0$, выберем число $\gamma > 0$ настолько малым, чтобы

$$2k\gamma\sigma(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \delta_\varepsilon$. Получаем, что $\text{mes } \Pi'_\delta < \varepsilon$. По построению и согласно (2.1), (2.2), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - m_i}{\gamma}\right) &= 1 - R_0(t_i(x)), \\ 0 < h_k R_0(t_i(x)) < \frac{\varepsilon}{k}, \quad \forall x \in [m_i; +\infty) \cap \Pi_\delta &= S_i^+; \\ \frac{1}{2} + \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - m_i}{\gamma}\right) &= R_0(-t_i(x)), \quad \forall x \in (-\infty; m_i] \cap \Pi_\delta &= S_i^-. \end{aligned}$$

Очевидно, что имеют место вложения:

$$S_1^+ \supset S_2^+ \supset \dots \supset S_k^+, \quad S_1^- \subset S_2^- \subset \dots \subset S_k^-.$$

По построению, для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$C + Q_\gamma(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left\{ \frac{1}{2} + \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - m_i}{\gamma}\right) \right\} = W(x) + R(x),$$

где

$$R(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\pm R_0(\mp t_i(x)) \right)$$

(здесь знаки \pm, \mp берутся в зависимости от того, слева или справа от m_i расположена точка x);

$$|R(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \Pi_\delta, \quad \sup_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \leq h_k, \quad \inf_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \geq 0;$$

$$W(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i(x), \quad w_i(x) = \begin{cases} 0, & x < m_i, \\ 1, & x > m_i, \\ 0.5, & x = m_i. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что $W(x) = \Psi(x)$ для всех $x \neq m_i, i = \overline{1, k}$. □

З а м е ч а н и е 1. Справедливость теоремы 2.3 легко подтверждается численными экспериментами. Например, при

$$m = (1, 3, 8), \quad h = (0.5, 1.5, 5), \quad \varepsilon = 10^{-20}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{9}$$

(в соответствии с известным из математической статистики правилом «трех σ ») графики функции $\Psi(x)$ и ее аппроксимации визуально никак не различаются.

З а м е ч а н и е 2. Если сравнить выражение $Q_\gamma(x)$ и функцию (1.1), то можно заметить, что функцию $Q_\gamma(x)$ можно аппроксимировать выражением (1.1) при $\nu = k+1$. Действительно, если в (1.1) параметры $\gamma_i = \gamma$, где $\gamma \rightarrow +0$ (как видно из доказательства теоремы 2.3, это ничему не противоречит), то получаем:

$$\gamma_{ij} = \frac{\gamma^2}{2\gamma} = \frac{\gamma}{2} \rightarrow +0, \quad \sigma_{ij} = -\frac{(\beta_i - \beta_j)^2}{2\gamma^2} = -\frac{(m_i - m_j)^2}{2\gamma^2} \rightarrow -\infty.$$

Отсюда ясно, что сумма $\sum_{i < j}$ в формуле (1.1) будет сколь угодно мала. «Лишнее» слагаемое ($\nu = k+1$) может понадобиться для согласования констант C и дополнительной коррекции.

Из теоремы 2.3 и леммы 2.1 легко видеть, что справедлива

Т е о р е м а 2.4. Пусть $\Psi(\cdot)$ — непостоянная кусочно непрерывная неубывающая функция на $[a; b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся параметры $\nu \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ (можно считать, что все γ_i одинаковы и достаточно малы) и число $\delta > 0$, а также соответствующие множества

$$\Pi'_\delta \subset [a; b], \quad \text{mes } \Pi'_\delta < \varepsilon, \quad \Pi_\delta = [a; b] \setminus \Pi'_\delta,$$

такие, что

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= C + Q(x) + R(x), \quad C \in \mathbb{R}, \\ Q(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \widehat{\Phi}_0 \left(\frac{x - \beta_i}{\gamma_i} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $|R(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \Pi_\delta$, причем

$$\sup_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q(x)\} \leq \varepsilon + \sup_{x \in \Pi'_\delta} \Psi(x), \quad \inf_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q(x)\} \geq -\varepsilon + \inf_{x \in \Pi'_\delta} \Psi(x).$$

Всякая функция вида (2.3) возрастает на \mathbb{R} .

Формулу (2.3), с учетом положительности коэффициентов α_i , γ_i , можно переписать в эквивалентном виде:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \widehat{\Phi}_0 \left(\frac{x - \beta_i}{\gamma_i^2} \right). \quad (2.4)$$

Выражения для производных по параметрам получаются очевидным образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} Q(x) &= 2\alpha_j \widehat{\Phi}_0 \left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \beta_j} Q(x) &= -\frac{\alpha_j^2}{\gamma_j^2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j^2} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_j} Q(x) &= 2 \frac{x - \beta_j}{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial \beta_j} Q(x). \end{aligned}$$

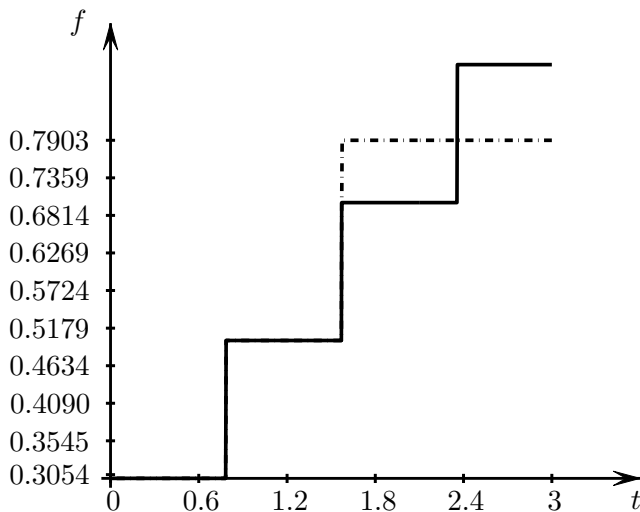


Рис. 1. Тест № 1, $\nu = 3$

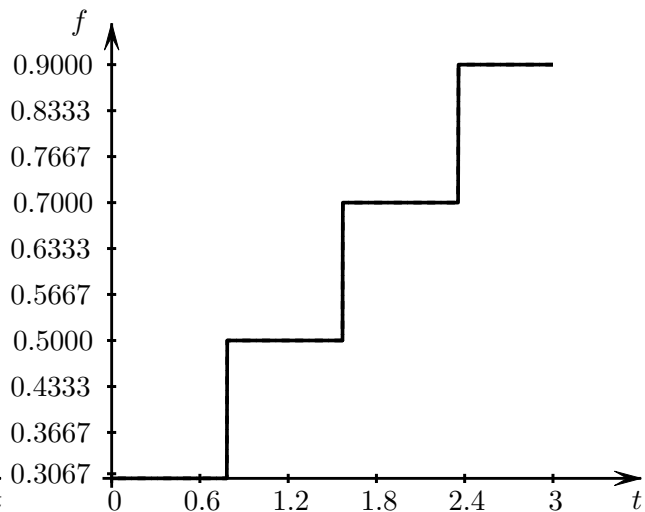


Рис. 2. Тест № 1, $\nu = 4$

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 2.2 и 2.4 обосновывают лишь принципиальную возможность сколь угодно точной аппроксимации (в указанном в них смысле) кусочно непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа. При этом обоснование проводится посредством аппроксимации кусочно постоянными функциями (лемма 2.1). Однако гибкость аппроксимации с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа существенно выше, чем у аппроксимации кусочно постоянными функциями: за счет варьирования параметров α и γ можно как бы «искривлять ступени» всевозможными способами. А за счет этого эффективность аппроксимации существенно повышается. Это обстоятельство наглядно проявляется в численных экспериментах — см., например, тест № 3 и рис. 8 в следующем разделе.

§ 3. Результаты численных экспериментов

Для неубывающих непрерывных функций $f(t)$, $t \in [a; b]$, различного вида в работе [4] мы уже строили аппроксимацию по формуле (1.3), $C = f(0)$, при значениях $\nu \geq 2$ — до достижения достаточно высокой точности. Параметры $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ определялись, исходя из минимизации квадратичной невязки по тысяче контрольных точек. Вместо интеграла Лапласа использовалась его аппроксимация в рамках подхода IV (при $\mu = 2$) из [4]. Нарушение монотонности аппроксимации (весьма незначительное) наблюдалось при этом не более, чем в одной-двух контрольных точках. При использовании функции $\text{erf}(t)$ для вычисления интеграла Лапласа нарушений монотонности не наблюдалось. Для оценки качества аппроксимации использовались следующие показатели: δ — значение квадратичной невязки, δ_{\max} — модуль максимального отклонения аппроксимации от аппроксимируемой функции по набору контрольных точек; $\omega = \min_{i=1, n} \{Q(x_i) - Q(x_{i-1})\}$ — сеточный показатель монотонности. Значения этих показателей соответствовали по порядку малости тем, которые мы выявили в следующем далее тесте, при тех же соглашениях, что были заявлены выше.

Тест № 1. Монотонная кусочно постоянная функция «лесенка», см. рис. 1, $t \in [0; 3]$. При $\nu = 3$: $\delta = 4.7155$, $\delta_{\max} = 0.10966$, $\omega = -2.2864e - 6$ — нарушение монотонности лишь в двух контрольных точках с индексами 261, 263; $\alpha = (-15.2687, -31.3521, 18.7579)$, $\beta = (0.7845, 1.5719, 42.6942)$, $\gamma = (0.00068449, -0.00023567, -0.3017)$. При использовании для аппроксимации интеграла Лапласа подхода IV при $\mu = 3$ нарушение монотонности устраняется: $\delta = 4.7155$, $\delta_{\max} = 0.10966$, $\omega = 0$. Графики см. на рис. 1.

При $\nu = 4$: $\delta = 1.9874e - 10$, $\delta_{\max} = 1.3528e - 5$, $\omega = -2.3774e - 6$ — нарушение моно-

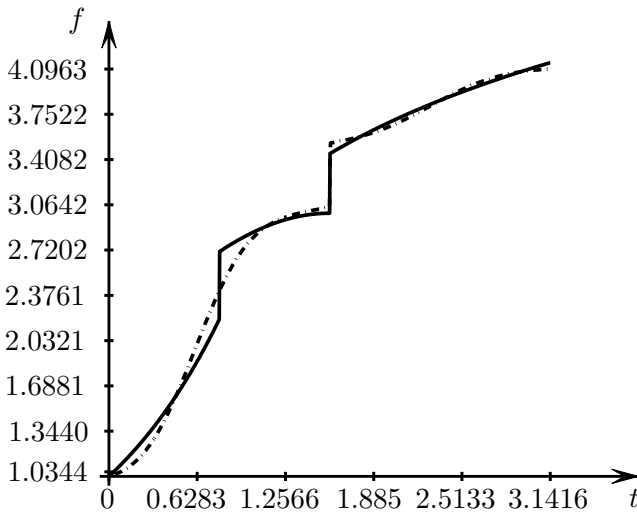


Рис. 3. Тест № 2, $\nu = 3$

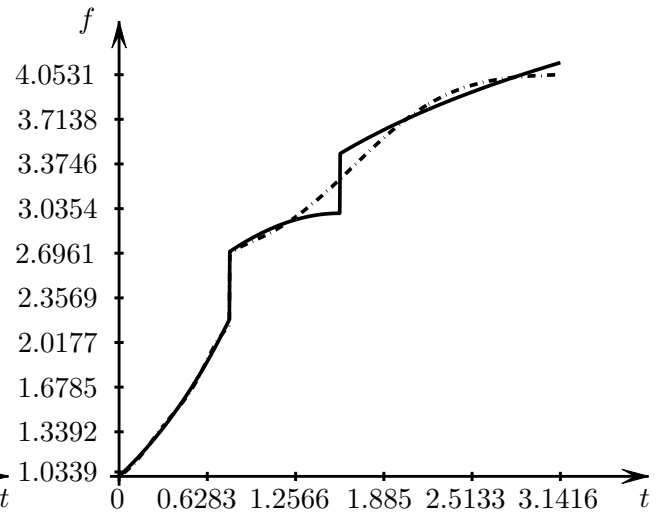


Рис. 4. Тест № 2, $\nu = 4$

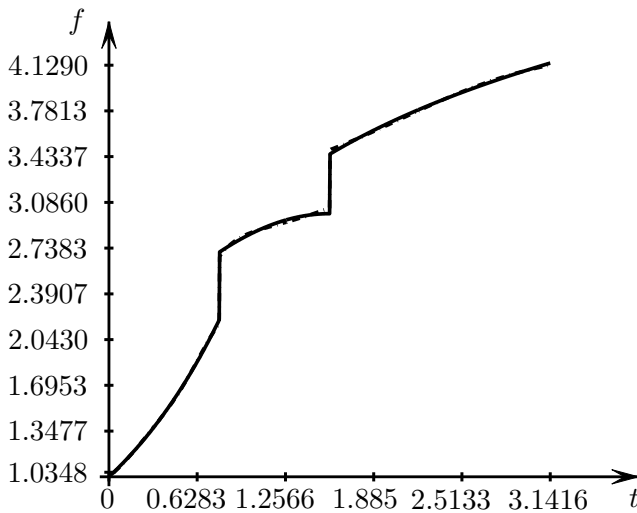


Рис. 5. Тест № 2, $\nu = 5$

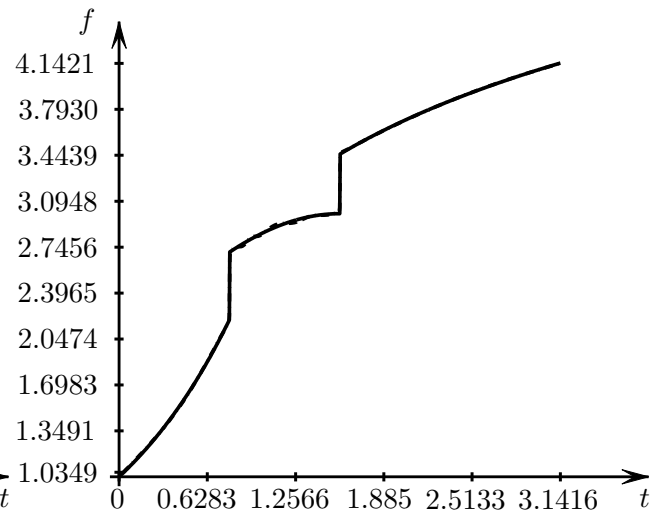


Рис. 6. Тест № 2, $\nu = 6$

тонности лишь в двух контрольных точках с индексами 261, 263;
 $\alpha = (-15.2687, -31.3521, 18.7579, -14.4511)$, $\beta = (0.78451, 1.5717, 42.6942, 2.3565)$,
 $\gamma = (0.00068449, -0.00016234, -0.3017, 0.00076413)$. При использовании для аппроксимации интеграла Лапласа подхода IV при $\mu = 3$ нарушение монотонности устраняется: $\delta = 7.4459e - 10$, $\delta_{\max} = 2.3119e - 5$, $\omega = 0$. Графики см. на рис. 2.

В обоих случаях нарушения монотонности аппроксимации при использовании функции $\operatorname{erf}(t)$ для вычисления интеграла Лапласа не наблюдалось.

Полученный для случая $\nu = 4$ результат согласуется с теоремой 2.1 и замечанием 2. В данном случае множество Π' оказывается настолько мало, что визуально практически неразличимо.

Отметим, что в работе [6] приводились численные результаты аппроксимации аналогичной тестовой функции с помощью линейных комбинаций сдвигов и сжатий функции Гаусса (непосредственно, то есть без стремления к соблюдению монотонности). Из сравнения результатов численных экспериментов здесь и в работе [6] видно, что качество аппроксимации улучшилось, и притом существенно (и это при том, что в [6] использовалось количество слагаемых $\nu = 11$). И это не случайно, так как соблюдение требования монотонности ап-

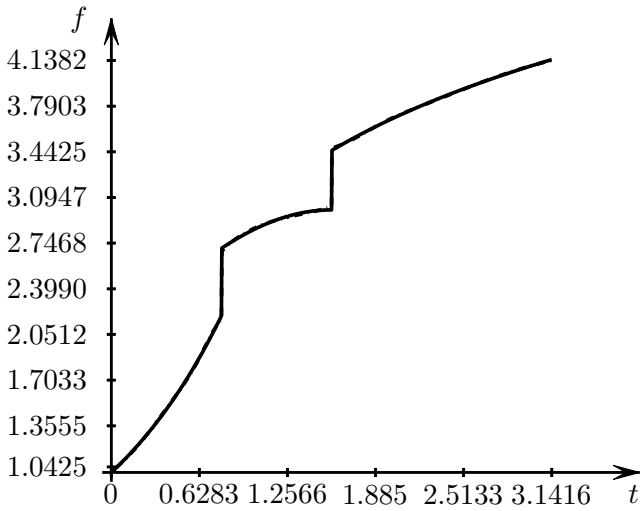


Рис. 7. Тест № 3, $\nu = 6$

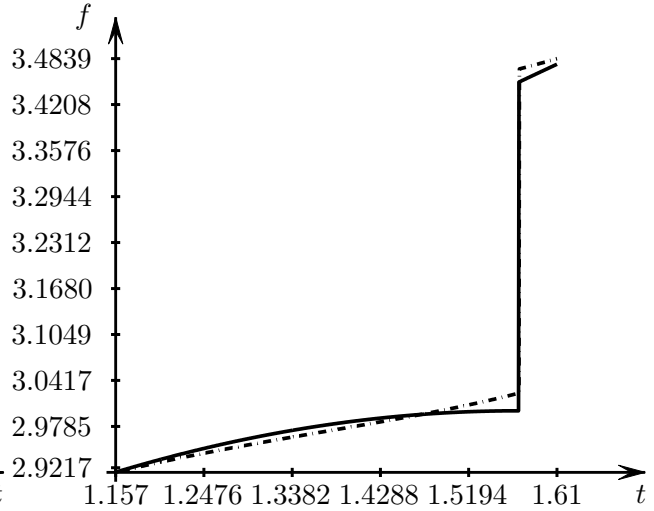


Рис. 8. Тест № 3, $\nu = 6$, фрагмент

проксимирующей функции отсекает нежелательные отклонения от цели в процессе минимизации невязки. Это существенно, поскольку задача минимизации квадратичной невязки, как известно, является некорректной.

Тест № 2. Монотонная кусочно непрерывная функция:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0; \pi/4], \\ 2 + \sin x, & x \in (\pi/4; \pi/2], \\ 3 + \ln x, & x \in (\pi/2; \pi], \end{cases}$$

см. рис. 3, $t \in [0; \pi]$.

При $\nu = 3$: $\delta = 5.3919$, $\delta_{\max} = 0.29385$, $\omega = 0.00018099$ — нарушений монотонности не обнаружено; $\alpha = (1.6379, 15.0596, 0.76325)$, $\beta = (0.60741, 1.5732, 2.2918)$, $\gamma = (0.5858, 0.0015827, 0.78867)$. Графики см. на рис. 3.

При $\nu = 4$: $\delta = 4.7165$, $\delta_{\max} = 0.25748$, $\omega = 8.3044e - 5$ — нарушений монотонности не обнаружено; $\alpha = (1.0252, 15.9767, 0.82105, 1.0131)$, $\beta = (0.20667, 0.7864, 0.63524, 1.6702)$, $\gamma = (0.35551, 0.0014607, 0.16739, 1.0864)$. Графики см. на рис. 4.

При $\nu = 5$: $\delta = 0.10834$, $\delta_{\max} = 0.045046$, $\omega = 0.00065629$ — нарушений монотонности не обнаружено; $\alpha = (0.94084, 14.3103, 0.69761, -15.6664, 0.70442)$, $\beta = (0.19242, 0.78663, 0.68858, 1.5729, 2.0865)$, $\gamma = (0.50203, 0.0016086, 0.24266, 0.0016185, 1.6018)$.

Графики см. на рис. 5.

При $\nu = 6$: $\delta = 0.033861$, $\delta_{\max} = 0.047201$, $\omega = -8.8241e - 7$ — нарушение монотонности лишь в трех контрольных точках с индексами 309, 379, 457, при использовании функции erf для вычисления интеграла Лапласа нарушение монотонности устраняется; $\alpha = (11.9579, 2.1405, 0.49108, 12.4692, -2.4679, -1.5991)$, $\beta = (1.5725, -8.4486, 0.7352, 0.78688, 0.90915, 1.3033)$, $\gamma = (0.0021266, 9.9361, -0.401, 0.002069, -0.070971, -0.15993)$.

Графики см. на рис. 6.

В тестах 1 и 2 использовался способ аппроксимации работы [4], то есть основанный на теоремах 2.1, 2.2. В следующем тесте использовался новый способ аппроксимации, то есть основанный на представлении (2.4); интеграл Лапласа вычислялся с помощью функции erf .

Тест № 3. Монотонная кусочно непрерывная функция из теста № 2.

При $\nu = 6$: $\delta = 0.033517$, $\delta_{\max} = 0.025981$, $\omega = 0.00072077$ — нарушений монотонности не обнаружено; $\alpha = (0.66741, 0.87779, 1.1897, 0.71582, 0.43097, 0.34604)$,
 $\beta = (1.5713, 2.3957, 0.41258, 0.7869, 0.67243, 1.8009)$,
 $\gamma = (0.0032, 0.85156, 0.62094, 0.0032, 0.27984, 0.39359)$,
 $C = 2.5305$. Графики см. на рис. 7, 8.

Из сравнения тестов 3 и 2 видно, что новый способ аппроксимации дает ничуть не худший результат, чем прежний способ [4].

Отметим, наконец, что в численных экспериментах здесь, так же, как и в работе [4], для минимизации невязки мы использовали численные методы первого порядка (в основном, метод Левенберга–Марквардта и метод DFP — в зависимости от того, какой из них показывал лучшие результаты, с одномерным поиском по методу Moré–Thuente [34]). Таким образом, требовалось вычисление производных невязки по параметрам аппроксимации, и здесь использовались соответствующие формулы — см. теорему 1.3 и формулы производных для представления (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1951. Vol. 22. Issue 3. P. 400–407. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729586>
2. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения задач астрофизики. М.: Наука, 1978. <https://zbmath.org/0495.35077>
3. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985.
4. Чернов А. В. О равномерной монотонной аппроксимации непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022. Т. 62. № 4. С. 580–596. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf11383>
5. Чернов А. В. Об использовании квадратичных экспонент с варьируемыми параметрами для аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 267–282. <https://doi.org/10.20537/vm170210>
6. Чернов А. В. О применении квадратичных экспонент для дискретизации задач оптимального управления // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 558–575. <https://doi.org/10.20537/vm170406>
7. Чернов А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // *Автоматика и телемеханика*. 2019. № 6. С. 51–69. <https://doi.org/10.1134/S0005231019060035>
8. Чернов А. В. О применении функций Гаусса в сочетании с теоремой Колмогорова для аппроксимации функций многих переменных // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020. Т. 60. № 5. С. 784–801. <https://doi.org/10.31857/S0044466920050075>
9. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. <https://zbmath.org/?q=an:1006.42030>
10. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006. <https://zbmath.org/?q=an:1206.42001>
11. Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 1996. Vol. 16. Issue 1. P. 13–29. <https://doi.org/10.1093/imanum/16.1.13>
12. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data // *Journal of Approximation Theory*. 2007. Vol. 145. Issue 2. P. 141–170. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003>
13. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*. Providence: AMS, 2007. <https://zbmath.org/1120.41013>

14. Baxter B. J. C., Sivakumar N. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadratics // *Journal of Approximation Theory*. 1996. Vol. 87. Issue 1. P. 36–59. <https://doi.org/10.1006/jath.1996.0091>
15. Riemenschneider S. D., Sivakumar N. On cardinal interpolation by Gaussian radial-basis functions: Properties of fundamental functions and estimates for Lebesgue constants // *Journal d'Analyse Mathématique*. 1999. Vol. 79. Issue 1. P. 33–61. <https://doi.org/10.1007/BF02788236>
16. Riemenschneider S. D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: A survey // *The Journal of Analysis*. 2000. Vol. 8. P. 157–178. <https://zbmath.org/0972.41009>
17. Luh Lin-Tian. The shape parameter in the Gaussian function // *Computers and Mathematics with Applications*. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 687–694. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032>
18. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions // *Journal of Approximation Theory*. 2015. Vol. 189. P. 101–122. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011>
19. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J. D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels // *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2012. Vol. 18. Issue 1. P. 67–86. <https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2>
20. Fornberg B., Larsson E., Flyer N. Stable computations with Gaussian radial basis functions // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2011. Vol. 33. Issue 2. P. 869–892. <https://doi.org/10.1137/09076756X>
21. Madych W. R., Nelson S. A. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadratic interpolation // *Journal of Approximation Theory*. 1992. Vol. 70. Issue 1. P. 94–114. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(92\)90058-V](https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90058-V)
22. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems // *Iterative methods in linear algebra. Proceedings of the IMACS international symposium, Brussels, Belgium, 2–4 April, 1991*. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 263–281. <https://zbmath.org/0785.65101>
23. Georgoulis E., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2013. Vol. 35. Issue 2. P. A815–A831. <https://doi.org/10.1137/110859610>
24. Buhmann M. D. Radial basis functions. Theory and implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241>
25. Shisha O. Monotone approximation // *Pacific Journal of Mathematics*. 1965. Vol. 15. Issue 2. P. 667–671. <https://doi.org/10.2140/pjm.1965.15.667>
26. Roulier J. A. Monotone approximation of certain classes of function // *Journal of Approximation Theory*. 1968. Vol. 1. Issue 3. P. 319–324. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90009-9](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90009-9)
27. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of approximation by monotone polynomials. I // *Journal of Approximation Theory*. 1968. Vol. 1. Issue 4. P. 501–504. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90039-7](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90039-7)
28. DeVore R. A. Monotone approximation by polynomials // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1977. Vol. 8. Issue 5. P. 906–921. <https://doi.org/10.1137/0508069>
29. DeVore R. A., Yu Xiang Ming. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation // *Constructive Approximation*. 1985. Vol. 1. P. 323–331. <https://doi.org/10.1007/BF01890039>
30. Шевчук И. А. Приближение монотонных функций монотонными многочленами // *Математический сборник*. 1992. Т. 183. № 5. С. 63–78. <https://www.mathnet.ru/rus/sm1123>
31. DeVore R. A., Leviatan D., Shevchuk I. A. Approximation of monotone functions: A counter example // *Proceedings of Chamonix, 1996*. Nashville: Vanderbilt University Press, 1997. P. 95–102. <https://zbmath.org/0958.41012>
32. Gilewicz J., Konovalov V. N., Leviatan D. Widths and shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions // *Journal of Approximation Theory*. 2006. Vol. 140. Issue 2. P. 101–126. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2005.11.016>
33. Kunsch R. J. The difficulty of Monte Carlo approximation of multivariate monotone functions // *Journal of Approximation Theory*. 2019. Vol. 241. P. 33–56. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.01.003>

34. Moré J. J., Thuente D. J. Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease // ACM Transactions on Mathematical Software. 1994. Vol. 20. Issue 3. P. 286–307.
<https://doi.org/10.1145/192115.192132>

Поступила в редакцию 10.03.2023

Принята к публикации 25.04.2023

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1464-8249>

E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О монотонной аппроксимации кусочно непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 187–205.

On monotone approximation of piecewise continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral

Keywords: piecewise continuous monotone functions, uniform approximation, Laplace integral, Gaussian function, quadratic exponential.

MSC2020: 41A29, 41A30, 65D10, 65D15

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-10

For piecewise continuous monotone functions defined on a bounded interval $[-b; b]$, a monotone smooth approximation $Q(x)$ of any prescribed accuracy in the metric of the space $C(\Pi)$ with as small as desired measure of the difference $[-b; b] \setminus \Pi$, $\Pi \subset [-b; b]$, is constructed using translations and dilations of the Laplace function (integral). In fact, this extends to the case of piecewise continuous monotone functions the result (obtained by the author formerly) on arbitrarily exact in the metric of the space $C[-b; b]$ monotone approximation of continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral. Besides, we suggest a new way of approximation in the form of linear combination of translations and dilations of the Laplace integral. Finally, we give and discuss concrete numerical examples of using approximation ways under study for a piecewise constant (stepwise) monotone function and for a piecewise continuous monotone function. Here, we also compare the results obtained for two discussed ways of approximation.

REFERENCES

1. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1951, vol. 22, issue 3, pp. 400–407. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729586>
2. Goncharkii A. V., Cherepashchuk A. M., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach astrofiziki* (Numerical methods for solving inverse problems in astrophysics), Moscow: Nauka, 1978. <https://zbmath.org/0495.35077>
3. Goncharkii A. V., Cherepashchuk A. M., Yagola A. G. *Nekorrektnyye zadachi astrofiziki* (Incorrect problems in astrophysics), Moscow: Nauka, 1985.
4. Chernov A. V. On uniform monotone approximation of continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 4, pp. 564–580. <https://doi.org/10.1134/S0965542522040042>
5. Chernov A. V. On using Gaussian functions with varied parameters for approximation of functions of one variable on a finite segment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 267–282 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170210>
6. Chernov A. V. On the application of Gaussian functions for discretization of optimal control problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 558–575 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170406>
7. Chernov A. V. On application of Gaussian functions for numerical solution of optimal control problems, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, issue 6, pp. 1026–1040. <https://doi.org/10.1134/S0005117919060031>
8. Chernov A. V. Gaussian functions combined with Kolmogorov's theorem as applied to approximation of functions of several variables, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, issue 5, pp. 766–782. <https://doi.org/10.1134/S0965542520050073>
9. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets*, Philadelphia: SIAM, 1992. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>
10. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet theory*, Providence: AMS, 2011. <https://zbmath.org/1213.42002>

11. Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1996, vol. 16, issue 1, pp. 13–29. <https://doi.org/10.1093/imanum/16.1.13>
12. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data, *Journal of Approximation Theory*, 2007, vol. 145, issue 2, pp. 141–170. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003>
13. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*, Providence: AMS, 2007. <https://zbmath.org/1120.41013>
14. Baxter B.J.C., Sivakumar N. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadratics, *Journal of Approximation Theory*, 1996, vol. 87, issue 1, pp. 36–59. <https://doi.org/10.1006/jath.1996.0091>
15. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. On cardinal interpolation by Gaussian radial-basis functions: Properties of fundamental functions and estimates for Lebesgue constants, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1999, vol. 79, issue 1, pp. 33–61. <https://doi.org/10.1007/BF02788236>
16. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: A survey, *The Journal of Analysis*, 2000, vol. 8, pp. 157–178. <https://zbmath.org/0972.41009>
17. Luh Lin-Tian. The shape parameter in the Gaussian function, *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 687–694. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032>
18. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions, *Journal of Approximation Theory*, 2015, vol. 189, pp. 101–122. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011>
19. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J.D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2012, vol. 18, issue 1, pp. 67–86. <https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2>
20. Fornberg B., Larsson E., Flyer N. Stable computations with Gaussian radial basis functions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, vol. 33, issue 2, pp. 869–892. <https://doi.org/10.1137/09076756X>
21. Madych W.R., Nelson S.A. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadratic interpolation, *Journal of Approximation Theory*, 1992, vol. 70, issue 1, pp. 94–114. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(92\)90058-V](https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90058-V)
22. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems, *Iterative methods in linear algebra. Proceedings of the IMACS international symposium, Brussels, Belgium, 2–4 April, 1991*, Amsterdam: North-Holland, 1992, pp. 263–281. <https://zbmath.org/0785.65101>
23. Georgoulis E., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2013, vol. 35, issue 2, pp. A815–A831. <https://doi.org/10.1137/110859610>
24. Buhmann M.D. *Radial basis functions. Theory and implementations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241>
25. Shisha O. Monotone approximation, *Pacific Journal of Mathematics*, 1965, vol. 15, issue 2, pp. 667–671. <https://doi.org/10.2140/pjm.1965.15.667>
26. Roulier J.A. Monotone approximation of certain classes of function, *Journal of Approximation Theory*, 1968, vol. 1, issue 3, pp. 319–324. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90009-9](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90009-9)
27. Lorentz G.G., Zeller K.L. Degree of approximation by monotone polynomials. I, *Journal of Approximation Theory*, 1968, vol. 1, issue 4, pp. 501–504. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90039-7](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90039-7)
28. DeVore R.A. Monotone approximation by polynomials, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1977, vol. 8, issue 5, pp. 906–921. <https://doi.org/10.1137/0508069>
29. DeVore R.A., Yu Xiang Ming. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, *Constructive Approximation*, 1985, vol. 1, pp. 323–331. <https://doi.org/10.1007/BF01890039>
30. Shevchuk I.A. Approximation of monotone functions by monotone polynomials, *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, 1993, vol. 76, issue 1, pp. 51–64. <https://doi.org/10.1070/SM1993v076n01ABEH003401>
31. DeVore R.A., Leviatan D., Shevchuk I.A. Approximation of monotone functions: A counter example, *Proceedings of Chamonix, 1996*, Nashville: Vanderbilt University Press, 1997, pp. 95–102. <https://zbmath.org/0958.41012>
32. Gilewicz J., Kononov V.N., Leviatan D. Widths and shape-preserving widths of Sobolev-

- type classes of s-monotone functions, *Journal of Approximation Theory*, 2006, vol. 140, issue 2, pp. 101–126. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2005.11.016>
33. Kunsch R.J. The difficulty of Monte Carlo approximation of multivariate monotone functions, *Journal of Approximation Theory*, 2019, vol. 241, pp. 33–56. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.01.003>
34. Moré J.J., Thunent D.J. Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1994, vol. 20, issue 3, pp. 286–307. <https://doi.org/10.1145/192115.192132>

Received 10.03.2023

Accepted 25.04.2023

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1464-8249>

E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On monotone approximation of piecewise continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 187–205.