Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2023. Том 62. С. 10–29

УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. И. Благодатских, А. С. Банников*

ОДНОВРЕМЕННАЯ МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЩИТНИКОВ УБЕГАЮЩЕГО

Рассматривается конфликтно управляемый процесс, в котором участвуют три типа управляемых объектов: группа преследователей, убегающий, группа защитников убегающего. Динамические и инерционные возможности всех управляемых объектов совпадают. Убегающий и группа защитников действуют согласованно. Группа преследователей является второй стороной конфликта. При совпадении позиций преследователя и защитника убегающего оба участника погибают и перестают участвовать в конфликтно управляемом процессе. Говорят, что в конфликтно управляемом процессе происходит многократная поимка убегающего, если заданное количество преследователей ловят его, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка убегающего. В терминах начальных позиций участников и других параметров конфликтно управляемого процесса получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки убегающего.

Ключевые слова: дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы, преследование, поимка, многократная поимка, одновременная многократная поимка, убегание, защитники убегающего.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-02

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, впервые рассмотренные Р. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой содержательную математическую теорию [2–5] (метод Л. С. Понтрягина, метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и другие). Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования-убегания с участием группы управляемых объектов хотя бы с одной из противоборствующих сторон, при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования, отличных от методов, разработанных для игр двух лиц.

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л. А. Петросяном, им были получены [6] достаточные условия поимки убегающего, Б. Н. Пшеничный получил [7] необходимые и достаточные условия поимки убегающего. Н. Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены [8] необходимые и достаточные условия многократной поимки убегающего. А. А. Чикрием [9] и Н. Н. Петровым [10] были получены достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. Н. Н. Петровым и Н. А. Соловьевой рассмотрены рекуррентные дифференциальные игры при равных возможностях участников: для примера Л. С. Понтрягина [11, 12] и конфликтно управляемого процесса [13] получены достаточные условия многократной поимки убегающего; для примера

Л. С. Понтрягина [14] и конфликтно управляемого процесса [15] получены достаточные условия поимки не менее q убегающих, при условии, что каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. Задачу о многократной поимке не менее q убегающих с равными возможностями участников, при указанном выше условии, рассмотрели Н. Н. Петров и А. Я. Нарманов, были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования для случая простых движений [16], а также достаточные условия завершения преследования в задаче с дробными производными и простой матрицей [17].

В работах [18,19,21] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок убегающего, для задач простого преследования, конфликтно управляемых процессов, а также примера Л. С. Понтрягина с равными возможностями приведены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия разрешимости. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка убегающего.

Задача об одновременной многократной поимке группы убегающих [20,22,24,26,27] рассматривалась в двух аспектах: в [24, 26] с точки зрения суммарной кратности поимок всех убегающих — получены необходимые и достаточные условия суммарных многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок использующих жестко скоординированное управление убегающих в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными возможностями всех игроков; синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности рассматривалась в [20, 22, 27] — получены необходимые и достаточные условия разрешимости указанной задачи.

В работах [23, 25] введено понятие и получены необходимые и достаточные условия многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок убегающего в задаче простого группового преследования и конфликтно управляемом процессе с равными возможностями при наличии третьей группы участников — защитников убегающего. Отметим, что различные модели задач конфликтного взаимодействия при наличии защитников убегающего рассматривались в работах [28–31]. Данная работа продолжает исследования [23,25], получены более общие необходимые и достаточные условия разрешимости. Рассмотрен ряд модельных примеров.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned}
P_i\colon &\quad \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, && i \in I(n),\\
E\colon &\quad \dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, && \\
D_j\colon &\quad \dot{z}_j = A(t)z_j + w_j, \quad w_j \in U(t), \quad z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), && j \in I(r).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь и далее $x_i, y, z_j \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ компактом в $\mathbb{R}^k$; $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $S(o, \rho)$ — шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке o радиуса ρ; O — нуль-матрица; $\mathcal{I}$ — единичная матрица.

В системе (1.1) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы, и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников конфликтно управляемой системы (1.1), причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Определение 1.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q < \ldots$ интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

Определение 1.2. Кусочно-программной стратегией убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y(\theta_q), z_j(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Определение 1.3. Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$ и допустимому управлению $v(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, убегающего E допустимые управления $u_i(t)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y(\theta_q), z_j(\theta_q), v(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Определение 1.4. Кусочно-программной контрстратегией защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту t_0 и начальным позициям X_i^0, Y^0 начальные позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$; моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$ и допустимым управлениям $v(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, убегающего E и $u_i(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, допустимые управления $w_j(t)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0, X_i^0, Y^0) \in S(Y^0, L);$$
$$w_j(t) = w_j\big(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y(\theta_q), z_j(\theta_q),\ v(s), u_i(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})\big),\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}),\ q = 0, 1, 2, \ldots .$$

При совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\} \geqslant 1$ защитников и столько же преследователей (для определенности считаем, что погибают игроки с наименьшими порядковыми номерами). Если совпадают координаты убегающего E и защитника D_j, то последний погибает. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

Неформально, у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае одновременной встречи с несколькими преследователями первый из них «прикрывает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный, например, за счет настройки механизма самоликвидации, обеспечивающей максимально возможный урон преследователю и нанесение минимального ущерба убегающему).

Будем исследовать два варианта игры — все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, либо сильные, либо слабые. В случае совпадения геометрических координат преследователя P_i, убегающего E и защитника D_j в некоторый момент $\theta > t_0$, то есть $x_i(\theta) = y(\theta) = z_j(\theta)$, как указано выше, $T(P_i) = T(D_j) = \theta$. Если защитник убегающего D_j сильный, то он уничтожает преследователя P_i быстрее, чем тот ловит убегающего E (поимки не происходит). В случае, когда защитник убегающего D_j слабый, преследователь P_i до момента гибели успевает поймать убегающего E (происходит поимка).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\},$$

мощность которого совпадает с числом сочетаний из n элементов по q, то есть

$$|\Omega_j(q)| = C_n^q.$$

Определение 1.5. В игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна b-кратная поимка, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что для любой кусочно-программной контрстратегии защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 1.6. В игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна b-кратная поимка, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что для любой кусочно-программной контрстратегии защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha \leqslant T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый из преследователей P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 1.7. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что для любой кусочно-программной контрстратегии защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big] \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 1.8. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент $T_0 =$

$T_0(X_i^0, Y^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что для любой кусочно-программной контрстратегии защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big],\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II — группой преследователей, III — группой защитников убегающего), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего при содействии группы защитников (либо сильных, либо слабых) от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна — реализация группой преследователей указанных видов поимок при любых действиях убегающего и группы его защитников.

§ 2. Решение задачи для случая простых движений

Сначала исследуем систему (1.1) для случая простых движений ($A(t) = O$), в этом случае она примет вид

$$\begin{array}{llllll} P_i & : & \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & \\ D_j & : & \dot{z}_j = w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & j \in I(r). \end{array} \qquad (2.1)$$

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \qquad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что $U(t) = (B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, поэтому, при выполнении предположения 2.1, многозначное отображение $U(t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа на $[t_0, \infty)$, а также при каждом $t \in [t_0, \infty)$ оно является строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Для всех $w \in W, \xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\big\}. \qquad (2.3)$$

Отметим, что $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, откуда

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2} \text{ для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0. \qquad (2.4)$$

Предположение 2.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (2.3), (2.4), (2.2) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\lambda(w,\xi;U(t)) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in U(t)\big\} = \\
&= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w-\lambda\xi+g(t)) \in B(t)(U(t)+g(t))\big\} = \\
&= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w+g(t)) - \lambda B(t)\xi) \in S(0,1)\big\} = \\
&= \lambda(B(t)(w+g(t)), B(t)\xi; S(0,1)) = \\
&= \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Big(\langle B(t)(w+g(t)), B(t)\xi\rangle + \\
&+\sqrt{\langle B(t)(w+g(t)), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1-|B(t)(w+g(t))|^2)} \;\Big).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Учитывая, что $X_i^0 \neq Y^0$, $i \in I(n)$, а также равенство (2.5) получим, что каждая функция

$$\lambda_i(v,t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\big\} \tag{2.6}$$

непрерывна на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$. Значит при любом допустимом управлении $v(t)$ получаем функции $\lambda_i(v(t),t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0, \infty)$.

Введем обозначения

$$\delta_r(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s)ds. \tag{2.7}$$

Сначала рассмотрим игру Γ с сильными защитниками убегающего.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии, что группа защитников D_j, $j \in I(r)$, не принимает участие в игре Γ, при доказательстве теоремы 2 [26] построены управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающие одновременную $(b+r)$-кратную поимку убегающего E.

Пусть преследователи P_i, $i \in I(n)$, используют указанные управления (не учитывают действия защитников D_j, $j \in I(r)$). Так как все защитники D_j, $j \in I(r)$, могут уничтожить не более чем r преследователей P_i, $i \in I(n)$, получаем справедливость утверждения.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Введем обозначения: $\Gamma_1(i,j)$, $i \in I(n)$, $j \in J(r)$, — игра, в которой участвуют только три игрока — преследователь P_i, убегающий E и сильный защитник убегающего D_j; $(a,b)^* = \{c \in \mathbb{R}^k : c = (1-\alpha)a + \alpha b,\ \alpha \in (0,1)\}$ — интервал в $\mathbb{R}^k$, соединяющий точки $a, b \in \mathbb{R}^k$.

Л е м м а 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1, *в процессе игры* $\Gamma_1(i,j)$ *в момент* $\theta \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация* $z_j(\theta) \in (x_i(\theta), y(\theta))^*$. *Тогда для всех допустимых продолжений управлений* $u_i(t)$ *и* $v(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *найдется такое допустимое продолжение управления* $w_j(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *что* $z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^*$ *для всех* $t \in [\theta, T(D_j))$, *при этом, если* $T(D_j) < \infty$, *то* $T(D_j) = T(P_i)$, $z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) = y(T(D_j))$ *и поимки не происходит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности, будем считать, что $\theta = \theta_q \geqslant t_0$ (если это не так, то добавим точку θ в разбиение σ).

Из включения $z_j(\theta_q) \in (x_i(\theta_q), y(\theta_q))^*$ следует, что

$$z_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q), \text{ где } \alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|} \in (0,1).$$

Определим допустимое продолжение управления защитника D_j следующим образом:

$$w_j(t) = (1-\alpha_{ij})u_i(t) + \alpha_{ij}v(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty).$$

Тогда для всех $t \in [\theta_q, \infty)$

$$z_j(t) = z_j(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} w_j(s)\,ds = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \big((1-\alpha_{ij})u_i(s) + \alpha_{ij}v(s)\big)\,ds =$$

$$= (1-\alpha_{ij})\Big(x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} u_i(s)\,ds\Big) + \alpha_{ij}\Big(y(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} v(s)\,ds\Big) = (1-\alpha_{ij})x_i(t) + \alpha_{ij}y(t).$$

Полученное равенство означает, что

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ при } x_i(t) \neq y(t) \text{ или } z_j(t) = x_i(t) = y(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty).$$

Из последних соотношений следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 2.1 доказана. □

Для каждого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ и всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функцию

$$v_l(t) \in \partial U(t) \text{ из условия: } \langle u(t) - v_l(t), l\rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U(t) \setminus \{v_l(t)\}. \tag{2.8}$$

Отметим, что, при выполненном предположении 2.1, функция $v_l(t)$ при каждом зафиксированном l определена однозначно и непрерывна на интервале $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначного отображения $U(t)$.

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l \in \mathbb{R}^k$, *номера* $p \in I(n)$ *и момента* $\theta \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_p(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0, \quad x_p(\theta) \neq y(\theta),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E *равенством*

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [\theta, \infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle \leqslant 0, \quad x_p(t) \neq y(t) \text{ для всех } t \in [\theta, \infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_p(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *преследователя* P_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.8), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle = \langle x_p(\theta) - y(\theta), l\rangle + \int_{\theta}^{t} \langle u_p(s) - v_l(s), l\rangle\,ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_p(s) = v_l(s)$ почти всюду на $[\theta, t]$, но в этом случае $x_p(t) \neq y(t)$, так как $x_p(\theta) \neq y(\theta)$. Если $\langle x_p(t) - y(t), l\rangle < 0$, то $x_p(t) \neq y(t)$. Следовательно, $x_p(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta, \infty)$.

Лемма 2.2 доказана. □

У с л о в и е 2.1. $Y^0 \in \mathrm{Intco}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n-b-r+1)$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие 2.1 не выполнено. Тогда существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n-b-r+1)$ такое, что $Y^0 \notin \operatorname{Intco}\{X_q^0, q \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l\rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_q^0 - Y^0, l\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } q \in Q.$$

По (2.8) определим допустимое управление убегающего E следующим образом:

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 2.2 при любых допустимых управлениях $u_q(t)$ преследователей P_q выполнены неравенства $\langle x_q(t) - y(t), l\rangle \leqslant 0$, $x_q(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $q \in Q$.

Рассмотрим оставшихся $|I(n) \setminus Q| = n - (n-b-r+1) = b+r-1$ преследователей P_i, $i \in I(n) \setminus Q$.

Выберем попарно различные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r \in I(n) \setminus Q$ и определим начальные позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ следующим образом:

$$Z_j^0 = Y^0 + L\frac{X_{i_j}^0 - Y^0}{|X_{i_j}^0 - Y^0|}.$$

Отметим, что $z_j(\theta_0) = z_j(t_0) = Z_j^0$, $x_{i_j}(\theta_0) = x_{i_j}(t_0) = X_{i_j}^0$, $y(\theta_0) = y(t_0) = Y^0$ и $z_j(\theta_0) \in (x_{i_j}(\theta_0), y(\theta_0))^*$.

Для каждой игры $\Gamma_1(i_j, j)$, $j \in I(r)$, выполнены условия леммы 2.1. Предпишем изначально каждому защитнику D_j использовать управления $w_j(t)$, $j \in I(r)$, построенные в лемме 2.1. Тогда $z_j(t) \in (x_{i_j}(t), y(t))^*$ для всех $t \in [\theta_0, T(D_j))$.

Возможны следующие случаи:

1. $T(D_j) = \infty$, в этом случае защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

2. Сильный защитник D_j уничтожает преследователя P_{i_j} в момент $\theta > \theta_0 = t_0$, тогда $T(D_j) = T(P_{i_j}) = \theta$ и $z_j(\theta) = x_{i_j}(\theta) = y(\theta)$ (поимки не происходит), то есть и в этом случае защитник D_j предотвращает поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

3. Защитник D_j уничтожает преследователя P_q, где $q \in Q$, тогда $T(D_j) = T(P_q) = \theta$ и $z_j(\theta) = x_q(\theta)$. А поскольку $\langle x_q(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $x_q(\theta) \neq y(\theta)$, то и $\langle z_j(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $z_j(\theta) \neq y(\theta)$. Далее, $z_j(\theta) \in (x_{i_j}(\theta), y(\theta))^*$, а это означает, что $\langle x_{i_j}(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $x_{i_j}(\theta) \neq y(\theta)$. Теперь из леммы 2.2 получаем, что $x_{i_j}(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta, \infty)$. Вновь защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

4. Защитник D_j уничтожает преследователя P_{i_0} раньше, чем тот осуществляет поимку убегающего E, где $i_0 \in I(n) \setminus Q$ и $i_0 \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, то есть защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_0}.

5. Защитник D_j уничтожает преследователя $P_{i_{j^*}}$ раньше, чем «закрепленный» за ним изначально защитник D_{j^*}, где $j^* \in I(r) \setminus \{j\}$. Следовательно, для некоторого момента $\theta > \theta_0 = t_0$ выполнено равенство $z_j(\theta) = x_{i_{j^*}}(\theta)$ и $T(D_j) = T(P_{i_{j^*}}) = \theta$. Отметим, что, по построению управлений w_j и w_{j^*}, имеем $z_{j^*}(\theta) \in (x_{i_j}(\theta), y(\theta))^*$. Для тройки игроков: преследователя P_{i_j}, убегающего E и защитника D_{j^*} выполнены условия леммы 2.1. Предпишем теперь защитнику D_{j^*}, вместо погибшего преследователя $P_{i_{j^*}}$, контролировать преследователя P_{i_j}, то есть выбором своего управления, построенного в лемме 2.1, обеспечить выполнение включения $z_{j^*}(t) \in (x_{i_j}(t), y(t))^*$ для всех $t \in [\theta, T(D_{j^*}))$.

Таким образом, при любых действиях преследователей P_i, $i \in I(n) \setminus Q$, каждый защитник $D_j, j \in I(r)$, предотвращает встречу одного из указанных преследователей с убегающим E. Оставшиеся $(b+r-1)-r = b-1$ преследователей не могут осуществить b-кратную поимку.

Теорема 2.2 доказана. □

Л е м м а 2.3. *Пусть выполнены предположение* 2.1, *условие* 2.1, *многозначное отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда* $\Delta_r = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $U(t) = U = \mathrm{const}$ предположение 2.1 примет вид: существует постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что
$$B(U + g) = S(0, 1). \tag{2.9}$$

Из (2.9), (2.7), (2.6), (2.5) получаем, что
$$\begin{aligned}\delta_r(t) = \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, X_\alpha^0 - Y^0; U) = \\ = \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(B(v+g), B(X_\alpha^0 - Y^0); S(0,1)) = \\ = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, B(X_\alpha^0 - Y^0); S(0,1)).\end{aligned}$$

Таким образом,
$$\delta_r(t) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, b_\alpha; S(0,1)), \text{ где } b_i = B(X_i^0 - Y^0) \neq 0,\ i \in I(n). \tag{2.10}$$

Отметим, что (2.10) можно преобразовать с применением (2.4), получим
$$\delta_r(t) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \frac{\langle s, b_\alpha \rangle + \sqrt{\langle s, b_\alpha \rangle^2 + |b_\alpha|^2(1 - |s|^2)}}{|b_\alpha|^2} \tag{2.11}$$
Из (2.11) следует, что функция постоянна $\delta_r(t) = \delta_r = \mathrm{const}$.

Предположим, что $\delta_r = 0$. Тогда из (2.10) следует, что найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b+r)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha; S(0,1)) = 0$. Построим множество
$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b-r+1}\} \in \Omega(n - b - r + 1)$$
по следующему правилу. Выберем элемент
$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b + r\} \in \Omega(b + r) \text{ из условия } \lambda(s^*, b_{q_1}; S(0,1)) = 0,$$
затем такой элемент
$$q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b + r + 1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b + r), \text{ что } \lambda(s^*, b_{q_2}; S(0,1)) = 0,$$
далее элемент
$$q_3 \in L_3 = (L_2 \bigcup \{b + r + 2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega(b) \text{ такой, что } \lambda(s^*, b_{q_3}; S(0,1)) = 0$$
и так далее. На последнем шаге построим множество
$$L_{n-b-r+1} = (L_{n-b-r} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-b-r}\} \in \Omega(b + r)$$
и выберем элемент
$$q_{n-b-r+1} \in L_{n-b-r+1} \text{ по условию } \lambda(s^*, b_{q_{n-b-r+1}}; S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega(n - b - r + 1)$ справедливо равенство
$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q; S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Intco}\{b_q,\ q \in Q\} = \operatorname{Intco}\{B(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица B невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Intco}\{X_q^0 - Y^0,\ q \in Q\} \text{ или } Y^0 \notin \operatorname{Intco}\{X_q^0,\ q \in Q\}$$

и условие 2.1 не выполнено.

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_r > 0$. Из (2.7) получаем, что

$$\Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r = \infty.$$

Лемма 2.3 доказана. □

Т е о р е м а 2.3. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и многозначное отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 2.2. Пусть выполнено условие 2.1. Из леммы 2.3 следует, что $\Delta_r = \infty$ и возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 2.1.

Теорема 2.3 доказана. □

Перейдем к рассмотрению игры Γ со слабыми защитниками убегающего, при этом от всех участников дополнительно потребуем, чтобы выполнялось

П р е д п о л о ж е н и е 2.2. Все игроки используют допустимые управления, являющиеся кусочно-постоянными функциями на $[t_0, \infty)$.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии, что группа защитников D_j, $j \in I(r)$, не принимает участие в игре Γ, при доказательстве теоремы 2 [26] построены управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающие одновременную $(b + r)$-кратную поимку убегающего E, при этом если допустимое управление $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией, то и допустимые управления $u_i(t)$, $i \in I(n)$, будут обладать этим свойством.

Пусть преследователи P_i, $i \in I(n)$, используют указанные управления (не учитывают действия защитников D_j, $j \in I(r)$). Так как все защитники D_j, $j \in I(r)$, могут уничтожить не более чем r преследователей P_i, $i \in I(n)$, получаем справедливость утверждения.

Теорема 2.4 доказана. □

Через $\Gamma_2(i, j)$, $i \in I(n)$, $j \in J(r)$, обозначим игру, в которой участвуют только три игрока — преследователь P_i, убегающий E и слабый защитник убегающего D_j.

Л е м м а 2.4. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, *и в процессе игры* $\Gamma_2(i, j)$ *в момент* $\theta \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация* $z_j(\theta) \in (x_i(\theta), y(\theta))^*$. *Тогда для всех допустимых продолжений управлений* $u_i(t)$ *и* $v(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *найдется такое допустимое продолжение управления* $w_j(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *что* $z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^*$ *для всех* $t \in [\theta, T(D_j))$, *при этом, если* $T(D_j) < \infty$, *то* $T(D_j) = T(P_i)$, $z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) \neq y(T(D_j))$ *и поимки не происходит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности, будем считать, что $\theta = \theta_q \geqslant t_0$ (если это не так, то добавим точку θ в разбиение σ), в точках разрыва допустимые управления игроков непрерывны справа, а также все точки разрыва управлений принадлежат множеству точек разбиения σ (при наличии других точек разрыва их можно включить в разбиение σ), то есть

$$w_j(t) = w_j(\theta_p),\ u_i(t) = u_i(\theta_p),\ v(t) = v(\theta_p) \text{ для всех } t \in [\theta_p, \theta_{p+1}),\ p = 0, 1, 2, \ldots$$

Из включения $z_j(\theta_q) \in (x_i(\theta_q), y(\theta_q))^*$ следует, что

$$z_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q),\ \text{где } \alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|} \in (0,1).$$

Предположение 2.2 означает, что для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} z_j(t) = z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t-\theta_q), \\ x_i(t) = x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t-\theta_q), \quad y(t) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Определим $w_j(\theta_q)$, а значит и $w_j(t) = w_j(\theta_q)$, $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$. Рассмотрим два случая:

1. Для всех $t > \theta_q$ выполнено неравенство $x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t-\theta_q) \neq y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q)$. В этом случае

$$w_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})u_i(\theta_q) + \alpha_{ij}v(\theta_q).$$

Тогда, как показано в доказательстве леммы 2.1,

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ при } x_i(t) \neq y(t) \text{ или } z_j(t) = x_i(t) = y(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Вместе с тем, неравенство $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$ следует из (2.12) и выполненного в данном случае неравенства, значит

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

2. Существет момент $\tau > \theta_q$ такой, что $x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(\tau-\theta_q) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(\tau-\theta_q)$. Преобразуем данное равенство к виду

$$x_i(\theta_q) - y(\theta_q) = (v(\theta_q) - u_i(\theta_q))(\tau - \theta_q). \tag{2.13}$$

Полагаем

$$w_j(\theta_q) = v(\theta_q).$$

Тогда для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}] \bigcap [\theta_q, \tau)$, с учетом (2.12), получим

$$z_j(t) = z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t-\theta_q) = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q) =$$

$$= (1-\alpha_{ij})(x_i(\theta_q) - y(\theta_q)) + y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q) = (1-\alpha_{ij})(x_i(\theta_q) - y(\theta_q)) + y(t) =$$

$$= \frac{1-\alpha_{ij}}{1-(t-\theta_q)/(\tau-\theta_q)}\Big(1 - \frac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}\Big)(x_i(\theta_q) - y(\theta_q)) + y(t) =$$

$$= \Big(1 - \frac{\alpha_{ij} - (t-\theta_q)/(\tau-\theta_q)}{1-(t-\theta_q)/(\tau-\theta_q)}\Big)\Big(x_i(\theta_q) - y(\theta_q) - \frac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}(x_i(\theta_q) - y(\theta_q))\Big) + y(t).$$

Введем обозначение

$$\beta_{ij}(t) = \frac{\alpha_{ij} - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}{1 - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}.$$

Отметим, что функция $\beta_{ij}(t)$ определена и непрерывна на $[\theta_q, \tau)$, при этом

$$\beta_{ij}(\theta_q) = \alpha_{ij},\ \beta_{ij}(\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q)) = 0 \text{ и } \theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) \in (\theta_q, \tau),\ \text{так как } \alpha_{ij} \in (0, 1).$$

Продолжим начатые выше вычисления, с использованием (2.13), получим

$$z_j(t) = (1 - \beta_{ij}(t))\Big(x_i(\theta_q) - y(\theta_q) - (t - \theta_q)(v(\theta_q) - u_i(\theta_q))\Big) + y(t) =$$

$$= (1 - \beta_{ij}(t))\Big(x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t - \theta_q) - \big(y(\theta_q) + v(\theta_q)(t - \theta_q)\big)\Big) + y(t) =$$
$$= (1 - \beta_{ij}(t))(x_i(t) - y(t)) + y(t) = (1 - \beta_{ij}(t))x_i(t) + \beta_{ij}(t)y(t).$$

Полученное равенство и свойства функции $\beta_{ij}(t)$ означают, что возможны два случая:

2.1. Если $\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) > \theta_{q+1}$, то

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

2.2. Если $\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) \leqslant \theta_{q+1}$, то $T(D_j) = T(P_i) = \theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q)$ и

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, T(D_j)),\ z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) \neq y(T(D_j)).$$

В случае 2.2 поимки не происходит. Если имел место случай 1 или 2.1, то на отрезке $[\theta_q, \theta_{q+1}]$ поимки не происходит, а в момент θ_{q+1} снова выполнено включение

$$z_j(\theta_{q+1}) \in (x_i(\theta_{q+1}), y(\theta_{q+1}))^*,$$

позволяющее определить $w_j(\theta_{q+1})$ аналогично $w_j(\theta_q)$.

Лемма 2.4 доказана. □

Аналогично теореме 2.2 (используя лемму 2.4 вместо леммы 2.1) доказывается

Т е о р е м а 2.5. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления b-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Т е о р е м а 2.6. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2 *и многозначное отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 2.5. Пусть выполнено условие 2.1. Из леммы 2.3 следует, что $\Delta_r = \infty$ и возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 2.4.

Теорема 2.6 доказана. □

П р и м е р 2.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{2.1}$ $2 + 2q + r$ $(q \geqslant 1,\ r \geqslant 0)$ лиц: $1 + 2q$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, ..., D_r$ (при $r = 0$ защитников нет) вида (2.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right),\quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix},\quad i \in I(1+2q),\quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 2.1 выполнено при $B(t) = 2\mathcal{I}$ и $g(t) = (1, -2)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный $(1 + 2q)$-угольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $b + r = 1, 2, \ldots, q$ условие 2.1 имеет место, а при $b + r \geqslant q + 1$ условие 2.1 не выполнено. Из теорем 2.3, 2.6, следуют

У т в е р ж д е н и е 2.1. *При $(q-r) \geqslant 1$ в игре $\Gamma_{2.1}$ с сильными защитниками убегающего возможна одновременная $(q-r)$-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна, а при $(q-r) \leqslant 0$ в игре $\Gamma_{2.1}$ с сильными защитниками убегающего поимка невозможна.*

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Пусть выполнено предположение 2.2. Тогда при $(q-r) \geqslant 1$ в игре $\Gamma_{2.1}$ со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная $(q-r)$-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна, а при $(q-r) \leqslant 0$ в игре $\Gamma_{2.1}$ со слабыми защитниками убегающего поимка невозможна.*

§ 3. Решение задачи в общем случае

Перейдем к исследованию системы (1.1) в общем случае.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$. Отметим, что $\Phi^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0, \infty)$, а $\Phi^{-1}(t_0) = \mathcal{I}$.

В системе (1.1) проведем неособые линейные преобразования координат

$$\begin{array}{lll} x_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)x_i(t), & y^*(t) = \Phi^{-1}(t)y(t), & z_j^*(t) = \Phi^{-1}(t)z_j(t), \\ u_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)u_i(t) \in \Phi^{-1}(t)U(t), & v^*(t) = \Phi^{-1}(t)v(t), & w_j^*(t) = \Phi^{-1}(t)w_j(t). \end{array} \tag{3.1}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (1.1) преобразуется [3] к задаче простого группового преследования

$$\begin{array}{llllll} P_i & : & \dot{x}_i^* = u_i^*, & u_i^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), & x_i^*(t_0) = X_i^0, & i \in I(n), \\ E & : & \dot{y}^* = v^*, & v^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), & y^*(t_0) = Y^0, & \\ D_j & : & \dot{z}_j^* = w_j^*, & w_j^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), & z_j^*(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & j \in I(r). \end{array} \tag{3.2}$$

Отметим, что в полученной (3.2) и в исходной (1.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (3.1).

По форме системы (3.2) и (2.1) совпадают, но, чтобы применить результаты § 2 необходимо убедиться, что многозначное отображение $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Л е м м а 3.1. *Если выполнено предположение* 2.1, *то существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B^*(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g^*(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что $B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = S(0, 1)$ для всех $[t_0, \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения 2.1, $B^*(t) = B(t)\Phi(t)$ является непрерывной и невырожденной на $[t_0, \infty)$ квадратной матрицей порядка k как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, а функция $g^*(t) = \Phi^{-1}(t)g(t) \in \mathbb{R}^k$ непрерывна на $[t_0, \infty)$, поэтому для всех $t \in [t_0, \infty)$

$$B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = B(t)\Phi(t)(\Phi^{-1}(t)U(t) + \Phi^{-1}(t)g(t)) = B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1).$$

Лемма 3.1 доказана. □

При сделанном предположении 2.1, из леммы 3.1 и (2.5) следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in V(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{aligned} \lambda(w, \xi; V(t)) &= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in V(t)\bigr\} = \\ &= \lambda(B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi; S(0,1)) = \\ &= \frac{1}{|B^*(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle + \\ &+ \sqrt{\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle^2 + |B^*(t)\xi|^2(1 - |B^*(t)(w + g^*(t))|^2)}\ \Bigr). \end{aligned}$$

В исходных координатах получим: при всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(\Phi^{-1}(t)w, \xi; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}= \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi(t)\xi) \in U(t)\bigr\}= \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\Phi(t)\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\bigr\}= \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\Phi(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\}= \\
= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle + \\
+\sqrt{\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\Phi(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)}\ \Bigr).
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Из леммы 3.1 следует, что теоремы 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, справедливы для системы (3.2). Перепишем их для системы (1.1) с учетом преобразования координат (3.1), а также (2.6) и (2.7). По функциям

$$\begin{gathered}
\lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\},
\end{gathered} \tag{3.4}$$

непрерывным на множестве $U_j(t) \times [t_0, \infty)$, $j \in I(m)$, определим величины

$$\delta_r^1(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_r^1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r^1(s)ds. \tag{3.5}$$

Вместо предположения 2.2 потребуем, чтобы выполнялось

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Игроки используют такие допустимые управления, что все функции $\Phi^{-1}(t)u_i(t)$, $i \in I(n)$, $\Phi^{-1}(t)v(t)$, $\Phi^{-1}(t)w_j(t)$, $j \in I(r)$, являются кусочно-постоянными на $[t_0, \infty)$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Т е о р е м а 3.3. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 3.1 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Т е о р е м а 3.4. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 3.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [32].

Аналогично лемме 3.3 [27] доказывается

Л е м м а 3.2. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.1, *многозначное отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$, *а матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора. Тогда* $\Delta_r^1 = \infty$.

Т е о р е м а 3.5. *Пусть выполнено предположение* 2.1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и многозначное отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 3.2. Из леммы 3.2 следует, что $\Delta_r^1 = \infty$ и достаточность следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.5 доказана. $\square$

Т е о р е м а 3.6. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 3.1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и многозначное отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 3.4. Из леммы 3.2 следует, что $\Delta_r^1 = \infty$ и достаточность следует из теоремы 3.3.

Теорема 3.6 доказана. $\square$

Отметим, что матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A(t) = O$ или $A(t) = A = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

П р и м е р 3.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.1}$ $n + r + 1$ $(n \geqslant 1,\ r \geqslant 0)$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, ..., D_r$ (при $r = 0$ защитников нет) вида (1.1), где

$$U(t) = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{(e_1 - 3)^2}{2} + \frac{(e_2 + 5)^2}{4} \leqslant 1 \right\},\ A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда предположение 2.1 выполнено при

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{и } g(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ а } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теорем 3.5, 3.6 следуют

У т в е р ж д е н и е 3.1. *Условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* $\Gamma_{3.1}$ *с сильными защитниками убегающего.*

У т в е р ж д е н и е 3.2. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Тогда условие* 2.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* $\Gamma_{3.1}$ *со слабыми защитниками убегающего.*

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды ордена Ленина Математического института имени В. А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63. https://www.mathnet.ru/rus/tm3032
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

4. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
5. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. https://elibrary.ru/item.asp?id=23449498
6. Петросян Л. А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия Академии наук Армянской ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340. https://elibrary.ru/item.asp?id=29854498
7. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
9. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
10. Петров Н. Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/1997/61-5
11. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186. https://www.mathnet.ru/rus/timm1180
12. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26873985
13. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
14. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2020. Т. 186. С. 108–115. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115
15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 371–377. https://www.mathnet.ru/rus/semr1508
16. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче с дробными производными и простой матрицей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 188–199. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199
18. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
19. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2009/73-1/54
20. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 13–18. https://doi.org/10.20537/vm120302
21. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2013/77-3/433
22. Благодатских А. И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 20–26. https://doi.org/10.20537/vm130403

23. Благодатских А. И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 13–20. https://www.mathnet.ru/rus/iimi297
24. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
25. Благодатских А. И. Задача простого группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Математическая теория игр и её приложения. 2014. Т. 6. Вып. 2. С. 32–41. https://www.mathnet.ru/rus/mgta132
26. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. Issue 3. P. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
27. Благодатских А. И. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 3–26. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-01
28. Rusnak I. The lady, the bandits and the body guards — a two team dynamic game // IFAC Proceedings Volumes. 2005. Vol. 38. Issue 1. P. 441–446. https://doi.org/10.3182/20050703-6-CZ-1902.00935
29. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. Active target defense differential game with a fast defender // 2015 American Control Conference (ACC). 2015. P. 3752–3757. https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7171913
30. Kumkov S. S., Patsko V. S. Attacker-defender-target problem in the framework of space intercept // Proceedings of the 57th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. 2017.
31. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. The complete differential game of active target defense // Journal of Optimization Theory and Applications. 2021. Vol. 191. P. 675–699. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01816-z
32. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. https://zbmath.org/0155.41601

Поступила в редакцию 23.09.2023

Принята к публикации 27.10.2023

Благодатских Александр Иванович, к. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aiblag@mail.ru

Банников Александр Сергеевич, к. ф.-м. н., Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4422-1791
E-mail: asbannikov@gmail.com

Цитирование: А. И. Благодатских, А. С. Банников. Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 10–29.

A. I. Blagodatskikh, A. S. Bannikov

Simultaneous multiple capture in the presence of evader's defenders

Keywords: differential games, conflict controlled processes, pursuit, capture, multiple capture, simultaneous multiple capture, evasion, evader's defenders.

MSC2020: 49N70, 49N75

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-02

We consider a conflict-controlled process with the participation of three types of controlled objects: a group of pursuers, an evader, a group of defenders of the evader. Dynamic and inertial capabilities of all controlled objects are the same. The evader and the group of defenders act cooperatively. The group of pursuers is the other side of the conflict. If the positions of the pursuer and the defender of the evader coincide then both players die and cease to participate in the conflict-controlled process. In a conflict controlled process multiple capture of an evader occurs when a given number of pursuers catch the evader, and capture moments may not coincide. If (not necessarily least) capture moments coincide then nonstrict simultaneous multiple capture of the evader occurs. Finally, simultaneous multiple capture of the evader occurs when least capture moments appear identical. We obtain necessary and sufficient conditions for simultaneous multiple capture of the evader in terms of initial positions of the participants and other parameters of the conflict-controlled process.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment No. 075-01483-23-00, project FEWS-2020-0010.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
2. Pontryagin L. S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 112, pp. 27–60.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://www.springer.com/gp/book/9781461283188
4. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
5. Chernous'ko F. L., Melikyan A. A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Game-theoretic problems of control and search), Moscow: Nauka, 1978. https://elibrary.ru/item.asp?id=23449498
6. Petrosyan L. A. "Life-line" pursuit games with several players, *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Matematika*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=29854498
7. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://doi.org/10.1007/BF01070036
8. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for control of several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
9. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Petrov N. N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 5, pp. 725–732. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00095-6
11. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182. https://doi.org/10.1134/S0081543816050163
12. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. https://doi.org/10.1134/S0005117916050088

13. Petrov N. N., Solov'eva N. A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
14. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of a given number of evaders in L. S. Pontryagin's recurrent example, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"*, 2020, vol. 186, pp. 108–115 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115
15. Petrov N.N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 371–377. https://www.mathnet.ru/eng/semr1508
16. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 188–199 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199
18. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
19. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 1, pp. 36–40. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010
20. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 13–18. https://doi.org/10.20537/vm120302
21. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 3, pp. 314–320. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007
22. Blagodatskikh A. I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 4, pp. 20–26. https://doi.org/10.20537/vm130403
23. Blagodatskikh A. I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 13–20. https://www.mathnet.ru/eng/iimi297
24. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
25. Blagodatskikh A. I. A simple group pursuit problem with equal opportunities and the presence of evader's defenders, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 4, pp. 716–721. https://doi.org/10.1134/S0005117916040159
26. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 3, pp. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
27. Blagodatskikh A. I. Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 3–26. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-01
28. Rusnak I. The lady, the bandits and the body guards — a two team dynamic game, *IFAC Proceedings Volumes*, 2005, vol. 38, issue 1, pp. 441–446. https://doi.org/10.3182/20050703-6-CZ-1902.00935
29. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. Active target defense differential game with a fast defender, *2015 American Control Conference (ACC)*, 2015, pp. 3752–3757. https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7171913
30. Kumkov S. S., Patsko V. S. Attacker-defender-target problem in the framework of space intercept,

Proceedings of the 57th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, 2017.
31. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. The complete differential game of active target defense, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, vol. 191, pp. 675–699. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01816-z
32. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967. https://zbmath.org/0155.41601

Received 23.09.2023

Accepted 27.10.2023

Aleksandr Ivanovich Blagodatskikh, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aiblag@mail.ru

Aleksandr Sergeevich Bannikov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4422-1791
E-mail: asbannikov@gmail.com

Citation: A. I. Blagodatskikh, A. S. Bannikov. Simultaneous multiple capture in the presence of evader's defenders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 10–29.