УДК 517.977

© *И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов*

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМЕХАМИ И ВЫПУКЛОЙ ЦЕЛЬЮ

Рассматривается задача управления процессом нагрева заданного количества стержней с помощью изменения температур на их левых концах. Температуры на правых концах стержней формируются помехами. Функции плотности внутренних источников тепла стержней точно неизвестны, а заданы только границы области их возможных значений. Цель выбора управления заключается в том, чтобы привести вектор средних температур стержней в фиксированный момент времени на выпуклое терминальное множество. Для этой задачи найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные температуры стержней, чтобы цель могла быть достигнута при любых допустимых реализациях помех и функциях плотности внутренних источников тепла. Рассмотрен случай задачи с возможным изменением динамики управляемой системы.

Ключевые слова: управление, помеха, параболическая система.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-03

Введение

Математическое моделирование управляемых процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации приводит к задачам управления параболическими уравнениями [1–5]. На практике часто возникают задачи о нагреве стержня, на концах которого находятся управляемые источники тепла. Эти задачи сводятся к исследованию уравнения теплопроводности, граничные условия которого зависят от функций-управлений (см., например, [6, 7]).

Процессы управления реальными динамическими системами зачастую происходят в условиях, когда часть параметров системы не определены точно, а также имеется воздействие со стороны неконтролируемых внешних помех [8–11]. В работе [8] строится стабилизирующее управление для одномерного уравнения теплопроводности с неизвестной помехой в граничном условии. В статье [9] рассматривается задача стабилизации для многомерного уравнения теплопроводности с помехой, которая согласована с управлением. В работе [10] рассматривается уравнения теплопроводности с неопределенностью, возникшей в процессе моделирования теплового потока, и воздействием со стороны внешних помех. Для этой задачи построено управление подавлением помех по принципу обратной связи. В [11] разрабатывается адаптивный контроллер для стабилизации одномерного уравнения реакции–диффузии с неизвестным запаздыванием в граничном управлении.

При исследовании таких задач может быть применен метод оптимизации гарантированного результата [12]. В основе этого метода лежит теория дифференциальных игр (см., например, [13–16]). Неопределенности и помехи, воздействующие на систему, принимаются за второго игрока — противника. В работах [13, 14] управление строится в рамках теории позиционных дифференциальных игр. В [15] для решения игровой задачи в параболической системе применяется метод разрешающих функций. Также игровые задачи управления параболическими системами могут быть сведены к дифференциальным играм, динамика в которых описывается бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [16]).

В работе [17] рассмотрена задача о нагреве стержня посредством управления скоростью изменения температуры на его левом конце. Скорость изменения температуры на правом конце стержня определяется ограниченной по величине помехой. Функция плотности внутренних источников тепла стержня точно не задана, а известны только границы ее возможных значений. Цель управления — привести среднюю температуру стержня в фиксированный момент времени в малую окрестность желаемого значения при любой допустимой реализации помехи и функции плотности внутренних источников тепла. Среднее значение температуры вычисляется как интеграл от произведения температуры на заданную функцию. В [18] рассмотрена задача управления параболической системой, описывающей нагрев заданного количества стержней, с помощью точечных источников тепла, которые находятся на концах стержней. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени модуль линейной функции, определяемой с помощью средних температур стержней, не превышал заданного значения.

В данной работе решается модификация задачи [18], в которой в фиксированный момент времени требуется привести вектор средних значений температур стержней на выпуклое и замкнутое терминальное множество. После замены переменных, принимая помехи и неопределенности за управление второго игрока, задача сводится к однотипной дифференциальной игре с выпуклой целью [19].

Кроме того, в данной работе рассматривается вариант дифференциальной игры с выпуклой целью, в котором возможно изменение динамики первого игрока (поломка) (см., например, [20,21]). Время наступления поломки заранее не известно первому игроку. Множество разрешимости задачи о преследовании строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной выступает управление второго игрока и момент наступления поломки.

§ 1. Постановка задачи

Распространение температуры $T_i(x,t)$ в i-м ($i=\overline{1,m}$) однородном стержне единичной длины в зависимости от времени t описывается уравнением теплопроводности [18]

$$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2}+f_i(x,t),\quad 0\leqslant t\leqslant p,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad i=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Относительно непрерывных функций $f_i(x,t)$, являющихся плотностями источников тепла, известна их оценка

$$f^{(1)}(x,t)\leqslant f_i(x,t)\leqslant f^{(2)}(x,t),\quad 0\leqslant t\leqslant p,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Здесь функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ являются непрерывными.

В начальный момент времени $t=0$ заданы распределения температур $T_i(x,0)=g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, где $g_i(x)$ — непрерывные функции. Считаем, что управляемые температуры $T_i(0,t)$ и $T_i(1,t)$ на концах каждого i-го стержня изменяются согласно уравнениям

$$\frac{dT_i(0,t)}{dt}=a_i^{(1)}(t)+a^{(2)}(t)\xi_i(t),\quad |\xi_i(t)|\leqslant 1, \tag{3}$$

$$\frac{dT_i(1,t)}{dt}=b_i^{(1)}(t)+b^{(2)}(t)\eta_i(t),\quad |\eta_i(t)|\leqslant 1. \tag{4}$$

Здесь функции $a^{(2)}(t)$, $b^{(2)}(t)$, $a_i^{(1)}(t)$, $b_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,m}$, являются непрерывными при $0\leqslant t\leqslant p$, причем $a^{(2)}(t)\geqslant 0$, $b^{(2)}(t)\geqslant 0$. Функции $\xi_i(t)$ являются управлениями, а функции $\eta_i(t)$ — помехами.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Каждая функция $f_i\colon[0,1]\times[0,p]\to\mathbb{R}$ такова, что для любых чисел $0\leqslant\tau<\nu$ и непрерывных функций $\varrho_j\colon[\tau,\nu]\to\mathbb{R}$, $j=1,2$, $\beta\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ таких, что выполнено условие согласования $\varrho_1(\tau) = \beta(0)$, $\varrho_2(\tau) = \beta(1)$, первая краевая задача

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + f_i(x,t),$$
$$Q(0,t) = \varrho_1(t), \quad Q(1,t) = \varrho_2(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \nu;$$
$$Q(x,\tau) = \beta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

имеет единственное решение $Q(x,t)$ непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\tau \leqslant t \leqslant \nu$.

Задана непрерывная функция $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0. \tag{5}$$

С помощью функции $\sigma(x)$ определяется среднее значение

$$\int_0^1 T_i(x,t)\sigma(x)\,dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \quad i = \overline{1,m},$$

реализовавшейся в момент времени t температуры в i-ом стержне.

Задано число $c \geqslant 0$. Цель выбора управлений $\xi_i(t)$ (3) заключается в осуществлении неравенства

$$\max_{i,j=\overline{1,m}} \left| \int_0^1 T_i(x,p)\sigma(x)\,dx - \int_0^1 T_j(x,p)\sigma(x)\,dx \right| \leqslant c \tag{6}$$

при любых реализовавшихся помехах $\eta_i(t)$ (4), $i = \overline{1,m}$, и для любых непрерывных функций $f_i(x,t)$ (2), $i = \overline{1,m}$, удовлетворяющих предположению 1.

§ 2. Формализация задачи

Следуя работе [18] и учитывая специфику задачи (1), (3), (4), при построении управлений $\xi_i(t)$ считаем, что каждому моменту времени $0 \leqslant \nu \leqslant p$ и каждому возможному набору распределений температур в этот момент времени $T_i(x,\nu)$, $i = \overline{1,m}$ ставятся в соответствие измеримые функции $\xi_i\colon [\nu,p] \to [-1,1]$. Такое правило будем обозначать

$$\xi_i(t) = N_i(t, T_1(\cdot,\nu), \ldots, T_m(\cdot,\nu)), \quad t \in [\nu,p], \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Зафиксируем разбиение

$$\omega\colon 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{q+1} = p$$

отрезка $[0,p]$ с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \leqslant k \leqslant q} (t_{k+1} - t_k).$$

Пусть в момент времени t_k, $k = \overline{0,q}$, реализовались распределения температур $T_i^{(\omega)}(x,t_k)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $i = \overline{1,m}$. Обозначим

$$\xi_i^{(k)}(t) = N_i(t, T_i^{(\omega)}(\cdot,t_k)), \quad t \in [t_k,p].$$

Пусть реализовались измеримые помехи $\eta_i^{(k)}\colon [t_k,t_{k+1}] \to [-1,1]$ и непрерывные функции $f_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$.

Обозначим через $T_i^{(\omega)}(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ решение уравнения (1) со следующими начальными и краевыми условиями:

$$T_i(x,t) = T_i^{(\omega)}(x,t_k), \quad x \in [0,1]; \quad T_i(0,t) = T_i^{(\omega)}(0,t), \quad T_i(1,t) = T_i^{(\omega)}(1,t),$$

где

$$
\begin{aligned}
T_i^{(\omega)}(0,t) &= T_i^{(\omega)}(0,t_k) + \int_{t_k}^{t} (a_i^{(1)}(r) + a^{(2)}(r)\xi_i^{(k)}(r))\,dr,\\
T_i^{(\omega)}(1,t) &= T_i^{(\omega)}(1,t_k) + \int_{t_k}^{t} (b_i^{(1)}(r) + b^{(2)}(r)\eta_i^{(k)}(r))\,dr.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Отметим, что первая краевая задача (1), (8) имеет единственное решение [22].

Определение 1. Будем говорить, что управление вида (7) гарантирует выполнение поставленной цели (6), если для любого числа $\gamma > c$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega) < \delta$, для любых непрерывных функций $f_i(x,t)$ (2), удовлетворяющих предположению 1, и при любых измеримых реализациях помех $\eta_i\colon [t_k, t_{k+1}] \to [-1,1]$, $i = \overline{1,m}$, выполнены неравенства

$$
\left| \int_0^1 T_i^{(\omega)}(x,p)\sigma(x)\,dx - \int_0^1 T_j^{(\omega)}(x,p)\sigma(x)\,dx \right| \leqslant \gamma, \quad i,j = \overline{1,m}. \tag{9}
$$

§ 3. Переход к однотипной задаче

Обозначим через $\psi(x,\tau)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant p$ решение следующей первой краевой задачи

$$
\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi(x,\tau)}{\partial x^2}, \quad \psi(x,0) = \sigma(x), \quad \psi(0,\tau) = \psi(1,\tau) = 0. \tag{10}
$$

Из равенства (5) следует, что условия согласования на концах отрезка в задаче (10) выполнены.

Используя условия (2), можно показать [23], что

$$
\begin{aligned}
\left\{ \int_0^1 f_i(x,t)\psi(x,p-t)dx\colon f^{(1)}(x,t) \leqslant f_i(x,t) \leqslant f^{(2)}(x,t) \right\} &= \\
= \{ c^{(1)}(t) + c^{(2)}(t)s_i \colon |s_i| \leqslant 1\}, \quad i = \overline{1,m}&,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c^{(1)}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (f^{(1)}(x,t) + f^{(2)}(x,t))\psi(x,p-t)\,dx,\\
c^{(2)}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (f^{(2)}(x,t) - f^{(1)}(x,t))|\psi(x,p-t)|\,dx.
\end{aligned}
$$

Отметим, что функции $c^{(1)}(t)$ и $c^{(2)}(t)$ являются непрерывными при $0 \leqslant t \leqslant p$ и $c^{(2)}(t) \geqslant 0$.

Зафиксируем управления (7) и разбиение ω. Обозначим

$$
\begin{aligned}
y_i^{(\omega)}(t) = \int_0^1 T_i^{(\omega)}(x,t)\psi(x,p-t)\,dx + T_i^{(\omega)}(0,t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0,p-\tau)}{\partial x}\,d\tau -{}\\
- T_i^{(\omega)}(1,t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1,p-\tau)}{\partial x}\,d\tau +{}\\
+ \int_t^p \left(a_i^{(1)}(\tau)\int_\tau^p \frac{\partial\psi(0,p-\tau)}{\partial x}\,d\tau - b_i^{(1)}(\tau)\int_\tau^p \frac{\partial\psi(1,p-\tau)}{\partial x}d\tau + c^{(1)}(\tau)\right) d\tau.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Тогда, учитывая формулы (8), (10) и (11), получим [23]

$$
\dot{y}_i^{(\omega)}(t) = \left(a^{(2)}(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0,p-\tau)}{\partial x}\,d\tau \right)\xi^{(k)}(t) - \left(b^{(2)}(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1,p-\tau)}{\partial x}\,d\tau \right)\eta^{(k)}(t) + c^{(2)}(t)s_i \tag{13}
$$

при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $i = \overline{1,m}$. Обозначим

$$a(t) = \left| a^{(2)}(t) \int_t^p \frac{\partial \psi(0, p-\tau)}{\partial x}\, d\tau \right|, \tag{14}$$

$$b(t) = \left| b^{(2)}(t) \int_t^p \frac{\partial \psi(1, p-\tau)}{\partial x}\, d\tau \right| + c^{(2)}(t), \tag{15}$$

$$u_i^{(k)}(t) = -\xi_i^{(k)}(t) \operatorname{sign} \left(\int_t^p \frac{\partial \psi(0, p-\tau)}{\partial x}\, d\tau \right). \tag{16}$$

Из (13)–(16) следует, что

$$\dot{y}_i^{(\omega)}(t) = -a(t) u_i^{(k)}(t) + b(t) v_i^{(k)}(t), \quad |v_i^{(k)}(t)| \leqslant 1, \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}. \tag{17}$$

Обозначим

$$z = (y_1, \ldots, y_m), \quad u = (u_1, \ldots, u_m), \quad v = (v_1, \ldots, v_m).$$

Тогда уравнение (17) можно записать в следующем виде:

$$\dot{z}^{(\omega)}(t) = -a(t) u^{(k)}(t) + b(t) v^{(k)}(t), \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}. \tag{18}$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^m$, $u \in Q$, $v \in Q$, где

$$Q = \{ w = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m \colon |w_i| \leqslant 1, i = \overline{1,m} \}.$$

Далее, используя формулу (12), запишем неравенство (9) в следующем виде:

$$F(z(p)) = \max_{i,j=\overline{1,m}} \left| y_i^{(\omega)}(p) - y_j^{(\omega)}(p) \right| \leqslant \gamma. \tag{19}$$

Отметим, что функции (14) и (15) являются непрерывными, а множество Q — выпуклым компактом.

§ 4. Условия возможности окончания в однотипной задаче

Рассмотрим однотипную дифференциальную игру (18) с выпуклой целью (19). Обозначим

$$\beta(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_\tau^p (b(r) - a(r))\, dr, \quad \alpha(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_t^\tau (a(r) - b(r))\, dr, \tag{20}$$

$$Z(\varepsilon) = \{ z \in \mathbb{R}^m \colon F(z) \leqslant \varepsilon \} \quad \text{при} \quad \varepsilon \geqslant 0. \tag{21}$$

В работе [19, теорема 1] доказано, что для замкнутого выпуклого множества $Z(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ и для любого выпуклого компакта Q альтернированный интеграл [24] в игре (18), (19) задается формулой

$$W(t, \varepsilon) = Z(\varepsilon) \dot{-} \beta(t) Q + \alpha(t) Q. \tag{22}$$

Здесь для двух множеств A и B из $\mathbb{R}^m$ [24] посредством $A \dot{-} B = \{ z \in \mathbb{R}^m \colon z + B \subset A \}$ обозначена их геометрическая разность. Отметим, что функции (20) являются непрерывными.

Из свойств альтернированного интеграла следует, что, если начальное состояние $z(0) \notin W(0, c)$, то можно построить управление $v \in Q$ такое, что при любом допустимом управлении $u \in Q$ выполнено условие $z(p) \notin Z(c)$. Согласно (19) и (21) это значит, что $F(z(p)) > c$.

Т е о р е м а 1. *Пусть начальное распределение температур* $T_i(x,0) = g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, *и число* $c \geqslant 0$ *таковы, что выполнено включение* $z(0) \in W(0,c)$. *Тогда существует управление* (7)*, гарантирующее выполнение поставленной цели* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $t \leqslant p$, $z \in \mathbb{R}^m$ обозначим

$$V(t,z) = \min_{u\in Q} \max_{v\in Q} F(z - \alpha(t)u + \beta(t)v). \tag{23}$$

Тогда альтернированный интеграл (22) можно записать в следующем виде:

$$W(t,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^m \colon V(t,z) \leqslant \varepsilon\}.$$

Для начального состояния $z(0) \in \mathbb{R}^m$ положим $V_0 = V(0, z(0))$. При $t \leqslant p$, $z \in \mathbb{R}^m$ обозначим

$$\varepsilon(t,z) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \colon \min V(t, z + \varepsilon u^* - \varepsilon u) \leqslant V_0;\ u^*, u \in Q\}. \tag{24}$$

Если $\varepsilon(t,z) < +\infty$, то из (24) следует, что при некоторых $u(t,z) \in Q$, $u^*(t,z) \in Q$ выполнено неравенство

$$V(t, z + \varepsilon(t,z)u^*(t,z) - \varepsilon(t,z)u(t,z)) \leqslant V_0.$$

Эту функцию $u(t,z) \in Q$ берем в качестве управления. Тогда [19, теорема 2] при любом допустимом управлении $v \in Q$ выполнено неравенство

$$\varepsilon(p, z_\omega(p)) \leqslant l(\omega) = \max_{0\leqslant k\leqslant q+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(r)\, dr.$$

Отсюда и из формулы (23) получим, что для любой ломаной (17) выполнено неравенство

$$\min_{u^*,u} f(z_\omega(p) + \varepsilon u^* - \varepsilon u) \leqslant V_0 \tag{25}$$

при некотором $0 \leqslant \varepsilon \leqslant l(\omega)$. Выпуклая функция $F(z)$ (19) удовлетворяет [25] условию Липшица с некоторой константой L. Поэтому из (25) получим, что $F(z_\omega(p)) \leqslant V_0 + Ll(\omega)$. Поскольку $l(\omega) \to 0$ при $d(\omega) \to 0$, то построенное управление $u(t,z)$ и любое число $c \geqslant V_0$ удовлетворяют определению 1.

Отметим, что управление ξ (7), которое решает поставленную задачу, определяется из формулы (16). □

§ 5. Задача с возможной поломкой

Рассмотрим вариант исходной задачи, в которой в уравнениях (3), $i = \overline{1,m}$, в заранее неизвестный момент времени $\theta \in [t_0, p]$ может произойти изменение функции $a^{(2)}(t)$ (поломка):

$$a^{(2)}(t,\theta) = a_1^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad t < \theta, \quad a^{(2)}(t,\theta) = a_2^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad \theta \leqslant t.$$

Учитывая (14), после замены переменных получим однотипную дифференциальную игру (18) с возможной поломкой в динамике первого игрока $\theta \in [t_0, p]$:

$$\begin{gathered}\dot z = -a(t,\theta)u + b(t)v, \quad t \leqslant p, \quad u \in U, \quad v \in Q, \quad z(p) \in Z(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m; \\ a(t,\theta) = a_1(t) \quad \text{при} \quad t < \theta, \quad a(t,\theta) = a_2(t) \quad \text{при} \quad \theta \leqslant t.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь функции $a_1(t) \geqslant 0$, $a_2(t) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$ для общности изложения считаем суммируемыми на каждом отрезке полуоси $(-\infty, p]$. Момент поломки θ первому игроку заранее неизвестен. Далее рассмотрим случай, когда момент поломки θ выбирает второй игрок.

Запишем альтернированный интеграл для каждого фиксированного момента поломки $\theta \in [t_0, p]$:

$$W(t, \varepsilon, \theta) = Z(\varepsilon) \dot{-} \beta(t, \theta) Q + \alpha(t, \theta) Q, \tag{27}$$

Здесь

$$\alpha(t, \theta) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_t^\tau (a(r, \theta) - b(r))\, dr, \quad \beta(t, \theta) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_\tau^p (b(r) - a(r, \theta))\, dr.$$

Из [18] известно, что

$$\alpha(t, \theta) - \beta(t, \theta) = \int_t^p (a(r, \theta) - b(r))\, dr \quad \text{при всех} \quad \theta \in [t_0, p]. \tag{28}$$

Зафиксируем $\varepsilon \geqslant 0$ и определим множество

$$W(t) = \bigcap_{\theta \in [t_0, p]} W(t, \varepsilon, \theta). \tag{29}$$

П р е д п о л о ж е н и е 2. Точка 0 является внутренней точкой множества Q.

Т е о р е м а 2. *Множество* $W(t)$ (29) *определяется следующими формулами:*

$$W(t) = \varnothing, \quad \textit{если} \quad Z(\varepsilon) \dot{-} \max_{t_0 \leqslant \theta \leqslant p} \beta(t, \theta) = \varnothing; \tag{30}$$

$$W(t) = Z(\varepsilon) \dot{-} \beta(t, \theta_*) Q + \alpha(t, \theta_*) Q, \quad \textit{если} \quad Z(\varepsilon) \dot{-} \max_{t_0 \leqslant \theta \leqslant p} \beta(t, \theta) \neq \varnothing. \tag{31}$$

Здесь за θ_* обозначено решение задачи

$$\min_{t_0 \leqslant \theta \leqslant p} \int_t^p (a(r, \theta) - b(r))\, dr. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Случай 1.* Пусть выполнено второе равенство в (30). Тогда существует $\widehat{\theta} \in [t_0, p]$ такое, что $Z(\varepsilon) \dot{-} \beta(t, \widehat{\theta}) = \varnothing$. Следовательно, из формулы (27) получим $W(t, \varepsilon, \widehat{\theta}) = \varnothing$. Далее, по формуле (29) имеем $W(t) = \varnothing$.

Случай 2. Пусть выполнено неравенство в (31). Тогда $Z(\varepsilon) \dot{-} \beta(t, \theta)$ при всех $\theta \in [t_0, p]$ и $W(t, \varepsilon, \theta) \neq \varnothing$ при всех $\theta \in [t_0, p]$.

Далее, покажем, что $W(t, \varepsilon, \theta_*) \subseteq W(t, \varepsilon, \theta)$ при всех $\theta \in [t_0, p]$. Если доказать это, то отсюда и из (29) будет следовать, что $W(t) = W(t, \varepsilon, \theta_*)$.

Предположим противное. Найдутся $\theta \in [t_0, p]$ и $w_* \in W(t, \varepsilon, \theta_*)$ такие, что $w_* \notin$ $\notin W(t, \varepsilon, \theta)$. Поскольку $W(t, \varepsilon, \theta)$ выпуклое и замкнутое множество, применим теорему о строгой отделимости точки от выпуклого множества [26, с. 28]. Таким образом, найдется $\psi \in \mathbb{R}^m$ ($\|\psi\| = 1$) такой, что

$$\langle \psi, w \rangle < \langle \psi, w_* \rangle \quad \text{для всех} \quad w \in W(t, \varepsilon, \theta).$$

Здесь посредством $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Отсюда и из (27) следует, что существуют $z_* \in Z(\varepsilon)$, $u_* \in Q$, для которых выполнено неравенство

$$\langle \psi, z + \alpha(t, \theta) u - \beta(t, \theta) v \rangle < \langle \psi, z_* + \alpha(t, \theta_*) u_* - \beta(t, \theta_*) v_* \rangle \tag{33}$$

при любых $z \in Z(\varepsilon)$, $u \in Q$, $v \in Q$, $v_* \in Q$.

Случай 2.1. Пусть $\langle\psi, u_*\rangle > 0$. Возьмем $z = z_*$, $u = v = v_* = u_*$ и подставим их в (33). Отсюда и из (28) получим, что

$$\int_t^p (a(r,\theta) - b(r))\,dr < \int_t^p (a(r,\theta_*) - b(r))\,dr, \tag{34}$$

что противоречит (32).

Случай 2.2. Пусть $\langle\psi, u_*\rangle \leqslant 0$. Согласно предположению 2 найдется $\widehat{u} \in Q$ такой, что $\langle\psi, \widehat{u}\rangle > 0$. Затем, используя неотрицательность функции $\alpha(t,\theta_*)$, оценим сверху правую часть неравенства (33) следующим выражением:

$$\langle\psi, z_* + \alpha(t,\theta_*)\widehat{u} - \beta(t,\theta_*)v_*\rangle. \tag{35}$$

Далее, возьмем $z = z_*$, $u = v = v_* = \widehat{u}$ и подставим их в левую часть неравенства (33) и выражение (35). Отсюда и из (28) получим неравенство (34), что противоречит (32).

Т е о р е м а 3. *Пусть для любого* $t \in [t_0, p]$ *найдется* $\theta_* \in [t_0, p]$ *такое, что*

$$W(t) = W(t, \varepsilon, \theta_*).$$

Тогда множества $W(t)$ *задают необходимые и достаточные условия окончания в дифференциальной игре* (26) *при* $t \in [t_0, p]$.

Доказательство теоремы следует из результатов работы [20]. □

С л е д с т в и е 1. *Множества* $W(t)$, $t \in [t_0, p]$, *из утверждения теоремы* 2 *удовлетворяют условиям теоремы* 3.

§ 6. Заключение

В данной работе рассмотрена задача управления параболической системой, описывающей нагрев заданного количества стержней, с выпуклым и замкнутым терминальным множеством. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых существуют управления (7), гарантирующие достижение поставленной цели (6) при любых допустимых реализациях помех и функциях плотности внутренних источников тепла, удовлетворяющих предположению 1. Выполнение условия (6) означает, что в фиксированный момент времени максимальное отклонение средних температур стержней не больше заданного числа.

В перспективе планируется рассмотреть вариант этой задачи, когда в условии (6) рассчитывается максимальное отклонение температур в разных точках одного и того же стержня.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19–11–00105. https://rscf.ru/project/19-11-00105/

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов Ю. С. Позиционное управление в параболических системах // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 195–201.
2. Короткий А. И., Осипов Ю. С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. № 4. С. 599–605.
3. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
4. Максимов В. И. О реконструкции входного воздействия системы реакции–диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 6. С. 938–948. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf11567

5. Casas E., Yong Jiongmin. Optimal control of a parabolic equation with memory // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2023. Vol. 29. Article number: 23. https://doi.org/10.1051/cocv/2023013
6. Lohéac J. Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations // Vietnam Journal of Mathematics. 2021. Vol. 49. Issue 3. P. 845–870. https://doi.org/10.1007/s10013-021-00497-5
7. Barseghyan V., Solodusha S. The problem of boundary control of the thermal process in a rod // Mathematics. 2023. Vol. 11. Issue 13. 2881. https://doi.org/10.3390/math11132881
8. Dai Jiguo, Ren Beibei. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
9. Zheng Guojie, Li Jun. Stabilization for the multi-dimensional heat equation with disturbance on the controller // Automatica. 2017. Vol. 82. P. 319–323. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.04.011
10. Feng Hongyinping, Xu Cheng-Zhong, Yao Peng-Fei. Observers and disturbance rejection control for a heat equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65. Issue 11. P. 4957–4964. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3022849
11. Wang Shanshan, Qi Jie, Diagne Mamadou. Adaptive boundary control of reaction–diffusion PDEs with unknown input delay // Automatica. 2021. Vol. 134. 109909. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109909
12. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
13. Осипов Ю. С., Охезин С. П. К теории дифференциальных игр в параболических системах // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1267–1270. https://www.mathnet.ru/rus/dan39791
14. Охезин С. П. Дифференциальная игра сближения–уклонения для параболической системы с интегральными ограничениями на управления игроков // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 202–209.
15. Власенко Л. А., Руткас А. Г., Чикрий А. А. О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 26–40. https://www.mathnet.ru/rus/timm1168
16. Tukhtasinov M., Ibragimov G., Kuchkarova S., Hasim R. M. Differential games for an infinite 2-systems of differential equations // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 13. 1467. https://doi.org/10.3390/math9131467
17. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
18. Изместьев И. В., Ухоботов В. И. Об одной задаче управления нагревом системы стержней при наличии неопределенности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 546–556. https://doi.org/10.35634/vm220404
19. Ухоботов В. И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 196–204. https://www.mathnet.ru/rus/timm622
20. Никольский М. С., Пэн Чжэнсян. Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1923–1927. https://www.mathnet.ru/rus/de8489
21. Ухоботов В. И. Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278
22. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
23. Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 297–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
24. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник (новая серия). 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. https://www.mathnet.ru/rus/sm2728

25. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
26. Петров Н. Н. Введение в выпуклый анализ. Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2009.

Поступила в редакцию 27.09.2023

Принята к публикации 30.10.2023

Изместьев Игорь Вячеславович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Цитирование: И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов. Задача управления параболической системой с помехами и выпуклой целью // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 30–42.

I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov
Control of a parabolic system with disturbances and a convex goal

Keywords: control, disturbance, parabolic system.

MSC2020: 35K05, 49N70, 91A23

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-03

The problem of controlling the heating process of a given number of rods by changing the temperatures at their left ends is considered. Temperatures at the right ends of the rods are formed by disturbances. The density functions of the internal heat sources of the rods are not known exactly, and only the boundaries of the range of their possible values are given. The goal of the choice of a control is to lead the vector of average temperatures of the rods at a fixed time to a convex terminal set. For this problem, necessary and sufficient conditions have been found that must be satisfied by the initial temperatures of the rods so that the goal can be achieved under any admissible realization of disturbances and density functions of internal heat sources. The case of a problem with a possible change in the dynamics of the controlled system is considered.

Funding. The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation no. 19–11–00105. https://rscf.ru/project/19-11-00105/

REFERENCES

1. Osipov Iu. S. Position control in parabolic systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 187–193. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90001-6
2. Korotkii A. I., Osipov Iu. S. Approximation in problems of position control of parabolic system, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, issue 4, pp. 631–637. https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90004-7
3. Egorov A. I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* (Optimal control of thermal and diffusion processes), Moscow: Nauka, 1978.
4. Maksimov V. I. On the reconstruction of an input disturbance in a reaction–diffusion system, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2023, vol. 63, issue 6, pp. 990–1000. https://doi.org/10.1134/S0965542523060143
5. Casas E., Yong Jiongmin. Optimal control of a parabolic equation with memory, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2023, vol. 29, article number: 23. https://doi.org/10.1051/cocv/2023013
6. Lohéac J. Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations, *Vietnam Journal of Mathematics*, 2021, vol. 49, issue 3, pp. 845–870. https://doi.org/10.1007/s10013-021-00497-5
7. Barseghyan V., Solodusha S. The problem of boundary control of the thermal process in a rod, *Mathematics*, 2023, vol. 11, issue 13, 2881. https://doi.org/10.3390/math11132881
8. Dai Jiguo, Ren Beibei. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, issue 1, pp. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
9. Zheng Guojie, Li Jun. Stabilization for the multi-dimensional heat equation with disturbance on the controller, *Automatica*, 2017, vol. 82, pp. 319–323. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.04.011
10. Feng Hongyinping, Xu Cheng-Zhong, Yao Peng-Fei. Observers and disturbance rejection control for a heat equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, vol. 65, issue 11, pp. 4957–4964. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3022849
11. Wang Shanshan, Qi Jie, Diagne Mamadou. Adaptive boundary control of reaction–diffusion PDEs with unknown input delay, *Automatica*, 2021, vol. 134, 109909. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109909
12. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamical system), Moscow: Nauka, 1985.

13. Osipov Yu. S., Okhezin S. P. On the theory of differential games in parabolic systems, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 278–282. https://zbmath.org/0367.90144
14. Okhezin S. P. Differential encounter–evasion game for a parabolic system under integral constraints on the player's controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 194–201. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90002-8
15. Vlasenko L. A., Rutkas A. G., Chikrii A. A. On a differential game in an abstract parabolic system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229
16. Tukhtasinov M., Ibragimov G., Kuchkarova S., Hasim R. M. Differential games for an infinite 2-systems of differential equations, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 13, 1467. https://doi.org/10.3390/math9131467
17. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
18. Izmest'ev I. V., Ukhobotov V. I. On one problem of controlling the heating of a rod system under uncertainty, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 546–556 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220404
19. Ukhobotov V. I. One type differential games with convex goal, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timm622
20. Nikol'skij M. S., Pang Chg. A differential pursuit game with a breakdown in the dynamics, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, issue 11, pp. 1775–1778. https://zbmath.org/0885.90140
21. Ukhobotov V. I. On a control problem under a disturbance and possible breakdown, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 307, suppl. 1, pp. 159–171. https://doi.org/10.1134/S0081543819070137
22. Godunov S. K. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1971.
23. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. A control problem for a rod heating process with unknown temperature at the right end and unknown density of the heat source, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 297–305 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
24. Pontrjagin L. S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
25. Pshenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* (Convex analysis and extremal problems), Moscow: Nauka, 1980.
26. Petrov N. N. *Vvedenie v vypuklyi analiz* (Introduction to convex analysis), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.

Received 27.09.2023

Accepted 30.10.2023

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Citation: I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov. Control of a parabolic system with disturbances and a convex goal, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 30–42.