Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2023. Том 62. С. 71–86

УДК 519.633

© *В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается волновое уравнение с функциональным запаздыванием. Производится дискретизация задачи. Приводятся конструкции разностного метода с весами с кусочно-линейной интерполяцией. Конструируется базовый метод с весами с кусочно-кубической интерполяцией. Изучается порядок невязки без интерполяции базового метода и выписываются коэффициенты разложения невязки относительно шагов дискретизации по времени и пространству. Доказывается, что метод с весами с кусочно-кубической интерполяцией сходится с порядком 2 в энергетической норме. Выписывается уравнение для главного члена асимптотического разложения глобальной погрешности базового метода. При определенных предположениях обосновывается законность применения процедуры экстраполяции по Ричардсону, и строится соответствующий численный метод, имеющий четвертый порядок сходимости относительно шагов дискретизации по времени и пространству. Доказывается справедливость формул Рунге практической оценки погрешности. Приводятся результаты численных экспериментов на тестовом примере.

Ключевые слова: волновое уравнение, функциональное запаздывание, численный метод с весами, кусочно-кубическая интерполяция, метод Ричардсона, порядок сходимости.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-06

Введение

Уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом широко применяются в математическом моделировании, см., например, монографии [1,2] и многочисленные журнальные публикации, например, [3–6]. Среди этих уравнений значительное место занимают уравнения гиперболического типа с функциональным эффектом запаздывания. Получить решения таких задач аналитическими способами удается крайне редко [7]. Поэтому быстро развиваются различные численные методы решения уравнений в частных производных (в том числе, дробного порядка) с эффектом запаздывания [8–13]. В частности, в работе [14] для волнового уравнения с запаздыванием были построены и изучены сеточные схемы с весами и кусочно-линейной интерполяцией, было доказано, что при определенных условиях численные методы сходятся со вторым порядком относительно шагов дискретизации Δ по времени и h по пространству.

Однако, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, пока нет таких универсальных алгоритмов, которые могли бы быть положены в основу пакетов прикладных программ для решения подобных задач. На наш взгляд, одной из причин этого является отсутствие процедур автоматического выбора шагов по времени и пространству с помощью заданной точности. В данной работе предлагается процедура экстраполяции Ричардсона, которая не только позволяет построить новый метод порядка $\Delta^4 + h^4$ на основе базового метода порядка $\Delta^2 + h^2$, но и применять процедуру Рунге практической оценки погрешности, что в перспективе может быть использовано для организации методов с автоматическим выбором шага. Основной результат статьи состоит в обосновании порядка асимптотического разложения глобальной погрешности для базового метода с весами с кусочно-кубической интерполяцией для решения волнового уравнения с функциональным запаздыванием.

Несмотря на то что идеи метода экстраполяции Ричардсона являются старыми и классическими, интерес к его конструкциям в последнее время возрастает. Например, он недавно разработан для разных задач (волновые уравнения [15], уравнения соболевского типа [16]) с постоянным запаздыванием. В отличие от этих и других работ для уравнений с постоянным запаздыванием, в данной работе наличие функционального запаздывания при выводе уравнения для асимптотического разложения глобальной погрешности приводит к функциональному уравнению в частных производных.

§ 1. Формулировка задачи

Рассмотрим уравнение гиперболического типа с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,u_t(x,\cdot)), \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant X$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция решения, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s),\ \tau \leqslant s \leqslant 0\}$ — история искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Заданы граничные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(X,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

и начальные условия

$$u(x,s) = \varphi(x,s), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\tau \leqslant s \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Кроме того, при доказательстве сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x,t)$.

Обозначим через $C = C[-\tau,0]$ множество функций $q(s)$, непрерывных на отрезке $[-\tau,0]$, с нормой $\|q(\cdot)\|_C = \max\limits_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} |q(s)|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ липшицев с константой L_f по последнему аргументу, т. е. существует постоянная L_f такая, что для всех $x \in [0,X]$, $t \in [0,T]$, $v^1(\cdot) \in C$, $v^2(\cdot) \in C$ выполняется

$$|f(x,t,v^1(\cdot)) - f(x,t,v^2(\cdot))| \leqslant L_f \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_C. \tag{1.4}$$

§ 2. Дискретизация. Схема с весами с кусочно-линейной интерполяцией

Введем шаг по времени $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, где M_0 — натуральное, и пусть $M = [\frac{T}{\Delta}]$. Введем точки (узлы по времени) $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \ldots, M$. Разобьем отрезок $[0,X]$ на части, введя шаг по пространству $h = X/N$, где N — целое, введем точки (узлы по пространству) $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$. Аппроксимацию функции $u(x_i,t_j)$ в узлах будем обозначать u^i_j.

При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j, $j = 0, \ldots, M$: $\{u^i_k\}_j = \{u^{i,k},\ j - M_0 \leqslant k \leqslant j\}$. Оператором интерполяции дискретной предыстории назовем отображение $I\colon \{U^i_k\}_j \to u^i_j(\cdot) \in C[t_j - \tau, t_j]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство

$$|U^i_j(t) - u(x_i,t)| \leqslant C_1 \max_{j-M_0 \leqslant k \leqslant j} |u^i_k - u(x_i,t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию $I(\{u_k^i\}_j) = u_j^i(\cdot)$, задаваемую соотношениями

$$U_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}\big((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i\big), \quad t_{k-1} \leqslant t_j + s \leqslant t_k. \tag{2.1}$$

Кусочно-линейная интерполяция имеет порядок 2, если точное решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ [17, с. 97].

Для $0 \leqslant s \leqslant 1$ рассмотрим семейство методов с весами:

$$\begin{gathered}\frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta^2} = s\frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + s\frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_{j-1}^i + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \\ + (1-2s)\frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + f\big(x_i, t_j, (u_j^i)_{t_j}(\cdot)\big),\end{gathered} \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$u_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

и граничными условиями

$$u_j^0 = 0, \quad u_j^N = 0, \quad j = 0, \dots, M,$$

где $(u_j^i)_{t_j}(\cdot)$ — предыстория к моменту t_j результата действия оператора кусочно-линейной интерполяции (2.1).

В дальнейшем будем предполагать, что число $\sigma = \Delta^2/h^2$ зафиксировано.

Методы с весами (2.2) с кусочно-линейной интерполяцией (2.1) при выполнении условия устойчивости

$$s > \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\sigma}) \tag{2.3}$$

были изучены в [8, 14], где была доказана их сходимость. Наша цель: на основании этого семейства методов построить методы более высокого порядка сходимости.

§ 3. Базовый метод с весами с кусочно-кубической интерполяцией

Построим базовый метод с весами с более точным способом интерполяции. В качестве такого способа выберем кусочно-кубическую интерполяцию, хотя можно применять любой способ интерполяции четвертого порядка.

Будем разбивать отрезок запаздывания так, чтобы число точек делилось на 3: $M_0 = 3m$, где m — натуральное. Пусть по-прежнему $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, $M = [\frac{T}{\Delta}]$, точки разбиения по времени $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \dots, M$. Разбиение по пространству не меняется.

Опишем кусочно-кубическую интерполяцию. При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ и фиксированном $i = 0, \dots, M-1$ разобьем отрезок $[t_j - \tau, t_j]$ справа на подотрезки $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $l = 0, \dots, m-1$, длиной 3Δ таким образом, что $t_{j,0} = t_j, t_{j,1} = t_{j-3}, \dots, t_{j,m} = t_{j-3m}$. Таким образом, $t_{j,l} = t_{j-3l}$, $l = 0, \dots, m$.

На каждом подотрезке $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $i = 0, \dots, N$, построим кубическую параболу — интерполяционный многочлен $L_3^l(t)$ в форме Лагранжа по узлам $t_{j-3l-3}, t_{j-3l-2}, t_{j-3l-1}, t_{j-2l}$ и значениям в узлах $u_{j-3l-3}^i, u_{j-3l-2}^i, u_{j-3l-1}^i, u_{j-3l}^i$:

$$\begin{gathered}L_3^l(t) = \\ = u_{j-3l-3}^i\frac{(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l-1})(t - t_{j-3l})}{6\Delta^3} - u_{j-3l-2}^i\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-1})(t - t_{j-3l})}{2\Delta^3} + \\ + u_{j-3l-1}^i\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l})}{2\Delta^3} - u_{j-3l}^i\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l-1})}{6\Delta^3}.\end{gathered}$$

В случае, если для узла, например, для $t_{j,l+1} = t_{j-3l-3}$ выполняется $t_{j-3l-3} < 0$, т.е. $j-3l-3<0$, то значение в узле берется из начальных условий $u^i_{j-3l-3} = \varphi(x_i, t_{j-3l-3})$.

Кусочно-кубическая интерполяция $I(\{u^i_k\}_j) = u^i_j(\cdot)$ задается равенствами

$$u^i_j(t_j+s) = L^l_3(t_j+s), \quad t_{j-3l-3} \leqslant t_j+s \leqslant t_{j-3l}. \tag{3.1}$$

Кусочно-кубическая интерполяция имеет порядок 4, если точное решение $u(x,t)$ четырежды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ [17, с. 97].

Методом с весами с кусочно-кубической интерполяцией назовем разностную схему (2.2), где $(u^i_j)_{t_j}(\cdot)$ — предыстория к моменту t_j результата действия оператора кусочно-кубической интерполяции (3.1). Хотя этот метод также имеет порядок $h^2+\Delta^2$, но схема экстраполяции Ричардсона, примененная к этому методу, позволяет повысить порядок до $h^4+\Delta^4$.

§ 4. Невязка без интерполяции метода с весами

Невязкой без интерполяции метода (2.2) назовем

$$\begin{aligned} \psi^i_j = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{\Delta^2} - \\ - s\frac{u(x_{i-1},t_{j+1}) - 2u(x_i,t_{j+1}) + u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2} - \\ - (1-2s)\frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} - \\ - s\frac{u(x_{i-1},t_{j-1}) - 2u(x_i,t_{j-1}) + u(x_{i+1},t_{j-1})}{h^2} - f(x_i,t_j,u_{t_j}(x,\cdot)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Л е м м а 4.1. *Если точное решение $u(x,t)$ шесть раз непрерывно дифференцируемо по x и по t, причем смешанные частные производные до шестого порядка непрерывны, то невязка без интерполяции* (4.1) *представима в виде*

$$\psi^i_j = R_1(x_i,t_j)\Delta^2 + R_2(x_i,t_j)h^2 + R_3\Delta^4 + R_4h^4 + R_5\Delta^2h^2. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для значений функции $u(x,t)$, входящих в определение невязки без интерполяции, имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} u(x_i,t_{j+1}) = u(x_i,t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j)\Delta^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_j)\Delta^3 + \\ + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_j)\Delta^4 + \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial t^4}(x_i,t_j)\Delta^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{1j})\Delta^6, \\ u(x_i,t_{j-1}) = u(x_i,t_j) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j)\Delta^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_j)\Delta^3 + \\ + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_j)\Delta^4 - \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,t_j)\Delta^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{2j})\Delta^6, \\ u(x_{i-1},t_j) = u(x_i,t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)h^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j)h^3 + \\ + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^4 - \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_j)h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{1i},t_j)h^6, \\ u(x_{i+1},t_j) = u(x_i,t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j)h^3 + \\ + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^4 + \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_j)h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{2i},t_j)h^6, \\ u(x_{i-1},t_{j+1}) = u(x_i,t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j+1})h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})h^2 - \\ - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j+1})h^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^4 - \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j+1})h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{3i},t_j)h^6, \end{aligned}$$

$$u(x_{i+1},t_{j+1}) = u(x_i,t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j+1})h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})h^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j+1})h^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^4 + \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j+1})h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{4i},t_j)h^6,$$
$$u(x_{i-1},t_{j-1}) = u(x_i,t_{j-1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j-1})h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j-1})h^2 -$$
$$- \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j-1})h^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j-1})h^4 - \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j-1})h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{5i},t_j)h^6,$$
$$u(x_{i+1},t_{j-1}) = u(x_i,t_{j-1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j-1})h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j-1})h^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j-1})h^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j-1})h^4 + \frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j-1})h^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{6i},t_j)h^6,$$

$\eta_{1j} \in [t_j,t_{j+1}]$, $\eta_{2j} \in [t_{j-1},t_j]$, $\xi_{1i},\xi_{3i},\xi_{5i} \in [x_{i-1},x_i]$, $\xi_{2i},\xi_{4i},\xi_{6i} \in [x_i,x_{i+1}]$. Поэтому

$$\psi_j^i = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_j)\Delta^2 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{1j})\Delta^4 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{2j})\Delta^4 -$$
$$- s\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j-1}) + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j-1})h^2 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{5i},t_j)h^4 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{6i},t_j)h^4\right) -$$
$$- s\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1}) + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^2 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{3i},t_j)h^4 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{4i},t_j)h^4\right) -$$
$$- (1-2s)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^2 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{1i},t_j)h^4 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{2i},t_j)h^4\right) -$$
$$- f(t_j,x_i,u_{t_j}(x_i,\cdot)).$$

Учитывая разложения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta^2 -$$
$$- \frac{1}{6}\frac{\partial^5 u}{\partial t^3\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^4\partial x^2}(x_i,\eta_{3j})\Delta^4,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^5 u}{\partial t^3\partial x^2}(x_i,t_j)\Delta^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^4\partial x^2}(x_i,\eta_{4j})\Delta^4,$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j-1}) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j) - \frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}(x_i,\eta_{5j})\Delta^2,$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1}) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j) + \frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}(x_i,t_j)\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}(x_i,\eta_{6j})\Delta^2,$$

$\eta_{3j},\eta_{5j} \in [t_{j-1},t_j]$, $\eta_{4j},\eta_{6j} \in [t_j,t_{j+1}]$, а также то, что $u(x_i,t_j)$ является решением задачи (1.1), получаем

$$\psi_j^i = R_1(x_i,t_j)\Delta^2 + R_2(x_i,t_j)h^2 + R_3\Delta^4 + R_4h^4 + R_5\Delta^2h^2,$$

где

$$R_1(x_i,t_j) = \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_j) - s\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}(x_i,t_j), \qquad R_2(x_i,t_j) = -\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j),$$
$$R_3 = \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{1j}) + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i,\eta_{2j}) - \frac{s}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^4\partial x^2}(x_i,\eta_{3j}) - \frac{s}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^4\partial x^2}(x_i,\eta_{4j}),$$

$$R_4 = \frac{2s-1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{1i}, t_j) + \frac{2s-1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{2i}, t_j) - \frac{s}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{3i}, t_j) - \frac{s}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{4i}, t_j) - $$
$$- \frac{s}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{5i}, t_j) - \frac{s}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{6i}, t_j),$$
$$R_5 = -\frac{s}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4}(x_i, \eta_{5j}) - \frac{s}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4}(x_i, \eta_{6j}). \qquad \square$$

З а м е ч а н и е 1. Величины $R_1(x_i, t_j)$ и $R_2(x_i, t_j)$ зависят лишь от производных точного решения в точке (x_i, t_j) и не зависят от производных в других точках, в отличие от величин R_3, R_4, R_5. Этот факт даст в дальнейшем возможность выписать уравнение для асимптотического уравнения погрешности. Введем для этого величину

$$\gamma(x, t) = R_1(x, t) + \sigma R_2(x, t), \tag{4.3}$$

$$R_1(x, t) = \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) - s\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}(x, t), \; R_2(x, t) = -\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t).$$

З а м е ч а н и е 2. При условиях леммы величины R_3, R_4, R_5 равномерно ограничены.

С учетом этих замечаний соотношение (4.2) можно переписать в виде

$$\psi_j^i = \gamma(x_i, t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4), \qquad |O(\Delta^4)| \leqslant C\Delta^4. \tag{4.4}$$

§ 5. Явная векторная форма базового метода и его невязки с интерполяцией

При каждом j определим значения дискретной модели (2.2)–(3.1) вектором $u_j = (u_j^1, u_j^2, \ldots, u_j^{N-1})' \in \tilde{Y}$, здесь $\tilde{Y}$ — векторное пространство размерности $N-1$, $'$ — знак транспонирования. Пусть $\{u_k\}_j$ — предыстория векторной дискретной модели к моменту t_j.

Определим максимум-норму в пространстве $\tilde{Y}$ соотношением

$$\|u_j\|_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |u_j^i|.$$

В пространстве $\tilde{Y}$ введем оператор A:

$$A u_j^i = -\frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2},$$

считая, что $u_j^0 = u_j^N = 0$.

Тогда систему (2.2)–(4.1) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta^2} + sAu_{j+1} + sAu_{j-1} + (1-2s)Au_j = F_j, \tag{5.1}$$

где $F_j = F_j(I(\{u_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i, t_j, (u_j^i)_{t_j}(\cdot))$, $i = 1, \ldots, N-1$, где $(u_j^i)_{t_j}(\cdot)$ — предыстория к моменту t_j результата действия оператора кусочно-кубической интерполяции (4.1).

Введем также оператор

$$R = \frac{1}{\Delta^2}E + sA,$$

где E — единичный оператор. Тогда уравнение (4.2) можно привести [8, с. 58] к виду

$$R(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + Au_j = F_j. \tag{5.2}$$

Так как при любом допустимом весе s уравнение (5.2) разрешимо относительно u_{j+1} (существует R^{-1}), то можно привести это уравнение к явной форме двухшагового метода

$$u_{j+1} = 2u_j - u_{j-1} - R^{-1}Au_j + R^{-1}F_j. \tag{5.3}$$

За счет повышения размерности сведем метод к одношаговому.

Введем вектор $y_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)})' = (u_{j-1}, u_j)' \in Y$, где $Y = \tilde{Y} \oplus \tilde{Y}$ — векторное пространство размерности $q = 2(N-1)$.

Соотношение (5.3) можно переписать в виде

$$y_{j+1}^{(1)} = y_j^{(2)}, \qquad y_{j+1}^{(2)} = 2y_j^{(2)} - y_j^{(1)} - R^{-1}Ay_j^{(2)} + R^{-1}F_j.$$

В результате получаем разностную схему:

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(I(\{y_k^{(2)}\}_j)), \tag{5.4}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix}, \qquad \Phi(I(\{y_k^{(2)}\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F_j(I(\{u_k\}_j))/\Delta \end{pmatrix}.$$

Определим функцию точных значений для схемы (5.4) соотношениями

$$z_j = (z_j^{(1)}, z_j^{(2)})' = (\hat{u}_{j-1}, \hat{u}_j)', \qquad \hat{u}_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \ldots, u(x_{N-1}, t_j))'.$$

Введем вектор невязки без интерполяции

$$\psi_j = (\psi_j^1, \psi_j^2, \ldots, \psi_j^{N-1})',$$

который определяется соотношением

$$\psi_j = \frac{\hat{u}_{j+1} - 2\hat{u}_j + \hat{u}_{j-1}}{\Delta^2} + sA\hat{u}_{j+1} + sA\hat{u}_{j-1} + (1-2s)A\hat{u}_j - \tilde{F}_j, \tag{5.5}$$

где $\tilde{F}_j$ — вектор с координатами $f(x_i, t_j, u_{t_j}(x_i, \cdot))$, $u_{t_j}(x_i, \cdot)$ — предыстория точного решения к моменту t_j.

Тогда представление (4.4) можно записать в векторном виде

$$\psi_j = \gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4), \ \|O(\Delta^4)\|_0 \leqslant C\Delta^4, \tag{5.6}$$

здесь и далее $\gamma(t_j)$ имеет координаты $\gamma(x_1, t_j), \ldots, \gamma(x_{N-1}, t_j)$.

Соотношение (5.5) можно переписать в виде

$$R(\hat{u}_{j+1} - 2\hat{u}_j + \hat{u}_{j-1}) + A\hat{u}_j = \tilde{F}_j + \psi_j,$$

или, в явной форме,

$$\hat{u}_{j+1} = 2\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1} - R^{-1}A\hat{u}_j + R^{-1}(\tilde{F}_j + \psi_j).$$

Сведем это уравнение к одношаговому, переписав последнее уравнение в виде системы

$$z_{j+1}^{(1)} = z_j^{(2)}, \qquad z_{j+1}^{(2)} = 2z_j^{(2)} - z_j^{(1)} - R^{-1}Az_j^{(2)} + R^{-1}(\tilde{F}_j + \psi_j).$$

В результате получаем уравнение для функции точных значений:

$$z_{j+1} = Sz_j + \Delta\tilde{\Phi}, \tag{5.7}$$

где

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}(\tilde{F}_j + \psi_j)/\Delta \end{pmatrix}.$$

Определим кусочно-кубическую интерполяцию точного решения $u(x_i, t_j)$ с экстраполяцией продолжением. На каждом подотрезке $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $i = 0, \ldots, N$, построим кубическую параболу — интерполяционный многочлен $\hat{L}_3^l(t)$ в форме Лагранжа по узлам $t_{j-3l-3}, t_{j-3l-2}, t_{j-3l-1}, t_{j-2l}$ и значениям в узлах $u(x_i, t_{j-3l-3}), u(x_i, t_{j-3l-2}), u(x_i, t_{j-3l-1}), u(x_i, t_{j-3l})$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_3^l(t) = u(x_i, t_{j-3l-3}) &\frac{(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l-1})(t - t_{j-3l})}{6\Delta^3} - \\ - u(x_i, t_{j-3l-2}) &\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-1})(t - t_{j-3l})}{2\Delta^3} + \\ + u(x_i, t_{j-3l-1}) &\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l})}{2\Delta^3} - \\ - u(x_i, t_{j-3l}) &\frac{(t - t_{j-3l-3})(t - t_{j-3l-2})(t - t_{j-3l-1})}{6\Delta^3}. \end{aligned}$$

Кусочно-кубическая интерполяция точного решения задается равенствами

$$\hat{u}_j^i(t_j + s) = \hat{L}_3^l(t_j + s), \quad t_{j-3l-3} \leqslant t_j + s \leqslant t_{j-3l}. \tag{5.8}$$

Невязка с интерполяцией определяется [8, с. 12] для метода (5.4) в виде

$$d_j = \frac{z_{j+1} - Sz_j}{\Delta} - \hat{\Phi}_j, \qquad \hat{\Phi}_j = \hat{\Phi}(I(\{z^{(2)}{}_k\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F_j(I(\{\hat{u}_k\}_j))/\Delta \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$\hat{F}_j = F_j(I(\{\hat{u}_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i, t_j, (\hat{u}_j^i)_{t_j}(\cdot))$, $(\hat{u}_j^i)_{t_j}(\cdot))$ — предыстория к моменту t_j кусочно-кубической интерполяции (5.8).

Пусть вектор невязки с интерполяцией d_j имеет компоненты $d_j = (d_j^{(1)}, d_j^{(2)}) \in Y$. Из (5.7) и (5.9) имеем соотношения

$$d_j^{(1)} = 0, \qquad d_j^{(2)} = \frac{R^{-1}}{\Delta}(\tilde{F}_j - \hat{F}_j) + \frac{R^{-1}}{\Delta}\psi_j,$$

или

$$R\Delta d_j^{(2)} = \tilde{F}_j - \hat{F}_j + \psi_j. \tag{5.10}$$

Из этого соотношения, и из того, что оператор кусочно-кубической интерполяции имеет порядок 4, вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 5.1. *Если выполняются условия леммы* 4.1, *то вторая компонента невязки с интерполяцией удовлетворяет соотношению*

$$R\Delta d_j^{(2)} = R_{1,j}\Delta^2 + R_{2,j}h^2 + O(\Delta^4 + h^4). \tag{5.11}$$

$R_{1,j}$ — *вектор с координатами* $R_1(x_i, t_j)$, $R_{2,j}$ — *вектор с координатами* $R_2(x_i, t_j)$.

Пусть $y_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)})' = (u_{j-1}, u_j)' \in Y$, введем в этом пространстве максимум-норму:

$$\|y_j\|_0 = \max\{\|y_j^{(1)}\|_0, \|y_j^{(2)}\|_0\}.$$

При выполнении условия устойчивости (2.3) введем также норму [18, с. 365], [8, с. 64] в пространстве Y:

$$\|y_j\|_*^2 = \frac{1}{4}(A(u_j + u_{j-1}), u_j + u_{j-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(u_j + u_{j-1}), u_j + u_{j-1}), \tag{5.12}$$

которую будем называть энергетической.

Л е м м а 5.2. *Пусть выполняется условие устойчивости, число σ фиксировано, невязка без интерполяции имеет порядок p, т. е. выполняется $|\psi_j^i| \leqslant C_3\Delta^p$ для всех i, j, а оператор интерполяции липшицев и имеет порядок $p_1 \geqslant p$. Тогда невязка с интерполяцией имеет порядок p в энергетической норме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вектора невязки без интерполяции ψ_j выполняется $\|\psi_j\|_0 \leqslant \leqslant C_3\Delta^p$. Умножим на Δ соотношение (5.10), связывающее векторную невязку без интерполяции и невязку с интерполяцией:

$$R\Delta^2 d_j^{(2)} = \Delta(\tilde{F}_j - \hat{F}_j + \psi_j).$$

Введем операторы $\widetilde{R} = \Delta^2 R = E + s\Delta^2 A$ и $\widetilde{A} = \Delta^2 A$, которые, в отличие от операторов R и A, не зависят от h и Δ при фиксированном σ. Тогда

$$d_j^{(2)} = \widetilde{R}^{-1}(\Delta(\tilde{F}_j - \hat{F}_j + \psi_j)). \tag{5.13}$$

Из определений функций $\tilde{F}_j$ и $\hat{F}_j$, условия липшицевости (1.4) и определения порядка интерполяции имеем оценку

$$\|\tilde{F}_j - \hat{F}_j\|_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant N-1} |f(x_i, t_j, u_{t_j}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_j, (\hat{u}_j^i)_{t_j}(\cdot))| \leqslant L_f C_2 \Delta^{p_1}.$$

Тогда из (5.13) вытекает

$$\|d_j\|_0 = \|d_j^{(2)}\|_0 \leqslant C_4\Delta^{p+1}. \tag{5.14}$$

Перепишем определение нормы в (5.12) в виде

$$\Delta^2\|y_j\|_*^2 = \frac{1}{4}(\widetilde{A}(u_j + u_{j-1}), u_j + u_{j-1}) + ((\widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A})(u_j + u_{j-1}), u_j + u_{j-1}).$$

Отсюда и из (5.14) вытекает

$$\Delta^2\|y_j\|_*^2 \leqslant C_5\Delta^{2p+2}.$$

Извлекая корень, получаем заключение леммы. □

З а м е ч а н и е 3. Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает, что метод (2.2) с кусочно-кубической интерполяцией сходится с порядком 2 в энергетической норме, т. е. существует константа C_6, такая, что

$$\|y_j - z_j\|_* \leqslant C_6\Delta^2.$$

Доказательство следует из вложения в общую схему разностных схем с наследственностью [8, с. 12].

§ 6. Асимптотическое представление глобальной погрешности базового метода

В этом параграфе будем предполагать выполнение следующих условий.

У с л о в и е 6.1. Функционал $f\big(x, t, u_t(x, \cdot)\big)$ по последнему аргументу дважды дифференцируем по Фреше, см., например, [19, с. 154], причем вторая производная Фреше ограничена.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x^2} + \langle G, e_t(x,\cdot)\rangle - \gamma(x,t), \tag{6.1}$$

с начальными условиями $e(x,t) = 0$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, и граничными условиями $e(0,t) = 0$, $e(X,t) = 0$. Здесь G — производная Фреше функционала $f\big(x, t, u_t(x, \cdot)\big)$ по последнему аргументу, $\langle G, e_t(x,\cdot)\rangle$ — результат действия G на предысторию $e_t(x,\cdot)$.

У с л о в и е 6.2. Уравнение (6.1) имеет единственное решение $e(x,t)$, причем функция $e(x,t)$ четыре раза непрерывно дифференцируема по x и t.

Уравнение (6.1) является частным случаем уравнения (1.1), поэтому для его приближенного решения можно рассмотреть численный метод (2.2). Введем невязку без интерполяции для метода (2.2), примененного к уравнению (6.1):

$$\begin{aligned}\breve{\psi}_j^i = {} & \frac{e(x_i,t_{j+1}) - 2e(x_i,t_j) + e(x_i,t_{j-1})}{\Delta^2} - \\ & - s\frac{e(x_{i-1},t_{j+1}) - 2e(x_i,t_{j+1}) + e(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2} - \\ & - (1-2s)\frac{e(x_{i-1},t_j) - 2e(x_i,t_j) + e(x_{i+1},t_j)}{h^2} - \\ & - s\frac{e(x_{i-1},t_{j-1}) - 2e(x_i,t_{j-1}) + e(x_{i+1},t_{j-1})}{h^2} - \langle G, e_{t_j}(x_i,\cdot)\rangle + \gamma(x_i,t_j).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Подобно лемме 4.1 проверяется, что при выполнении условия 6.2 справедливо представление

$$\breve{\psi}_j^i = O(\Delta^2). \tag{6.3}$$

Определим векторную погрешность метода (5.4) как вектор $\epsilon_j = (\epsilon_j^{(1)}, \epsilon_j^{(2)})' = (\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j)' \in Y$. Здесь $\varepsilon_j = \hat{u}_j - u_j \in \tilde{Y}$ — вектор с координатами ε_j^i, $i = 1,\ldots,N-1$, где $\varepsilon_j^i = u(x_i,t_j) - u_j^i$.

Л е м м а 6.1. *Если выполняются условия леммы* 4.1*, а также условия* 6.1 *и* 6.2*, то величина* $\varepsilon_j + e(t_j)\Delta^2$ *имеет четвертый порядок малости по* Δ *в энергетической норме. Здесь вектор-функция* $e(t_j)$ *имеет координаты* $e(x_i,t_j)$*, функция* $e(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (6.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из метода (2.2) с интерполяцией (3.1), рассмотрим величины

$$\breve{u}_j^i = u_j^i - e(x_i,t_j)\Delta^2, \tag{6.4}$$

или, в векторной форме,

$$\breve{u}_j = u_j - e(t_j)\Delta^2, \qquad e(t_j) = (e(x_1,t_j), e(x_2,t_j), \ldots, e(x_{N-1},t_j))' \in \tilde{Y}.$$

Тогда из (5.1) получаем

$$\begin{aligned}& \frac{\breve{u}_{j+1} - 2\breve{u}_j + \breve{u}_{j-1}}{\Delta^2} + sA\breve{u}_{j+1} + sA\breve{u}_{j-1} + (1-2s)A\breve{u}_j - \breve{F}_j + e(t_{j+1}) - 2e(t_j) + \\ & \quad + e(t_{j-1}) + sAe(t_{j+1})\Delta^2 + sAe(t_{j-1})\Delta^2 + (1-2s)Ae(t_j)\Delta^2 = F_j - \breve{F}_j,\end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\breve{F}_j = \breve{F}_j(I(\{\breve{u}_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i,t_j,(\breve{u}_j^i)_{t_j}(\cdot))$; $(\breve{u}_j^i)_{t_j}(\cdot))$ — предыстория к моменту t_j кусочно-кубической интерполяции значений $\{\breve{u}_k^i\}_j$;
$F_j = F_j(I(\{\breve{u}_k + e(t_k)\Delta^2\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i,t_j,(u_j^i)_{t_j}(\cdot))$, где $(u_j^i)_{t_j}(\cdot)$ — предыстория к моменту t_j результата действия оператора кусочно-кубической интерполяции значений $\{u_k^i\}_j = \{\breve{u}_k^i + e(x_i,t_k)\Delta^2\}_j$. Отметим, что в силу линейности оператора интерполяции выполняется

$$F_j(I(\{\breve{u}_k + e(t_k)\Delta^2\}_j)) = F_j(I(\{\breve{u}_k\}_j) + I(\{e(t_k)\}_j\Delta^2)).$$

Вычислим невязку без интерполяции этого метода:

$$\begin{aligned}\breve{\psi}_j = \psi_j + \{& e(t_{j+1}) - 2e(t_j) + e(t_{j-1}) + sAe(t_{j+1})\Delta^2 + sAe(t_{j-1})\Delta^2 + \\ & + (1-2s)Ae(t_j)\Delta^2 + \bar{F}_j - \tilde{F}_j\},\end{aligned} \tag{6.6}$$

где $\bar{F}_j = \bar{F}_j(\hat{u}_j + I(\{e(t_k)\}_j\Delta^2)$ — вектор с координатами $f(x_i, t_j, u_{t_j}(x_i, \cdot) + \hat{e}_{t_j}(x_i, \cdot)\Delta^2)$, $\hat{e}_{t_j}(x_i, \cdot)$ — предыстория результата интерполяции $\{e(x_i, t_k)\}_j$ к моменту t_j, функция $\tilde{F}_j$ была определена выше.

В силу условия 6.1 (используя разложение Тейлора для функционала [19]), i-я координата вектора $\bar{F}_j - \tilde{F}_j$ представима в виде

$$f(x_i, t_j, u_{t_j}(x_i, \cdot) + \hat{e}_{t_j}(x_i, \cdot)\Delta^2) - f(x_i, t_j, u_{t_j}(x_i, \cdot)) =$$
$$= \langle G, \hat{e}_{t_j}(x_i, \cdot)\rangle\Delta^2 + O(\Delta^4) = \langle G, e_{t_j}(x_i, \cdot)\rangle\Delta^2 + O(\Delta^4).$$

Из этого представления, а также из (6.2) и (6.3) следует, что i-я координата вектора в фигурных скобках соотношения (6.6) равна $-\gamma(x_i, t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4)$.

С учетом этого, из (6.6) и (5.6) вытекает, что невязка без интерполяции метода (6.4) имеет порядок $O(\Delta^4)$. Оператор интерполяции также имеет порядок $O(\Delta^4)$, следовательно по лемме 5.2, невязка с интерполяцией метода (6.4) имеет четвертый порядок по Δ в энергетической норме, следовательно метод (6.4) сходится с порядком $O(\Delta^4)$ в энергетической норме.

Так как

$$\varepsilon_j + e(t_j)\Delta^2 = \hat{u}_j - u_j + e(t_j)\Delta^2 = \hat{u}_j - \check{u}_j,$$

отсюда вытекает заключение леммы. □

§ 7. Схема Ричардсона и практическая оценка погрешности

Пусть $u_j^i(h, \Delta)$ — результат метода с весами (2.2) с кусочно-кубической интерполяцией (3.1), с шагом по пространству h и с шагом по времени Δ. Обозначим

$$U_j^i = \frac{4}{3}u_j^i(h/2, \Delta/2) - \frac{1}{3}u_j^i(h, \Delta). \tag{7.1}$$

Этот метод является аналогом схемы экстраполяции Ричардсона.

Т е о р е м а 7.1. *Пусть выполняются условия леммы* 6.1. *Тогда метод* (7.1) *сходится с четвертым порядком по* Δ *и* h *в энергетической норме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $U_j(h, \Delta)$ вектор с координатами $U_j^i(h, \Delta)$, тогда, если $\hat{u}_j$ — вектор точного решения, $u_j(h, \Delta)$ — вектор с координатами $u_j^i(h, \Delta)$, $\varepsilon_j(h, \Delta)$ — векторная погрешность метода (2.2), (3.1), то векторная погрешность метода (7.1) представима в виде

$$(\varepsilon_U)_j = \hat{u}_j - U_j(h, \Delta) = \hat{u}_j - u_j(h/2, \Delta/2) - \frac{1}{3}(u_j(h/2, \Delta/2)$$

$$-u_j(h, \Delta) - \hat{u}_j + \hat{u}_j) = [\varepsilon_j(h/2, \Delta/2) + e(t_j)(\Delta/2)^2] - \frac{1}{3}([-\varepsilon_j(h/2, \Delta/2)-$$

$$-e(t_j)(\Delta/2)^2] + [\varepsilon_j(h, \Delta) + e(t_j)\Delta^2]).$$

Так как, в силу леммы 6.1, каждое выражение в квадратных скобках сходится с четвертым порядком в энергетической норме, то отсюда следует утверждение теоремы. □

При условиях леммы 6.1 можно получить асимптотическую оценку погрешности базового метода (метод Рунге практической оценки погрешности).

Т е о р е м а 7.2. *Пусть выполняются условия леммы* 6.1. *Тогда справедливы формулы Рунге*

$$\varepsilon_j(h,\Delta) = \frac{4}{3}(u_j(h/2,\Delta/2) - u_j(h,\Delta)) + r_1,$$
$$\varepsilon_j(h/2,\Delta/2) = \frac{1}{3}(u_j(h/2,\Delta/2) - u_j(h,\Delta)) + r_2,$$

где векторы r_1 *и* r_2 *имеют четвертый порядок малости относительно* Δ *в энергетической норме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно утверждению леммы 6.1, имеют место соотношения

$$\begin{gathered}\hat{u}_j - u_j(h,\Delta) - e(t_j)\Delta^2 = \tilde{r}_1,\\ \hat{u}_j - u_j(h/2,\Delta/2) - e(t_j)(\Delta/2)^2 = \tilde{r}_2,\end{gathered} \tag{7.2}$$

где векторы $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ имеют четвертый порядок малости относительно Δ в энергетической норме. Исключим из этих соотношений вектор точного решения $\hat{u}_j$, получим

$$u_j(h/2,\Delta/2) - u_j(h,\Delta) - \frac{3}{4}e(t_j)\Delta^2 = r_1 - r_2,$$

отсюда

$$e(t_j) = \frac{4}{3}(u_j(h/2,\Delta/2) - u_j(h,\Delta)) - \frac{4}{3}(r_1 - r_2).$$

Из этого соотношения, формул (7.2) и определения погрешности $\varepsilon_j(h,\Delta) = \hat{u}_j - u_j(h,\Delta)$ вытекает утверждение теоремы. □

Формулы Рунге могут быть использованы для организации вычислений с переменным шагом, определяемым заданной точностью.

§ 8. Пример численных расчетов

П р и м е р 8.1. Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \pi^2 e^{-t}\sin\pi x + e^{\tau-2t}\sin^2\pi x + u(x,t)(1 - u(x,t-1)) \tag{8.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,s) = e^s \sin\pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant s \leqslant 0,$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3.$$

Это уравнение имеет точное решение $u(x,t) = e^{-t}\sin\pi x$. Результаты численных расчетов приведены в таблице 1. В ней представлены максимальные по модулю отклонения приближенного решения от точного, вычисленные по формуле

$$A(h,\Delta) = \max_{i,j} |U_j^i - u(x_i,t_j)|$$

при $s = 1$ для различного числа разбиений N и M.

Таблица 1. Максимальные по модулю отклонения приближенного решения уравнения (8.1), полученные методами (2.2) и (7.1) при разных разбиениях

Метод	$N = 4$ $M = 12$	$N = 8$ $M = 24$	$N = 16$ $M = 48$	$N = 32$ $M = 96$
Метод с весами (2.2)	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$3.79 \cdot 10^{-3}$	$9.47 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$
Схема Ричардсона (7.1)	$3.84 \cdot 10^{-3}$	$2.72 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-5}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2. Вычислительные порядки точности методов, полученные для методов (2.2) и (7.1) при разных разбиениях

Методы	$N = 4$ $M = 12$	$N = 8$ $M = 24$	$N = 16$ $M = 48$
Метод с весами (2.2)	1.89	2.00	2.01
Схема Ричардсона (7.1)	3.82	4.42	3.50

Данные в таблице наглядно показывают, что метод (7.1) дает результат на порядки точнее. Кроме того, эти данные позволяют оценить вычислительные порядки точности методов по формуле

$$C(h, \Delta) = \log_2 \left(\frac{A(h, \Delta)}{A(h/2, \Delta/2)} \right),$$

которые приведены в таблице 2.

Таблица подтверждает доказанные теоретически второй порядок метода (2.2) и четвертый — метода (7.1).

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22–21–00075.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Jianhong. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. Delay ordinary and partial differential equations. Chapman and Hall/CRC, 2023. https://doi.org/10.1201/9781003042310
3. Liu Pan-Ping. Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 265. P. 275–291. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.028
4. Hattaf K., Yousfi N. A generalized HBV model with diffusion and two delays // Computers and Mathematics with Applications. 2015. Vol. 69. Issue 1. P. 31–40. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.11.010
5. Cheng Yueling, Lu Dianchen, Zhou Jiangbo, Wei Jingdong. Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model // Advances in Difference Equations. 2019. Vol. 2019. Issue 1. Article number: 494. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2432-6
6. Jia Yunfeng. Bifurcation and pattern formation of a timor-immune model with time-delay and diffusion // Mathematics and Computers in Simulation. 2020. Vol. 178. P. 92–108. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.06.011
7. Polyanin A. D., Sorokin V. G. New exact solutions of nonlinear wave type PDE with delay // Applied Mathematics Letters. 2020. Vol. 108. 106512. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106512
8. Пименов В. Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2014.

9. Solodushkin S. I., Yumanova I. F., de Staelen R. H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Vol. 289. P. 322–330. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.12.032
10. Hendy A. S., de Staelen R. H., Pimenov V. G. A semi-linear delayed diffusion-wave system with distributed order in time // Numerical Algorithms. 2018. Vol. 77. Issue 3. P. 885–903. https://doi.org/10.1007/s11075-017-0344-7
11. Li Lili, Zhou Boya, Chen Xiaoli, Wang Zhiyong. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 337. P. 144–152. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057
12. Hendy A. S., Macías-Díaz J. E. A novel discrete Gronwall inequality in the analysis of difference schemes for time-fractional multi-delayed diffusion equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 73. P. 110–119. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.02.005
13. Xu Xiuxiu, Huang Qiumei. Discontinuous Galerkin time stepping for semilinear parabolic problems with time constant delay // Journal of Scientific Computing. 2023. Vol. 96. Issue 2. Article number: 57. https://doi.org/10.1007/s10915-023-02278-3
14. Пименов В. Г., Таширова Е. Е. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 222–231. https://www.mathnet.ru/rus/timm823
15. Deng Dingwen, Chen Jingliang. Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays // Networks and Heterogeneous Media. 2023. Vol. 18. Issue 1. P. 412–443. https://doi.org/10.3934/nhm.2023017
16. Zhang Chengjian, Tan Zengqiang. Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 91. 105461. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105461
17. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: РХД, 2004.
18. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
19. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 22.07.2023

Принята к публикации 20.09.2023

Пименов Владимир Германович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4042-6079
E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Таширова Екатерина Евгеньевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5054-176X
E-mail: ekaterina@tashirova.ru

Цитирование: В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова. Асимптотическое разложение погрешности численного метода для решения волнового уравнения с функциональным запаздыванием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 71–86.

V. G. Pimenov, E. E. Tashirova

Asymptotic expansion of the error of the numerical method for solving wave equation with functional delay

Keywords: wave equation, functional delay, numerical method with weights, piecewise cubic interpolation, Richardson method, order of convergence.

MSC2020: 65M06, 65M12, 65M15, 65Q20

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-06

A wave equation with functional delay is considered. The problem is discretized. Constructions of the difference method with weights with piecewise linear interpolation are given. A basic method with weights with piecewise cubic interpolation is constructed. The order of the residual is studied without interpolation of the basic method, and the expansion coefficients of the residual with respect to time-steps and space-steps are written out. It is proved that the weighted method with piecewise cubic interpolation converges with order 2 in the energy norm. An equation is written for the main term of the asymptotic expansion of the global error of the basic method. Under certain assumptions, the validity of the application of the Richardson extrapolation procedure is substantiated, and the corresponding numerical method is constructed, that has the fourth order of convergence with respect to time-steps and space-steps. The validity of Runge's formulas for practical estimation of the error is proved. The results of numerical experiments on a test example are presented.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation, project no. 22–21–00075.

REFERENCES

1. Wu Jianhong. *Theory and applications of partial functional differential equations*, New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. *Delay ordinary and partial differential equations*, Chapman and Hall/CRC, 2023. https://doi.org/10.1201/9781003042310
3. Liu Pan-Ping. Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 265, pp. 275–291. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.028
4. Hattaf K., Yousfi N. A generalized HBV model with diffusion and two delays, *Computers and Mathematics with Applications*, 2015, vol. 69, issue 1, pp. 31–40. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.11.010
5. Cheng Yueling, Lu Dianchen, Zhou Jiangbo, Wei Jingdong. Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, issue 1, article number: 494. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2432-6
6. Jia Yunfeng. Bifurcation and pattern formation of a timor-immune model with time-delay and diffusion, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2020, vol. 178, pp. 92–108. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.06.011
7. Polyanin A. D., Sorokin V. G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay, *Applied Mathematics Letters*, 2020, vol. 108, 106512. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106512
8. Pimenov V. G. *Raznostnye metody resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu* (Difference methods of solution of partial differential equations with heredity), Yekaterinburg: Ural State University, 2014.
9. Solodushkin S. I., Yumanova I. F., de Staelen R. H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 289, pp. 322–330. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.12.032
10. Hendy A. S., de Staelen R. H., Pimenov V. G. A semi-linear delayed diffusion-wave system with distributed order in time, *Numerical Algorithms*, 2018, vol. 77, issue 3, pp. 885–903. https://doi.org/10.1007/s11075-017-0344-7

11. Li Lili, Zhou Boya, Chen Xiaoli, Wang Zhiyong. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay, *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 337, pp. 144–152. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057
12. Hendy A. S., Macías-Díaz J. E. A novel discrete Gronwall inequality in the analysis of difference schemes for time-fractional multi-delayed diffusion equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 73, pp. 110–119. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.02.005
13. Xu Xiuxiu, Huang Qiumei. Discontinuous Galerkin time stepping for semilinear parabolic problems with time constant delay, *Journal of Scientific Computing*, 2023, vol. 96, issue 2, article number: 57. https://doi.org/10.1007/s10915-023-02278-3
14. Pimenov V. G., Tashirova E. E. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2013, vol. 281, suppl. 1, pp. 126–136. https://doi.org/10.1134/S008154381305012X
15. Deng Dingwen, Chen Jingliang. Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays, *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, issue 1, pp. 412–443. https://doi.org/10.3934/nhm.2023017
16. Zhang Chengjian, Tan Zengqiang. Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, vol. 91, 105461. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105461
17. Kim A. V., Pimenov V. G. *i-Gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional differential equations), Moscow–Izhevsk: Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, 2004.
18. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* (Numerical methods), Moscow: Nauka, 1989.
19. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal'noe upravlenie* (Optimal control), Moscow: Nauka, 1979.

Received 22.07.2023

Accepted 20.09.2023

Vladimir Germanovich Pimenov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, ul. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4042-6079
E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Ekaterina Evgen'evna Tashirova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, ul. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5054-176X
E-mail: ekaterina@tashirova.ru

Citation: V. G. Pimenov, E. E. Tashirova. Asymptotic expansion of the error of the numerical method for solving wave equation with functional delay, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 71–86.