

УДК 517.958, 530.145.6, 517.984.55, 517.984.66

© Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕННОГО НЕЭРМИТОВОГО ГАМИЛЬТониАНА SSH С РТ-СИММЕТРИЕЙ

В статье найдены околонулевые собственные значения (их физический смысл — энергии электронов) и собственные функции, описывающие электронные состояния, неэрмитового гамильтониана SSH для бесконечной цепочки с РТ симметрией, возмущенного δ -образным потенциалом. Доказано, что при малом параметре неэрмитовости существуют два (обобщенных) собственных значения кратности единица, причем, в отличие от эрмитовой модели, соответствующие (обобщенные) собственные функции в зависимости от параметров системы могут как экспоненциально возрастать (что соответствует резонансным, т. е. распадающимся состояниям), так и экспоненциально убывать (что отвечает локализованным состояниям) при $|n| \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, неэрмитов гамильтониан SSH, РТ симметрия, функция Грина.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-07

Введение

Более двух десятилетий в физической литературе изучаются так называемые топологические фазы таких материалов, как сверхпроводники и топологические изоляторы (см. основополагающую статью [1], а также обзоры [2–4]). Речь идет о разбиении пространства параметров топологических систем на области (фазы), отвечающие элементам алгебраической группы, порожденной некоторым топологическим инвариантом. В одномерном случае это часто группа из двух элементов, сформированная с помощью числа оборотов вектора на комплексной плоскости, определяемого гамильтонианом, описывающим систему. Интерес физиков к этой тематике вызван тем, что целые числа, обычно характеризующие фазы, как правило, совпадают с числом состояний частиц с (около)нулевой энергией в данной фазе, находящихся в «усеченной» системе (в случае одномерной бесконечной цепочки, состоящей из узлов, эта «усеченная» часть — конечная цепочка). Данное утверждение называется соответствием «объем–граница» (см. [4]); состояния с (около)нулевой энергией относительно устойчивы к внешним воздействиям в силу «топологической защищенности» (малые изменения параметров не меняют, например, число оборотов). Эти устойчивые состояния локализуются вблизи границы, в одномерном случае — вблизи граничных точек. Существуют перспективы их использования в квантовой оптике и квантовой информатике [5, 6].

В последние годы большой интерес стали вызывать неэрмитовы (несамосопряженные) гамильтонианы, которые описывают топологические структуры, но также могут с успехом моделировать открытые системы с внешними воздействиями (см. обзоры [5–11]). Обычно это — одномерные разностные модели, чаще всего — модель Su–Schrieffer–Heeger (SSH) [12] с введенной неэрмитовостью.

В связи со сказанным ранее, представляется весьма важным исследовать как число собственных значений (энергий), близких к нулю, так и соответствующие собственные функции, указывающие на локализацию частицы. Отмеченные выше актуальные задачи, которые, как правило, формулируются на математическом языке, почти не привлекают внимания математиков. Настоящая статья призвана хотя бы в малой мере улучшить эту ситуацию.

В статье исследуется бесконечная неэрмитовая цепочка SSH с PT (parity-time) [13, 14] симметрией при наличии δ -образного потенциала (ср. эрмитов случай [15]). Наличие потенциала можно интерпретировать как наличие примеси, но более интересным представляется рассматривать потенциал как барьер, при больших значениях параметра становящийся границей, разделяющий бесконечную цепочку на две полубесконечных. Авторами найдена функция Грина невозмущенного гамильтониана SSH и, с помощью уравнения Дайсона, описаны собственные значения и собственные функции возмущенного гамильтониана, а также переход собственных значений в резонансы (характеризующие распадающие состояния), происходящий на границе между топологическими фазами.

§ 1. Гамильтониан и функция Грина

Гамильтониан H бесконечной неэрмитовой цепочки SSH с PT-симметрией действует в пространстве $(l^2(\mathbb{Z}))^2$ на двух-компонентные функции $\Psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T$, где T — транспонирование, по формуле [11, 14]

$$H \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta\psi_1(n) + w\psi_2(n-1) + v\psi_2(n) \\ -i\delta\psi_2(n) + v\psi_1(n) + w\psi_1(n+1) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

где w, v — вещественные параметры перехода на соседний узел, δ — вещественный параметр, порождающий неэрмитовость, $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ определены, соответственно, на нижних и верхних узлах решетки (см. рис. 1).

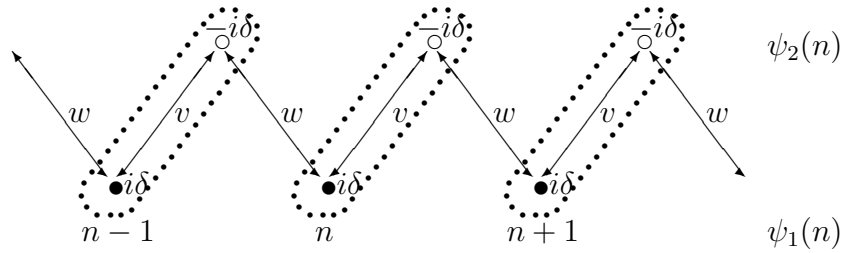


Рис. 1. Модель SSH. Круги — узлы решетки. Узлы сгруппированы в элементарные ячейки, обозначенные пунктирными линиями, n — номер ячейки

После преобразования Фурье

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ikn} \psi(n)$$

гамильтониан H , согласно (1.1), приобретает вид

$$H(k) = \begin{pmatrix} i\delta & we^{-ik} + v \\ we^{ik} + v & -i\delta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Далее предполагаем, что $w, v, w \pm v \neq 0$.

Т е о р е м а 1.1. *Функция Грина (ядро резольвенты) гамильтониана H имеет вид*

$$G(n - n', E) = \frac{1}{2i w v \sin p} \begin{pmatrix} (E + i\delta)e^{ip|n-n'|} & we^{ip|n-n'-1|} + ve^{ip|n-n'|} \\ we^{ip|n-n'+1|} + ve^{ip|n-n'|} & (E - i\delta)e^{ip|n-n'|} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где E — спектральный параметр (энергия), p определяется равенством

$$\cos p = (E^2 + \delta^2 - w^2 - v^2)/(2wv). \quad (1.4)$$

Доказательство. Решим уравнение $(H(k) - E)\Psi(k) = \Phi(k)$ относительно $\Psi(k)$. Согласно (1.2), его можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -E + i\delta & we^{-ik} + v \\ we^{ik} + v & -E - i\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(k) \\ \psi_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Определитель матрицы в (1.5) равен

$$d(k) = E^2 + \delta^2 - w^2 - v^2 - 2wv \cos k. \quad (1.6)$$

Из (1.5), (1.6) находим

$$\begin{aligned} \psi_1(k) &= \frac{(E + i\delta)\varphi_1(k) + (we^{-ik} + v)\varphi_2(k)}{2wv \cos k + w^2 + v^2 - E^2 - \delta^2}, \\ \psi_2(k) &= \frac{(E - i\delta)\varphi_2(k) + (we^{ik} + v)\varphi_1(k)}{2wv \cos k + w^2 + v^2 - E^2 - \delta^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для перехода от $\psi_{1,2}(k)$ к $\psi_{1,2}(n)$ будем использовать известную формулу [16]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikn} \varphi(k)}{2 \cos k - \alpha} dk = \frac{1}{2i \sin p} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{ip|n-n'|} \varphi(n'), \quad (1.8)$$

где $\alpha = 2 \cos p$. Из (1.7), (1.8) получаем

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= \frac{1}{2i w v \sin p} \left((E + i\delta) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{ip|n-n'|} \varphi_1(n') + \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (we^{ip|n-n'-1|} + ve^{ip|n-n'|}) \varphi_2(n') \right), \\ \psi_2(n) &= \frac{1}{2i w v \sin p} \left((E - i\delta) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{ip|n-n'|} \varphi_2(n') + \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (we^{ip|n-n'+1|} + ve^{ip|n-n'|}) \varphi_1(n') \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\alpha = (E^2 + \delta^2 - w^2 - v^2)/(wv)$. Из (1.9) следует формула (1.3). \square

§ 2. Уравнение Дайсона. Собственные значения и собственные функции

Рассмотрим возмущенный гамильтониан $H + V$, где потенциал V определяется равенством

$$V \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix} = V_0 \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{n0}, \quad (2.1)$$

здесь V_0 — вещественная константа, $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Будем исследовать спектральные свойства оператора $H + V$ с помощью уравнения Дайсона

$$\Psi = -(H - E)^{-1} V \Psi, \quad (2.2)$$

полученного из уравнения $(H + V)\Psi = E\Psi$. Так как нас интересуют устойчивые состояния, предполагаем, что энергия E мала. С помощью функции Грина (1.3) и (2.1) запишем уравнение (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= -\frac{V_0}{2i w v \sin p} (E + i\delta) e^{ip|n|} \psi_1(0), \\ \psi_2(n) &= -\frac{V_0}{2i w v \sin p} (we^{ip|n+1|} + ve^{ip|n|}) \psi_1(0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ненулевое решение системы (2.3) существует, если

$$2i w v \sin p + V_0(E + i\delta) = 0, \quad (2.4)$$

где (см. (1.4))

$$\sin p = \pm \frac{i}{2wv} \sqrt{(w^2 - v^2)^2 + (E^2 + \delta^2)(E^2 + \delta^2 - 2(w^2 + v^2))}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) получаем

$$E = -i\delta \pm \frac{1}{V_0} \sqrt{(w^2 - v^2)^2 + (E^2 + \delta^2)(E^2 + \delta^2 - 2(w^2 + v^2))} = F(E). \quad (2.6)$$

Далее под собственными значениями и собственными функциями будем понимать E и Ψ , для которых выполнено равенство $(H + V)\Psi = E\Psi$, где $\Psi \neq 0$, но при этом функция Ψ может не принадлежать пространству $(l^2(\mathbb{Z}))^2$, т.е. может описывать резонансные состояния [17], отвечающие экспоненциальному возрастанию функции при $n \rightarrow \pm\infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Для достаточно малых $|\delta|$, $\varepsilon > 0$ и $|E| < \varepsilon$ существует ровно два собственных значения гамильтониана $H + V$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся принципом сжимающих отображений [18] для уравнения (2.6) с произвольным знаком. Для малых $|\delta|$, ε и $\max\{|E|, |E'|\} < \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} |F(E) - F(E')| &= \frac{1}{|V_0|} |E^4 - E'^4 + (E^2 - E'^2)(\delta^2 - 2(w^2 + v^2)) + \delta^2(E^2 - E'^2) \times \\ &\quad \times \left| \sqrt{(w^2 - v^2)^2 + (E^2 + \delta^2)(E^2 + \delta^2 - 2(w^2 + v^2))} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(w^2 - v^2)^2 + (E'^2 + \delta^2)(E'^2 + \delta^2 - 2(w^2 + v^2))} \right|^{-1} \leq q|E - E'|, \end{aligned}$$

где $|q| < 1$. В силу принципа сжимающих отображений существуют такие E_1 и E_2 , отвечающие знакам « \pm » в (2.6), что выполнено равенство $E_{1,2} = F(E_{1,2})$. \square

С л е д с т в и е 2.1. *В условиях теоремы 2.1 из (1.4) и (2.5) имеем*

$$\cos p = -\frac{w^2 + v^2}{2wv} + O(\varepsilon^2 + \delta^2), \quad \sin p = \pm \frac{i|w^2 - v^2|}{2wv} + O(\varepsilon^2 + \delta^2), \quad (2.7)$$

тогда из (2.6)

$$E_{1,2} = -i\delta \pm \frac{|w^2 - v^2|}{V_0} + O(\varepsilon^2 + \delta^2), \quad (2.8)$$

$$e^{ip} = -\frac{w^2 + v^2}{2wv} \mp \frac{|w^2 - v^2|}{2wv} + O(\varepsilon^2 + \delta^2). \quad (2.9)$$

Таким образом, в отличие от эрмитового случая собственные значения (2.8) — комплексные. Из (2.9) получим

$$e^{ip} = \begin{cases} -\left(\frac{w}{v}\right)^{\pm 1} + O(\varepsilon^2 + \delta^2), & \text{если } |w| > |v|, \\ -\left(\frac{v}{w}\right)^{\pm 1} + O(\varepsilon^2 + \delta^2), & \text{если } |w| < |v|, \end{cases} \quad (2.10)$$

где знаки « \pm » взяты из (2.7).

Будем предполагать, что неравенства $|e^{ip}| < 1$ и $|e^{ip}| > 1$ определяются величиной $|w/v|$ и, таким образом, не зависят от малого слагаемого $O(\varepsilon^2 + \delta^2)$. Заметим, что при $|w| < |v|$ связи между ячейками слабее связей внутри ячеек.

Т е о р е м а 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Собственные функции $\Psi_j(n) = (\psi_1^{(j)}(n), \psi_2^{(j)}(n))^T$, $j = 1, 2$, гамильтониана $H + V$ для околонулевых значений E_1, E_2 определяются равенствами

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(n) = e^{ip|n|}, \quad \psi_2^{(1)}(n) = \frac{e^{ip|n|}}{E + i\delta} \begin{cases} \frac{v^2 - w^2}{v^2} + O(\delta^2 + \varepsilon^2), & n \geq 0, \\ O(\delta^2 + \varepsilon^2), & n < 0, \end{cases} \\ \psi_1^{(2)}(n) = e^{ip|n|}, \quad \psi_2^{(2)}(n) = \frac{e^{ip|n|}}{E + i\delta} \begin{cases} O(\delta^2 + \varepsilon^2), & n \geq 0, \\ \frac{v^2 - w^2}{v^2} + O(\delta^2 + \varepsilon^2), & n < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.3), (2.4) следуют равенства

$$\psi_1(n) = e^{ip|n|}, \quad \psi_2(n) = \frac{e^{ip|n|}}{E + i\delta} \begin{cases} we^{ip} + v, & n \geq 0, \\ we^{-ip} + v, & n < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из (2.10), (2.12) получаем (2.11). \square

Собственная функция $\Psi_j(n)$, $j = 1, 2$, описывает локализованное состояние, если выполняется неравенство $|e^{ip}| < 1$, что достигается выбором одного из двух знаков в (2.10). Для знака противоположного выбранному получим резонансное (распадающееся) состояние. При этом из вида, например, функции $\Psi_1(n)$ и малости знаменателя $E + i\delta$ следует, что наибольший вклад в $|\Psi_1|^2$, а значит и в определение локализации частицы, вносит функция $\psi_2^{(1)}(n)$ в области $n \geq 0$. Следовательно, два имеющихся локализованных состояния сосредоточены, главным образом, в верхних узлах цепочки (см. рис. 1) с номерами ячеек $n \geq 0$ и $n < 0$. Ясно, что при локализации потенциала в верхнем узле цепочки, локализация состояний будет в нижних узлах.

Переход от локализованного состояния к резонансному в пространстве параметров означает исчезновение частицы и, следовательно, переход в другую топологическую фазу, что подтверждается и соответствием «объем–граница» [4]. В случае эрмитовой модели SSH межфазная граница описывается равенством $|w| = |v|$ (см. [4]); при наличии малой неэрмитовости это равенство становится приближенным (см. (2.10)); при фиксированных δ, ε фазовый переход, т. е. переход от $|e^{ip}| < 1$ к $|e^{ip}| > 1$ происходит не в точках $w = \pm v$, а в их малых окрестностях.

§ 3. Заключение

Изначально модель SSH эрмитова и представляет собой бесконечную цепочку из узлов, моделирующую электроны в полиацетилене. В настоящее время, благодаря интересу к топологическим фазам в неэрмитовом случае [5–11], эта модель с искусственно введенной неэрмитовостью с киральной или РТ симметрией, моделирующей внешние воздействия на открытую систему, очень популярна в физической литературе. В данной статье рассмотрена модель SSH с РТ симметрией и δ -образным потенциалом («барьером»), разделяющим бесконечную цепочку на две полубесконечные. Доказано, что при малом параметре неэрмитовости и малых энергиях на всей цепочке существуют две собственные функции, описывающие электронные состояния, которые могут как экспоненциально возрастать, так и экспоненциально убывать при $|n| \rightarrow \infty$.

Финансирование. Работа Чубурина Ю. П. поддержана УрО РАН, программа финансирования АААА-А16-116021010082-8. Работа Тинюковой Т. С. выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. Приложение к № 10. С. 131–136. <https://www.mathnet.ru/rus/ufn5648>
2. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension // Topological Aspects of Condensed Matter Physics. Oxford University Press, 2017. P. 387–450. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009>
3. Hasan M. Z., Kane C. L. Colloquium: Topological insulators // Reviews of Modern Physics. 2010. Vol. 82. Issue 4. P. 3045–3067. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.3045>
4. Asbóth J. K., Oroszlány L., Pályi A. A short course on topological insulators. Band structure and edge states in one and two dimensions. Cham: Springer, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25607-8>
5. Okuma Nobuyuki, Sato Masatoshi. Non-Hermitian topological phenomena: a review // Annual Review of Condensed Matter Physics. 2023. Vol. 14. P. 83–107. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-040521-033133>
6. Yao Shunyu, Wang Zhong. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Issue 8. 086803. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.086803>
7. Ashida Yuto, Gong Zongping, Ueda Masahito. Non-Hermitian physics // Advances in Physics. 2020. Vol. 69. Issue 3. P. 249–435. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>
8. Gong Zongping, Ashida Yuto, Kawabata Kohei, Takasan Kazuaki, Higashikawa Sho, Ueda Masahito. Topological phases of non-Hermitian systems // Physical Review X. 2018. Vol. 8. Issue 3. 031079. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.031079>
9. Bergholtz E. J., Budich J. C., Kunst F. K. Exceptional topology of non-Hermitian systems // Reviews of Modern Physics. 2021. Vol. 93. Issue 1. 015005. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.015005>
10. Lin Rijia, Tai Tommy, Li Linhu, Lee Ching Hua. Topological non-Hermitian skin effect // Frontiers of Physics. 2023. Vol. 18. Issue 5. 53605. <https://doi.org/10.1007/s11467-023-1309-z>
11. Banerjee Ayan, Sarkar Ronika, Dey Soumi, Narayan Awadhesh. Non-Hermitian topological phases: principles and prospects // Journal of Physics: Condensed Matter. 2023. Vol. 35. No. 33. 333001. <https://doi.org/10.1088/1361-648x/acd1cb>
12. Su W. P., Schrieffer J. R., Heeger A. J. Solitons in polyacetylene // Physical Review Letters. 1979. Vol. 42. Issue 25. P. 1698–1701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1698>
13. Bender C. M., Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80. Issue 24. P. 5243–5246. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>
14. Lieu S. Topological phases in the non-Hermitian Su–Schrieffer–Heeger model // Physical Review B. 2018. Vol. 97. Issue 4. 045106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.045106>
15. Chuburin Yu. P., Tinyukova T. S. The emergence of bound states in a superconducting gap at the topological insulator edge // Physics Letters A. 2020. Vol. 384. Issue 27. 126694. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126694>
16. Тинюкова Т. С., Чубурин Ю. П. Майорановские состояния вблизи примеси в бесконечной и полубесконечной модели Китаева // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 200. № 1. С. 137–146. <https://doi.org/10.4213/tmf9585>
17. Taylor J. R. Scattering theory. The quantum theory of nonrelativistic collisions. New York: Courier Corporation, 2006.
18. Edwards R. E. Functional analysis: theory and applications, New York: Courier Corporation, 1995.

Поступила в редакцию 20.09.2023

Принята к публикации 25.10.2023

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1043-4753>

E-mail: ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2621-6892>

E-mail: chuburin@udman.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Собственные значения и собственные функции возмущенного неэрмитового гамильтониана SSH с PT-симметрией // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 87–95.

Keywords: eigenvalue, eigenfunction, non-Hermitian SSH Hamiltonian, PT symmetry, Green's function.

MSC2020: 81Q10, 81Q15, 47A10, 47A40

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-07

In the paper we find near-zero eigenvalues (their physical meaning is the electron energy) and eigenfunctions describing the electronic states of the non-Hermitian SSH Hamiltonian for an infinite chain with PT symmetry, perturbed by a δ -shaped potential. We prove that for a small non-Hermitian parameter there are two (generalized) eigenvalues of multiplicity one, and, in contrast to the Hermitian model, the corresponding (generalized) eigenfunctions depending on the parameters of the system can either increase exponentially (which corresponds to resonant, i. e., decaying states) or decrease exponentially (which corresponds to bound states) as $|n| \rightarrow \infty$.

Funding. Research by Chuburin Yu. P. was supported by the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, nansing program AAAA-A16-116021010082-8. Research by Tinyukova T. S. was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01483-23-00, project FEWS-2020-0010.

REFERENCES

1. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Physics-Uspekhi*, 2001, vol. 44, issue 10 suppl., pp. s131–s136. <https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>
2. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension, *Topological Aspects of Condensed Matter Physics*, Oxford University Press, 2017, pp. 387–450. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009>
3. Hasan M. Z., Kane C. L. Colloquium: Topological insulators, *Reviews of Modern Physics*, 2010, vol. 82, issue 4, pp. 3045–3067. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.3045>
4. Asbóth J. K., Oroszlány L., Pályi A. *A short course on topological insulators. Band structure and edge states in one and two dimensions*, Cham: Springer, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25607-8>
5. Okuma Nobuyuki, Sato Masatoshi. Non-Hermitian topological phenomena: a review, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2023, vol. 14, pp. 83–107. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-040521-033133>
6. Yao Shunyu, Wang Zhong. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems, *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, issue 8, 086803. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.086803>
7. Ashida Yuto, Gong Zongping, Ueda Masahito. Non-Hermitian physics, *Advances in Physics*, 2020, vol. 69, issue 3, pp. 249–435. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>
8. Gong Zongping, Ashida Yuto, Kawabata Kohei, Takasan Kazuaki, Higashikawa Sho, Ueda Masahito. Topological phases of non-Hermitian systems, *Physical Review X*, 2018, vol. 8, issue 3, 031079. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.031079>
9. Bergholtz E. J., Budich J. C., Kunst F. K. Exceptional topology of non-Hermitian systems, *Reviews of Modern Physics*, 2021, vol. 93, issue 1, 015005. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.015005>
10. Lin Rijia, Tai Tommy, Li Linhu, Lee Ching Hua. Topological non-Hermitian skin effect, *Frontiers of Physics*, 2023, vol. 18, issue 5, 53605. <https://doi.org/10.1007/s11467-023-1309-z>
11. Banerjee Ayan, Sarkar Ronika, Dey Soumi, Narayan Awadhesh. Non-Hermitian topological phases: principles and prospects, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2023, vol. 35, no. 33, 333001. <https://doi.org/10.1088/1361-648x/acd1cb>
12. Su W. P., Schrieffer J. R., Heeger A. J. Solitons in polyacetylene, *Physical Review Letters*, 1979, vol. 42, issue 25, pp. 1698–1701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1698>

13. Bender C. M., Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry, *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 24, pp. 5243–5246. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>
14. Lieu S. Topological phases in the non-Hermitian Su–Schrieffer–Heeger model, *Physical Review B*, 2018, vol. 97, issue 4, 045106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.045106>
15. Chuburin Yu. P., Tinyukova T. S. The emergence of bound states in a superconducting gap at the topological insulator edge, *Physics Letters A*, 2020, vol. 384, issue 27, 126694. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126694>
16. Tinyukova T. S., Chuburin Yu. P. Majorana states near an impurity in the Kitaev infinite and semi-infinite model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 200, issue 1, pp. 1043–1052. <https://doi.org/10.1134/s0040577919070080>
17. Taylor J. R. *Scattering theory. The quantum theory of nonrelativistic collisions*, New York: Courier Corporation, 2006.
18. Edwards R. E. *Functional analysis: theory and applications*, New York: Courier Corporation, 1995.

Received 20.09.2023

Accepted 25.10.2023

Tatyana Sergeevna Tinyukova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1043-4753>

E-mail: ttinyukova@mail.ru

Yurii Pavlovich Chuburin, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2621-6892>

E-mail: chuburin@udman.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Eigenvalues and eigenfunctions of the perturbed non-Hermitian SSH Hamiltonian with PT symmetry, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 87–95.