

УДК 517.958, 530.145.6

© *В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков***НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ**

Изучается игровая задача о сближении нелинейной управляемой системы с целевым множеством в конечномерном фазовом пространстве в фиксированный момент времени. Задача формулируется и изучается в рамках понятий и конструкций теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным во второй половине 20 века. Одной из центральных проблем теории позиционных дифференциальных игр является проблема вычисления множеств позиционного поглощения в игровых задачах о сближении. В работе исследуется ключевое в теории позиционных дифференциальных игр свойство стабильности, представляющее собой характеристику некоторых замкнутых множеств в пространстве позиций управляемой системы, удобных первому игроку для ведения игры. Важно то, что это свойство является характерным и для множеств разрешимости в задачах о сближении: привлечение понятия стабильности к исследованиям позволяет в некоторых конкретных задачах о сближении получать аналитические описания множеств разрешимости и в ряде конкретных задач разрабатывать алгоритмы приближенного вычисления решения. Приведены некоторые модификации определения  $u$ -стабильного моста в рассматриваемой задаче о сближении и системы множеств, аппроксимирующей множество достижимости. Приведены также конкретные задачи о сближении механических систем, проведено моделирование решений задач на ЭВМ и представлены графические результаты моделирования.

*Ключевые слова:* конфликтно управляемая система, управление, игрок, игровая задача о сближении, фиксированный момент, множество разрешимости, позиционная стратегия, позиция, стабильность.

DOI: 10.35634/2226-3594-20232-62-09

**Введение**

Рассматривается конфликтно управляемая нелинейная (вообще говоря) система в конечномерном пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается игровая задача о сближении в рамках теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным во второй половине 20 века. В работе для рассматриваемой конфликтно управляемой системы исследуется ключевое в теории позиционных дифференциальных игр свойство стабильности, введенное Н. Н. Красовским в [1–3]. Это свойство выделяет в пространстве позиций игры стабильные мосты, удобные для ведения игры первому игроку, решающему задачу о сближении. Одна из центральных проблем теории позиционных дифференциальных игр — проблема вычисления множеств разрешимости задач о сближении. Свойство стабильности является характерным свойством множеств разрешимости, и его привлечение к исследованиям дает возможность в разработке эффективных алгоритмов приближенного вычисления множеств разрешимости.

В настоящее время существует несколько формулировок свойства стабильности, эквивалентных по существу, то есть выделяющих в пространстве позиций игровых задач одни и те же множества. При изучении различных вопросов, возникающих в теории позиционных дифференциальных игр и при решении конкретных задач, иногда удается сформулировать свойство стабильности, учитывающее специфику вопроса или рассматриваемой конкретной задачи, и в то же время удобное для конструирования решения задачи.

При изучении некоторых вопросов, относящихся к теории, удобно привлечение инфинитезимальных формулировок свойства стабильности. Так, например, привлечение инфинитезимальных формулировок свойства стабильности эффективно при сравнении множеств разрешимости различных (по постановкам) игровых задач, скажем, — при сравнении множества разрешимости задачи о сближении с фиксированным моментом окончания и множества разрешимости задачи о сближении для той же самой конфликтно управляемой системы к фиксированному моменту. Эффективной как при изучении теоретических вопросов, так и при рассмотрении конкретных игровых задач оказалась предложенная в работах Н. Н. Красовского [4, 5] формулировка свойства стабильности, включающая в себя явно гамильтониан конфликтно управляемой системы. Эта унификационная формулировка свойства стабильности включает теорию позиционных дифференциальных игр в рамки формализма Гамильтона–Якоби.

Цель настоящей статьи состоит в описании схем и конструкций, предназначенных для решения конкретных задач о сближении в фиксированный момент времени. В конце 60-х годов Л. С. Понтрягин для решения таких задач, в которых конфликтно управляемые системы обладали линейной динамикой, предложил при определенных информационных условиях на игроков эффективный метод конструирования множества начальных позиций игры, из которых разрешима задача о сближении: он ввел в теорию дифференциальных игр понятие альтернированного интеграла [6, 7]. Альтернированному интегралу и связанным с ним понятиям альтернированных сумм, предназначенных для приближенного вычисления задач сближения, Л. С. Понтрягин, его сотрудники и коллеги посвятили ряд научных работ [8–12]. Эти работы существенно повлияли на развитие теории дифференциальных игр. В работах [13, 14] Б. Н. Пшеничный обобщил альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина на нелинейные дифференциальные игры преследования. Им были введены  $\varepsilon$ -стратегии, с помощью которых можно решать в принципе игровую задачу о сближении. Параллельно на Урале в 60–70-е годы Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным создавалась теория позиционных дифференциальных игр в постановке, не предполагающей, вообще говоря, линейности динамики конфликтно управляемых систем и при несколько иных информационных условиях на игроков, чем в работах Л. С. Понтрягина и его коллег. Были введены такие понятия как позиционные стратегии игроков, конструктивные движения конфликтно управляемой системы, множество позиционного поглощения и связанные с ним (упомянутые выше) понятия стабильности и стабильных мостов [1–5]. Исследовалась в рамках различных постановок позиционная игровая задача сближения–уклонения, сформулирована и доказана ключевая в теории позиционных дифференциальных игр теорема об альтернативе [3]. Рядом авторов изучалось свойство стабильности в игровых задачах о сближении [15, 17, 18, 22]. Разрабатывались схемы и алгоритмы конструирования и приближенного конструирования множеств разрешимости и разрешающих позиционных стратегий игроков в задачах о сближении [23, 24, 26, 27]. Основу конструирования разрешающих позиционных стратегий составил позиционный принцип Н. Н. Красовского экстремального прицеливания на стабильные мосты [3].

В 80–90-е гг. А. И. Субботин развил концепцию унификации на уравнения в частных производных первого порядка, создав оригинальную теорию минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби и уравнений в частных производных первого порядка [18–20].

В последние десятилетия продолжаются не столь интенсивно, как в 60–80-е годы предыдущего столетия, исследования теоретических аспектов и задач теории дифференциальных игр, а также разработка методов и алгоритмов конструирования их решения. При этом работы ведутся в разных направлениях. Так, в рамках позиционных дифференциальных игр появляются новые направления исследований и новые задачи [25, 35]. В некоторых конкретных линейных дифференциальных играх получено аналитическое описание решений [23, 24]. Осуществляется разработка алгоритмов приближенного вычисления решений

линейных дифференциальных игр [16,21]. В [16] вычислены операторные конструкции, порождающие  $u$ -стабильные мосты, проведена их дискретизация по времени и пространству, получены оценки погрешности приближенных вычислений. В области нелинейных дифференциальных игр появляются работы [27, 28, 33–35], посвященные изучению свойства стабильности и ориентированные на создание методов приближенного конструирования решений игровых задач.

Настоящая работа дополняет исследования [29–32].

Работа посвящена юбилею профессора Николая Никандровича Петрова. Желаем ему доброго здоровья, успехов в научной деятельности и благополучия его семье!

## § 1. Игровая задача о сближении: формулировка и разрешающие конструкции

Задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$ ,  $t_0 \leq \vartheta < \infty$ , описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v) = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v), \quad u \in P, v \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  —  $m$ -мерный фазовый вектор из евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$ ,  $u, v$  — управления первого и второго игроков соответственно,  $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$ ,  $Q \in \text{comp}(\mathbb{R}^q)$ , где  $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$  — метрическое пространство компактов в  $\mathbb{R}^k$  с хаусдорфовой метрикой.

Предполагается, что функция  $f(t, x, u, v)$  удовлетворяет следующим условиям.

**А.** Вектор-функции  $f^{(1)}(t, x, u)$  и  $f^{(2)}(t, x, v)$  определены и непрерывны на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$  и  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times Q$  соответственно, и для любого компакта  $\mathbb{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  найдется такая постоянная  $L = L(\mathbb{D}) \in (0, \infty)$ , что для любых  $u \in P, v \in Q, (t, x^{(i)}) \in \mathbb{D}, i = 1, 2$

$$\|f^{(1)}(t, x^{(1)}, u) - f^{(1)}(t, x^{(2)}, u)\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|,$$

$$\|f^{(2)}(t, x^{(1)}, v) - f^{(2)}(t, x^{(2)}, v)\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|.$$

**В.** Существует такая постоянная  $\gamma \in (0, \infty)$ , что для любых  $(t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|);$$

здесь  $\|f\|$  — норма вектора  $f$  в евклидовом пространстве.

Из условия **А** следует, что скалярная функция

$$\omega^*(\rho) = \max\{\|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| : (t_*, x_*), (t^*, x^*) \text{ из } \mathbb{D},$$

$$|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \rho, \quad (u, v) \in P \times Q\} \downarrow 0 \text{ при } \rho \downarrow 0.$$

Функция  $\omega^*(\rho)$  — модуль непрерывности по совокупности  $t, x$  на компакте  $\mathbb{D}$  играет важную роль при обосновании корректности приближенных разрешающих конструкций, аппроксимирующих множество разрешимости  $W^0$ . С точки зрения обоснования корректности аппроксимационных конструкций она играет такую же роль, что и константа Липшица  $L = L(\mathbb{D})$ .

Сформулируем задачу о сближении, стоящую перед первым игроком.

Задано целевое множество  $M$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ .

**Задача 1.1.** Первому игроку требуется выбором управления  $u = u(t, x)$  обеспечить приведение фазового вектора системы (1.1) на  $M$  в момент  $\vartheta$  (т. е.  $x(\vartheta) \in M$ ), как бы ни действовал второй игрок в рамках позиционных стратегий  $v \doteq v(t, x)$ .

Заметим, что решение задачи 1.1 требуется найти в классе позиционных стратегий  $u \doteq u(t, x)$  первого игрока. Позиционные стратегии  $u \doteq u(t, x)$  и  $v \doteq v(t, x)$ , а также порожденные ими движения системы (1.1) на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  определены в монографии [3].

В задаче 1.1, рассматриваемой в такой достаточно общей постановке, можно ввести понятие множества позиционного поглощения  $W^0 \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  (см. [3]) — множества всех исходных позиций задачи 1.1, из которых она разрешима. Также мы называем это множество  $W^0$  множеством разрешимости задачи 1.1.

Во многих конкретных задачах 1.1 множество  $W^0$  имеет непустые сечения  $W^0(t) = \{(t, x), x \in W^0\} \subset \mathbb{R}^m$  при некоторых  $t \in [t_0, \vartheta]$ . При этом, согласно определению множества  $W^0$ , имеет место равенство  $W^0(\vartheta) = M$ .

Из условий **A**, **B** и компактности  $M \subset \mathbb{R}^m$  следует, что все элементы разрешающей конструкции задачи 1.1, связанной с конструированием  $W^0$ , содержатся в некоторой цилиндрической области  $\mathbb{D} = [t_0, \vartheta] \times \Omega$ , основанием которой является множество  $(t_0, \Omega)$ , где  $\Omega = \mathbb{B}(\mathbf{0}; r) = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b\| \leq r\}$  — шар конечного радиуса  $r$  (рис. 1).

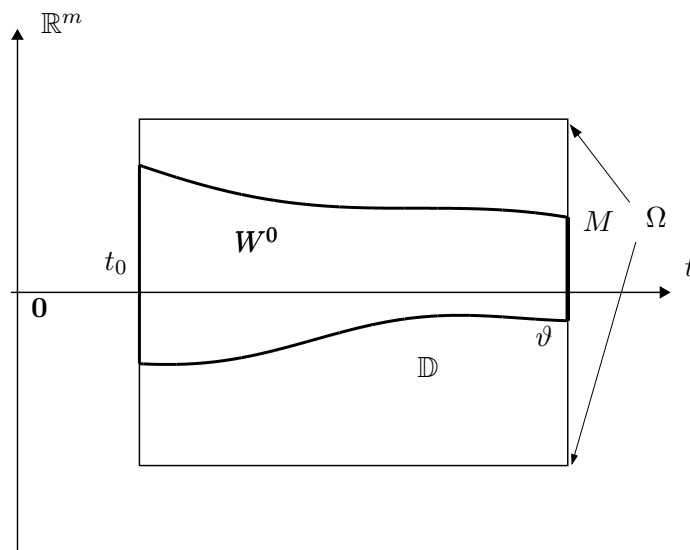


Рис. 1

Здесь и ниже символ  $\mathbb{B}(\mathbf{0}; R)$  означает шар в  $\mathbb{R}^m$  с центром в  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$  конечного радиуса  $R$ .

Эту область  $\mathbb{D}$  в рассматриваемой задаче 1.1 укажем ниже.

Определим свойство  $u$ -стабильности в традиционной форме, представленной в монографии Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [3].

Пусть  $(t, x) \in \mathbb{D}$ ,  $v \in Q$ . Введем множество

$$F_v(t, x) = \text{co } \mathcal{F}_v(t, x), \quad (1.2)$$

где  $\mathcal{F}_v(t, x) = \{f = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v) : u \in P\}$  — вектограмма скоростей системы (1.1) в позиции  $(t, x)$ , отвечающая управлению  $v \in Q$  второго игрока.

Зафиксируем промежуток  $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ , позицию  $(t_*, x_*) \in \mathbb{D}$  и вектор  $v \in Q$ .

Введем на промежутке  $[t_*, t^*]$  дифференциальное включение (д. в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_v(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \quad (1.3)$$

и множество достижимости (м. д.)  $X_v(t^*, t_*, x_*)$  д. в. (1.3) в момент  $t^*$  (рис. 2).

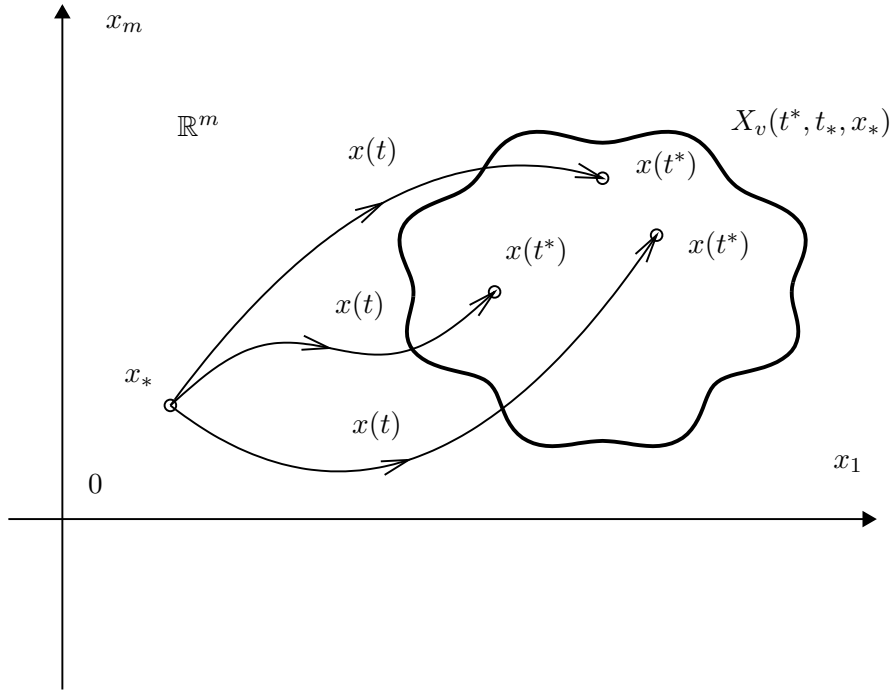


Рис. 2

**Определение 1.1** (см. [3]). Замкнутое множество  $W \subset \mathbb{D}$  назовем  $u$ -стабильным мостом в задаче о сближении, если для любых  $t_*, t^*$  ( $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ ),  $x_* \in W(t_*)$  и  $v \in Q$  имеет место

$$W(\vartheta) \subset M, \quad W(t^*) \cap X_v(t^*, t_*, x_*) \neq \emptyset; \quad (1.4)$$

здесь обозначено  $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

Известно (см. [1]), что множество разрешимости  $W^0$  есть максимальный (по включению)  $u$ -стабильный мост в задаче 1.1. При этом  $W^0$  можно определить как  $\text{cl}(\cup W)$  — замыкание объединения всех  $u$ -стабильных мостов  $W$  в задаче 1.1.

Наряду с равенством  $W^0(\vartheta) = M$  выполняется включение  $W^0 \subset \mathbb{D}$ .

Одним из ключевых вопросов при решении задачи 1.1 является вопрос о (точном) выделении множества  $W^0$  в цилиндре  $\mathbb{D}$ . При решении каждой конкретной задачи 1.1 (конкретная система (1.1) и множество  $M$ ) этот вопрос возникает прежде всего как вопрос об аналитическом описании множества  $W^0$ . Для аналитического описания  $W^0$  можно попытаться воспользоваться свойством его  $u$ -стабильности вкупе с краевым условием  $W^0(\vartheta) = M$ . При этом восстановление множества  $W^0$  осуществляется в виде восстановления его временных слоев в направлении убывания времени  $t$  от конечного момента  $\vartheta$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$  к начальному моменту  $t_0$  на базе применения свойства  $u$ -стабильности моста  $W^0$ . Однако в такой схеме выделения моста  $W^0$  имеет место несогласованность направления выделения  $W^0$  с направлением (по времени), в котором развиваются множества достижимости  $X_v(t^*, t_*, x_*)$ ,  $(t_*, x_*) \in W^0$ ,  $t^* \in [t_*, \vartheta]$ , входящие в определение 1.1.

Эта несогласованность между направлением выделения множества  $W^0$  в  $\mathbb{D}$  и направлением эволюции множеств  $X_v(t^*, t_*, x_*)$  существенно осложняет выделение множества  $W^0$  в задачах о сближении, в которых динамика системы (1.1) нелинейна.

Устраним эту несогласованность во времени, представляющую собой одно из препятствий к выделению моста  $W^0$  в  $\mathbb{D}$ , вводя обратное время.

Введем обратное время  $\tau = t_0 + \vartheta - t$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

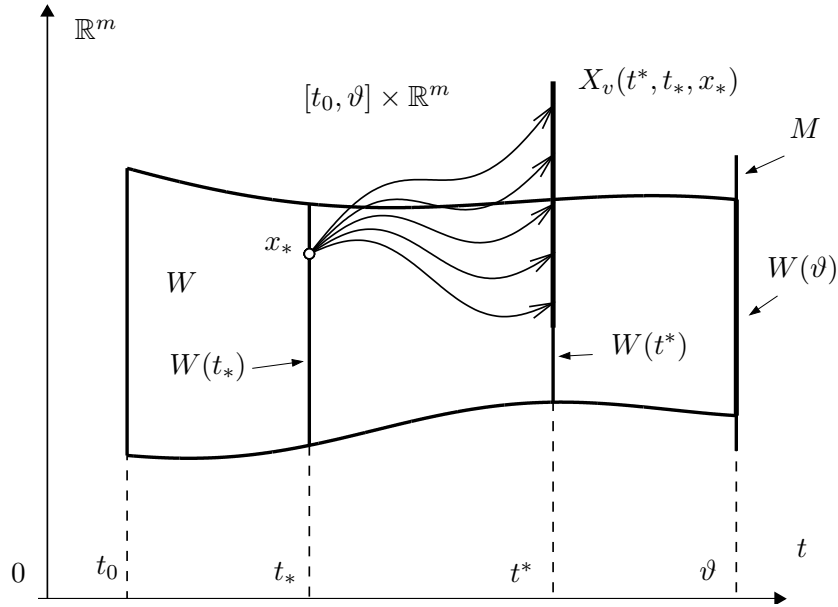


Рис. 3

Систему (1.1) запишем в терминах времени  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= h(\tau, z, u, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u, v), \\ \tau &\in [t_0, \vartheta], \quad (\tau, z) \in \mathbb{D}, \quad (u, v) \in P \times Q. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вектор-функция  $h(\tau, z, u, v)$  представлена в виде

$$h(\tau, z, u, v) = h^{(1)}(\tau, z, u) + h^{(2)}(\tau, z, v),$$

где

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\tau, z, u) &= -f^{(1)}(t_0 + \vartheta - \tau, z, u), \\ h^{(2)}(\tau, z, v) &= -f^{(2)}(t_0 + \vartheta - \tau, z, v). \end{aligned}$$

Введем на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  д. в.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} \in H_v(\tau, z) &= -F_v(t_0 + \vartheta - \tau, z), \\ (\tau, z) &\in \mathbb{D}, \quad v \in Q. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Полагаем

$Z_v(\tau^*, \tau_*, z_*)$  — м. д. д. в. (1.6) в момент  $\tau^*$  ( $t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$ ) из начальной точки  $z(\tau_*) = z_*$ ;

$Z_v(\tau^*, \tau_*, Z_*)$  — м. д. д. в. (1.6) в момент  $\tau^*$  из начального множества  $Z_* \subset \mathbb{R}^m$ , отвечающего моменту  $\tau_*$ .

Полагаем при  $t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$ ,  $Z_* \subset \mathbb{R}^m$

$$Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap_{v \in Q} Z_v(\tau^*, \tau_*, Z_*). \quad (1.7)$$

Множество  $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) \subset \mathbb{R}^m$  мы называем множеством совместной (по всем  $v \in Q$ ) достижимости д. в. (1.6) в момент  $\tau^*$  из множества  $Z_*$ , отвечающего моменту  $\tau_*$ .

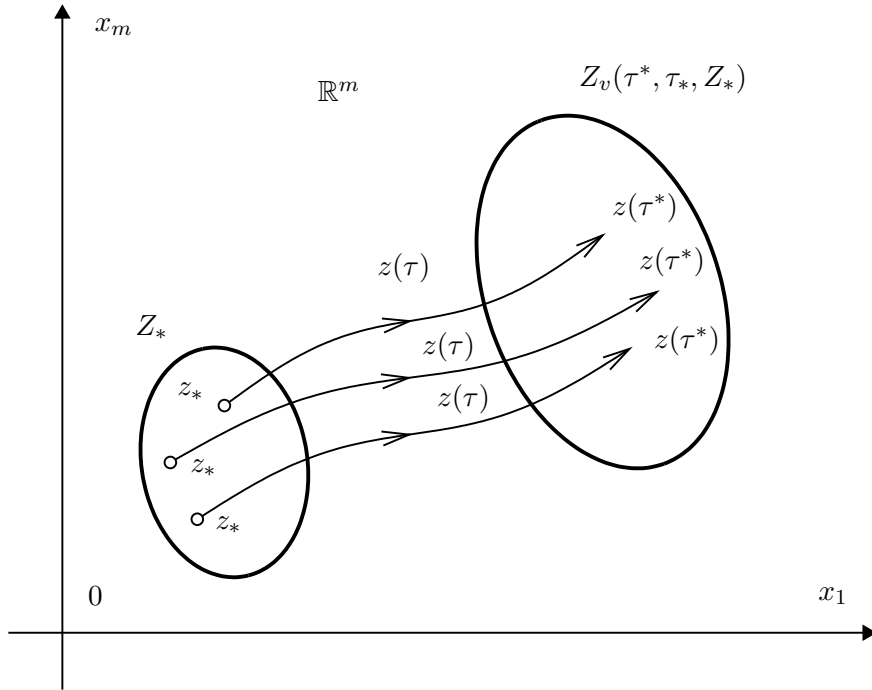


Рис. 4

В терминах обратного времени  $\tau \in [t_0, \vartheta]$  и многозначного отображения  $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$   $u$ -стабильный мост  $W \subset \mathbb{D}$  в задаче 1.1 представим как множество  $Z \subset \mathbb{D}$ , удовлетворяющее

$$\begin{aligned} Z(t_0) = W(\vartheta) \subset M, \quad Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)), \\ t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta; \end{aligned} \quad (1.8)$$

здесь  $Z(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau, z) \in Z\}$ .

Множество  $Z$  (1.8) назовем  $u$ -стабильным трактом конфликтно управляемой системы (1.5).

Покажем, что равенство

$$Z(\tau) = W(t), \quad t + \tau = t_0 + \vartheta, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1.9)$$

определяет  $u$ -стабильный тракт  $Z = \bigcup_{\tau \in [t_0, \vartheta]} (\tau, Z(\tau))$ .

Действительно, пусть задано множество  $Z \subset \mathbb{D}$ , определяемое равенством (1.9), где  $W$  –  $u$ -стабильный мост в задаче 1.1.

Очевидно, что  $Z(t_0) = W(\vartheta) \subset M$ .

Покажем, что выполняется второе включение из (1.8).

Выберем произвольные  $\tau_*$ ,  $\tau^*$  ( $t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$ ) и  $z^* \in Z(\tau^*)$ . Тогда  $x_* = z^* \in W(t_*)$ , где  $t_* = t_0 + \vartheta - \tau^*$ . Для  $t^* = t_0 + \vartheta - \tau_*$  и  $v \in Q$  выполняется  $X_v(t^*, t_*, x_*) \cap W(t^*) \neq \emptyset$  и, значит, найдется движение  $x(t) = x(t, t_*, x_*)$  д.в. (1.3) на  $[t_*, t^*]$ , удовлетворяющее  $x^* = x(t^*) \in W(t^*)$ .

Полагаем  $z_* = x^* \in Z(\tau_*)$  и движение  $x(t)$  на  $[t_*, t^*]$  записываем как движение  $z(\tau) = z(\tau, \tau_*, z_*)$  д.в. (1.6) на  $[\tau_*, \tau^*]$ .

Получаем, что для любой точки  $z^* \in Z(\tau^*)$  и любого  $v \in Q$  найдется точка  $z_* \in Z(\tau_*)$ , удовлетворяющая равенству  $z^* = z(\tau^*, \tau_*, z_*)$ . Отсюда следует включение  $z^* \in Z_v(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$ ,  $v \in Q$ , из которого, в свою очередь, следует  $z^* \in Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ .

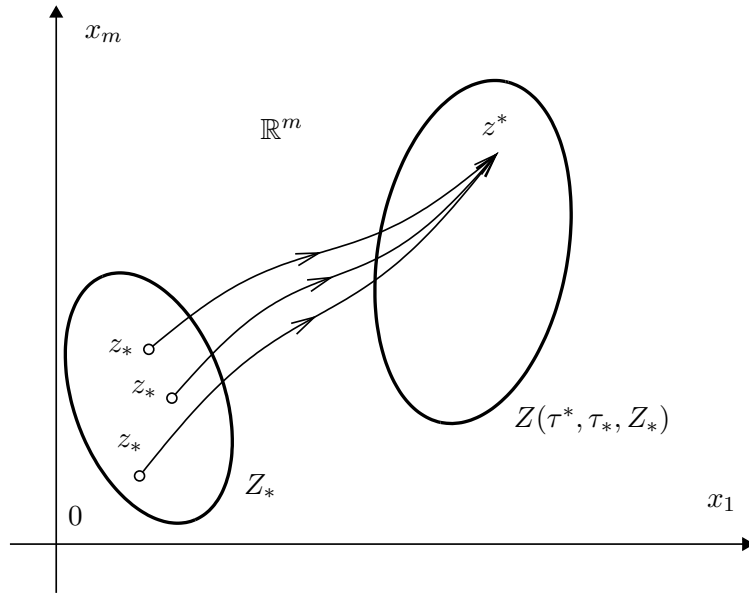


Рис. 5

Вместе с тем установлено, что множество  $Z \subset \mathbb{D}$ , определяемое равенством (1.9), удовлетворяет включению  $Z(\tau^*) \subset (\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$  и, стало быть, множество  $Z$  есть  $u$ -стабильный тракт в задаче 1.1.

Аналогично рассуждая, можем показать, что для любого  $u$ -стабильного тракта  $Z \subset \mathbb{D}$  равенство (1.9) определяет  $u$ -стабильный мост  $W = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, W(t))$  в задаче 1.1.

Таким образом, равенство (1.9) задает взаимно однозначное соответствие между  $u$ -стабильными мостами  $W$  и  $u$ -стабильными трактами  $Z$  в задаче 1.1.

В семействе  $u$ -стабильных трактов  $Z$  существует максимальный (по включению)  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$ , и он определяется как  $u$ -стабильный тракт, соответствующий максимальному  $u$ -стабильному мосту в  $W^0$  в задаче 1.1 при помощи равенства  $Z^0(\tau) = W^0(t)$ ,  $t + \tau = t_0 + \vartheta$ .

Поскольку  $u$ -стабильный мост  $W^0$  можно описать аналитически лишь в немногих задачах 1.1, то и  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$  можно описать аналитически лишь в немногих задачах 1.1. В связи с этим актуально приближенное вычисление множества  $Z^0$ , которое предполагает на первом этапе разработку схем и алгоритмов приближенного вычисления  $Z^0$ , а затем разработку программ приближенного вычисления  $Z^0$  на базе этих алгоритмов и последующее моделирование на ЭВМ конкретных задач 1.1.

Приближенные вычисления множества  $Z^0$  связаны с дискретизацией пространства  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  позиций  $(t, z)$  системы (1.5) и д. в. (1.6), а точнее, — с дискретизацией цилиндра  $\mathbb{D}$ , в котором происходит игра сближения системы (1.1) с целевым множеством  $M$ .

Здесь мы уточним размеры цилиндра  $\mathbb{D}$ , принимая во внимание условие **B**, наложенное на систему (1.1), и которому, следовательно, удовлетворяет и система (1.5).

Для этого, зафиксировав некоторое  $\varepsilon > 0$ , рассмотрим множество  $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$  как стартовое множество для системы (1.5) и д. в. (1.6) на  $[t_0, \vartheta]$ , отвечающее начальному моменту  $t_0$ , где  $v \in Q$ .

Введение множества  $M_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестности множества связано с разработкой и обоснованием корректности схем и алгоритмов приближенного вычисления  $Z^0$ .

Полагаем  $\mu = \max_{z^{(0)} \in M} \|z^{(0)}\|$ , так что  $\max_{z^{(0)} \in M_\varepsilon} \|z^{(0)}\| = \mu + \varepsilon$ .

При выделении упомянутого выше цилиндра  $\mathbb{D}$  в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  воспользуемся следующим утверждением.



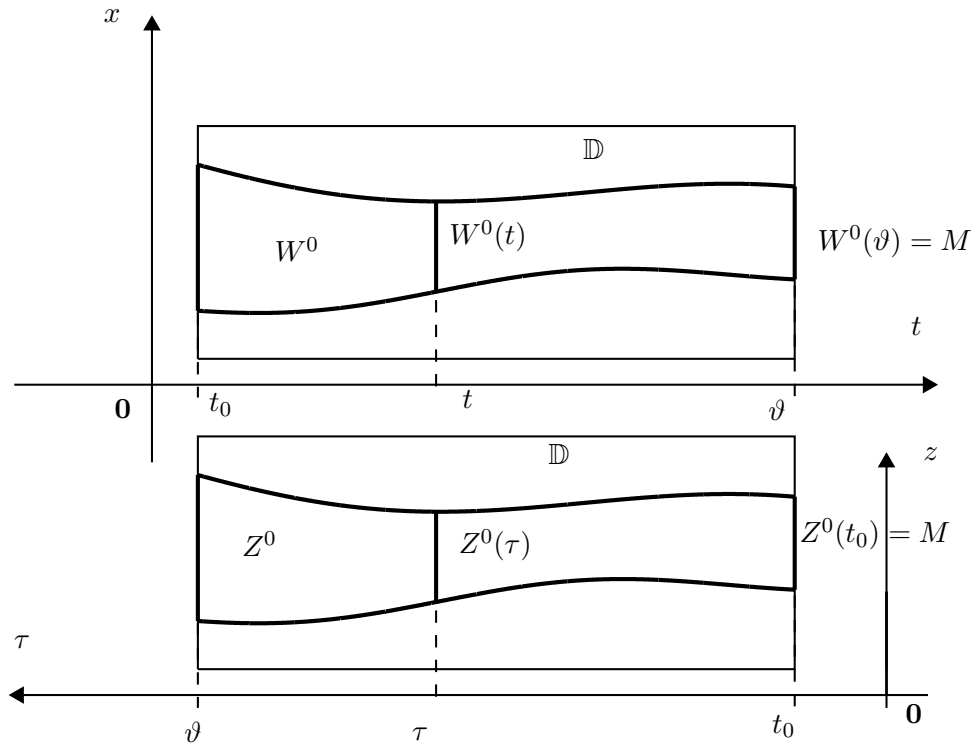


Рис. 6

**Л е м м а 1.1** (Лемма Гронуолла–Беллмана (см. [36, с. 219])). Пусть скалярные непрерывные функции  $\varkappa(\tau)$  и  $g(\tau)$  на  $[t_0, \vartheta]$  неотрицательны и

$$\varkappa(\tau) \leq \alpha + \int_{t_0}^{\tau} g(s) \cdot \varkappa(s) ds, \quad \tau \in [t_0, \vartheta].$$

где  $\alpha \in (0, \infty)$ .

Тогда

$$\varkappa(\tau) \leq \alpha \exp \left( \int_{t_0}^{\tau} g(s) ds \right), \quad \tau \in [t_0, \vartheta].$$

Выберем произвольные  $z^{(0)} \in M_\varepsilon$  и допустимые управления  $u(s), v(s)$  на  $[t_0, \vartheta]$  игроков (т.е.  $u(s) \in P, v(s) \in Q, s \in [t_0, \vartheta]$  и  $u(s), v(s)$  измеримы по Лебегу на  $[t_0, \vartheta]$ ).

Тогда движение  $z(\tau)$  системы (1.5) на  $[t_0, \vartheta]$  с начальной точкой  $z(t_0) = z^{(0)}$ , отвечающее управлениям  $u(s), v(s)$  на  $[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяет соотношению

$$z(\tau) = z^{(0)} + \int_{t_0}^{\tau} h(s, z(s), u(s), v(s)) ds, \quad \tau \in [t_0, \vartheta].$$

Учитывая условие **В**, наложенное на систему (1.1) и, следовательно, — на систему (1.5), получаем

$$\|z(\tau)\| \leq \|z^{(0)}\| + \gamma \int_{t_0}^{\tau} (1 + \|z(s)\|) ds, \quad \tau \in [t_0, \vartheta],$$

и, значит,

$$\|z(\tau)\| \leq \alpha + \int_{t_0}^{\tau} (g(s)\|z(s)\|) ds, \quad \tau \in [t_0, \vartheta],$$

где  $\alpha = \|z^{(0)}\| + \gamma \cdot (\vartheta - t_0)$ ,  $g(s) = \gamma$  при  $s \in [t_0, \vartheta]$ .

Принимая во внимание лемму Гронуолла–Беллмана, получаем

$$\|z(\tau)\| \leq \mu^{(\varepsilon)}, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad (1.10)$$

здесь  $\mu^{(\varepsilon)} = (\mu + \varepsilon + \gamma \cdot (\vartheta - t_0))e^{\gamma(\vartheta - t_0)} \in (0, \infty)$ .

Оценка (1.10), очевидно, справедлива и для движений  $z(\tau)$ ,  $z(t_0) = z^{(0)} \in M_\varepsilon$ ,  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ , д. в. (1.6).

Следует отметить, что (1.10) представляет собой достаточно грубую экспоненциальную оценку величины  $\|z(\tau)\|$ , которая выведена на базе условия **B**, учитывающего динамику системы (1.1) в достаточно грубой форме. Существуют более тонкие оценки величины  $\|z(\tau)\|$ ,  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ , учитывающие особенности поведения вектор-функции  $h(\tau, z, u, v)$  ( $f(t, x, u, v)$ ) в моменты  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ .

Мы тем не менее будем считать, что выделена цилиндрическая область  $\mathbb{D} = [t_0, \vartheta] \times \mathbb{B}(\mathbf{0}; r)$ ,  $r = \mu^{(\varepsilon)}$ , в которой рассматривается игровая задача 1.1 о сближении системы (1.1) с  $M$ .

Теперь, уточнив цилиндр  $\mathbb{D}$ , в котором развивается игра сближения системы (1.1) с  $M$ , вернемся к вопросам, связанным с дискретизацией цилиндра  $\mathbb{D}$ .

Дискретизацию можно разбить на два этапа. На первом этапе мы осуществляем дискретизацию промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , подменяя его некоторым конечным разбиением и при этом не подвергая дискретизации по фазовой переменной  $z$  шар  $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r)$ , а также саму систему (1.5) и д. в. (1.6). На втором этапе мы должны осуществить дискретизацию шара  $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r)$ , системы (1.5) и д. в. (1.6) по переменной  $z$ . Эта дискретизация по переменной  $z$  должна происходить с учетом проведенной до этого дискретизации промежутка  $[t_0, \vartheta]$ . Она может принимать различные формы. Разговор об этой дискретизации составляет предмет отдельной статьи, и в этой работе мы сосредоточимся только на обсуждении первого этапа дискретизации, т. е. на дискретизации по времени и связанных с ней приближенных разрешающих конструкциях, аппроксимирующих  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$ .

Итак, введем дискретизацию промежутка  $[t_0, \vartheta]$  — двоичное разбиение  $\Gamma = \{t_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$  с диаметром  $\Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$ ,  $N = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Выберем произвольные  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  — промежуток разбиения  $\Gamma$ , точку  $(\tau_i, z^{(i)}) \in \mathbb{D}$  и рассмотрим на полуинтервале  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  д. в.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &\in H_v(\tau_i, z^{(i)}) + \mathbb{B}(\mathbf{0}; \varphi(\Delta)), \\ z(\tau_i) &= z^{(i)}, \quad v \in Q; \end{aligned} \quad (1.11)$$

здесь  $\varphi(\delta) = \omega^*((1 + K)\delta)$ ,  $\delta > 0$  и  $K = \max(\|h(\tau, z, u, v)\| : (\tau, z) \in \mathbb{D}, (u, v) \in P \times Q) = \max(\|f(t, x, u, v)\| : (t, x) \in \mathbb{D}, (u, v) \in P \times Q) < \infty$ .

Нетрудно заметить, что д. в. (1.11) происходит от д. в. (1.6). В нем материализована идея ломаных Эйлера из теории дифференциальных уравнений: в д. в. (1.6) «подморожена» правая часть  $H_v(\tau, z)$ , т. е. на  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  вместо  $H_v(\tau, z)$  в д. в. (1.11) входит множество  $H_v(\tau_i, z^{(i)})$ , отвечающее начальным значениям  $(\tau_i, z^{(i)})$  д. в. (1.11) на полуинтервале  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . К тому же выпуклый компакт  $H_v(\tau_i, z^{(i)})$  слегка раздут путем добавления шара  $\mathbb{B}(\mathbf{0}; \varphi(\Delta))$  (при диаметре  $\Delta = \Delta(\Gamma)$  радиус  $\varphi(\Delta)$  шара мал).

Заметим, что включение шара  $\mathbb{B}(\mathbf{0}; \varphi(\Delta))$  малого радиуса  $\varphi(\Delta)$  (при малых  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ ) служит целям реализации разрешающих приближенных конструкций, аппроксимирующих максимальный  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$ .

Из условия **A**, наложенного на систему (1.1), следует

$$\begin{aligned} d(H_v(\tau_*, z_*), H_v(\tau^*, z^*)) &\leq w^*(|\tau_* - \tau^*| + \|z_* - z^*\|), \\ (\tau_*, z_*), (\tau^*, z^*) &\in \mathbb{D}, \quad v \in Q; \end{aligned} \quad (1.12)$$

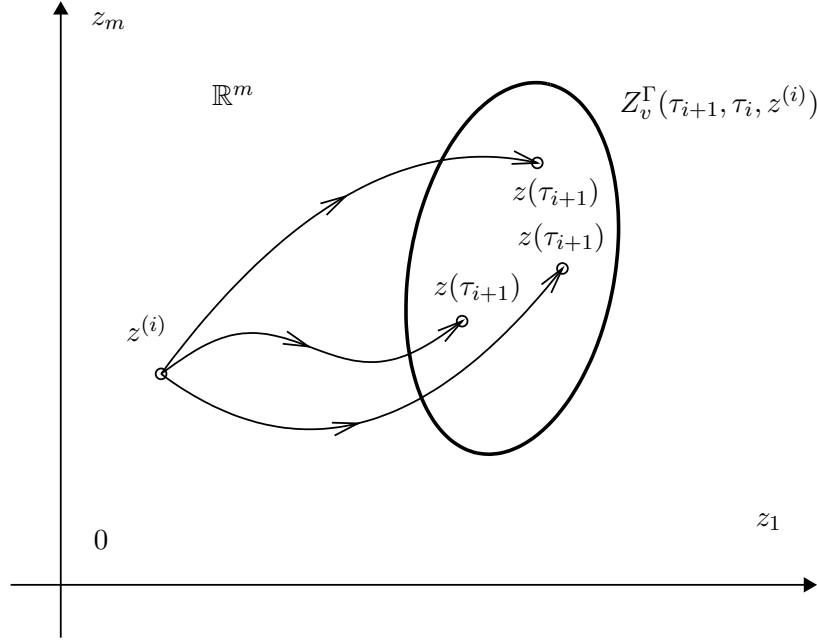


Рис. 7

здесь  $d(F_*, F^*)$  — хаусдорфово расстояние между  $F_*$  и  $F^*$  в  $\mathbb{R}^m$ .

Множество достижимости  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  д. в. (1.11) в момент  $\tau_{i+1}$  имеет вид (см. рис. 7)

$$Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta H_v(\tau_i, z^{(i)}) + \mathbb{B}(0; \omega(\Delta));$$

здесь  $\omega(\rho) = \rho \cdot \varphi(\rho)$ ,  $\rho > 0$ , так что  $\rho^{-1}\omega(\rho) = \varphi(\rho) \downarrow 0$  при  $\rho \downarrow 0$ .

Учитывая (1.12), получаем для произвольных  $(\tau_i, z^{(i)}) \in \mathbb{D}$  и  $v \in Q$

$$d(Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}), Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})) \leq w(\Delta), \quad (1.13)$$

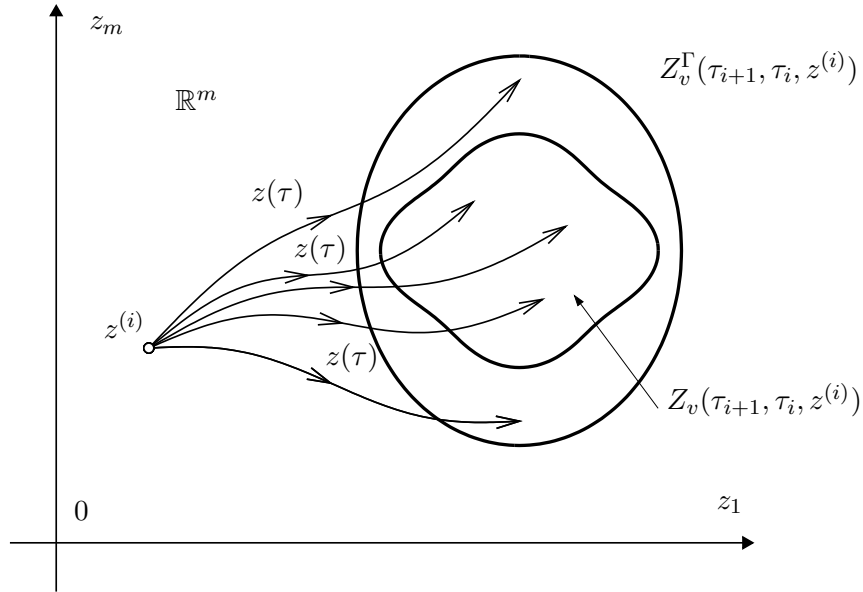
$$Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) \subset Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}). \quad (1.14)$$

Соотношения (1.13), (1.14) означают, что выпуклые компакты  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  являются «хорошими» аппроксимациями невыпуклых (вообще говоря) множеств достижимости  $Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  д. в. (1.6). А именно, множества  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  близки к множествам  $Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  относительно всех параметров, а также множества  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  мажорируют множества  $Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  (см. рис. 8). Кроме того, в конкретных задачах (1.1) множества  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  удобны для приближенных вычислений, и во многих конкретных задачах, например, в задачах, где  $H_v(\tau, z)$  есть шар или эллипсоид, или параллелепипед в  $\mathbb{R}^m$ , множества  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$  допускают аналитическое описание.

Введем в рассмотрение множества достижимости д. в. (1.11) в момент  $\tau_{i+1}$  со стартовым множеством  $Z^{(i)} \subset \mathbb{R}^m$ , отвечающим начальному моменту  $\tau_i$  промежутка  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) &= \bigcup_{z^{(i)} \in Z^{(i)}} Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}), \\ Z^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) &= \bigcap_{v \in Q} Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Множество  $Z^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$  мы называем, по аналогии с  $Z(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$ , множеством совместной достижимости (по всем  $v \in Q$ ) д. в. (1.11). Согласно определению, это множество, так же как и множества  $Z_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$ , имеет аппроксимационную природу, соответствующую идеологии Эйлера из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.



**Рис. 8**

Введем аппроксимирующую систему множеств (А-систему) в  $\mathbb{R}^m$ , состоящую из конечного числа множеств. То, что А-система конечна, принципиально важно для возможности реализовать приближенные вычисления в конкретных задачах 1.1.

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Аппроксимирующей системой (А-системой)  $\{Z^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$  назовем конечный набор множеств в  $\mathbb{R}^m$

$$Z^\Gamma(\tau_0) = M, \quad Z^\Gamma(\tau_i) = Z^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.16)$$

Введем множество  $\widehat{Z} = \text{Lim}\{Z^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$ , которое понимаем как  $\lim_{\Delta(\Gamma) \downarrow 0} \bigcup_{\tau_i \in \Gamma} (\tau_i, Z^\Gamma(\tau_i))$  — предел множеств  $\bigcup_{\tau_i \in \Gamma} (\tau_i, Z^\Gamma(\tau_i))$  при  $\Delta(\Gamma) \downarrow 0$  в смысле сходимости в хаусдорфовой метрике.

Оказывается, что А-система  $\{Z^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$  сходится к множеству  $\widehat{Z}$  сверху при  $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$ :  $\widehat{Z}(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i), \tau_i \in \Gamma$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.1.** Множества  $Z^0$  и  $\widehat{Z}$  совпадают.

Теорема 1.1 содержит в себе теоретическое обоснование возможности применять А-системы  $\{Z^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$  для приближенного вычисления максимального  $u$ -стабильного тракта  $Z^0$  в конкретных задачах 1.1.

Это утверждение аналогично лемме 2 из работы [34, с. 67], в которой определения  $u$ -стабильных трактов в задаче о сближении приведены в несколько иной форме, а именно, в унификационной форме, ориентированной на конфликтно управляемые системы, не предполагающие, вообще говоря, разбиение на слагаемые, зависящие только от  $u$  и только от  $v$ . В связи с таким достаточно общим видом конфликтно управляемой системы аналогом управлений  $v \in Q$  в определении  $u$ -стабильных множеств в работах [4, 5] служат векторы  $l$  из единичной сферы  $S = \{s \in \mathbb{R}^m: \|s\| = 1\}$ .

Здесь же, в этой работе, в которой в отличие от [34] рассматриваются конкретные задачи 1.1, мы приводим схемы описания  $u$ -стабильности, максимально удобные для вычисления разрешающих процедур управления первого игрока.

Теперь опишем схему конструирования позиционных процедур управления первого игрока в задаче 1.1, решающих эту задачу приближенно. Эта схема включает в себя аппроксимацию промежутка  $[t_0, \vartheta]$  некоторым конечным разбиением  $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$ , где  $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = N^{-1}(\vartheta - t_0)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$  — диаметр разбиения  $\Gamma$ .

Основу для конструирования разрешающих процедур управления первого игрока составляет А-система  $\{Z^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$ , которая аппроксимирует максимальный  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$  в задаче 1.1. Эта система определяется рекуррентными соотношениями (1.16).

Справедливо представление  $Z^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1})) = \bigcap_{v \in Q} Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ , где множества достижимости  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , несчетны и, как правило, имеют сложную геометрическую структуру, что делает невозможным их точное вычисление (то есть аналитическое описание). В связи с этим каждое множество  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , приходится вычислять приближенно как некоторое множество в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , состоящее из конечного числа точек, то есть как конечное множество в  $\mathbb{R}^m$ . При таком подходе к приближенному вычислению множеств  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , эффективным является пиксельный метод представления множеств в  $\mathbb{R}^m$ .

Так как в выражение для  $Z^\Gamma(\tau_i)$  входит ограничение  $Q$  на управления  $v$  второго игрока, а в выражения для множеств  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , входит ограничение  $P$  на управление  $u$  первого игрока, то мы аппроксимируем также и эти множества некоторыми конечными множествами  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  в пространствах  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$  соответственно. При этом операции пересечения множеств  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , ставится в соответствие некоторая операция над конечными множествами  $\mathcal{Z}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \mathcal{Z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $\tilde{v} \in \tilde{Q}$ , аппроксимирующими множества  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , которая представляет собой некоторый аналог операции пересечения множеств в  $\mathbb{R}^m$ . Эта операция определяется вполне естественным образом в случае, когда множества  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , аппроксимируются множествами  $\mathcal{Z}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \mathcal{Z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $\tilde{v} \in \tilde{Q}$ , имеющими пиксельное представление. В результате таких аппроксимаций мы получаем подмену множеств  $Z^\Gamma(\tau_i) = \bigcap_{v \in Q} Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$  конечными множествами  $\mathcal{Z}^\Gamma(\tau_i) = \bigcap_{\tilde{v} \in \tilde{Q}} \mathcal{Z}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \mathcal{Z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$  в  $\mathbb{R}^m$ , где  $i = \overline{1, N-1}$ . При

этом в качестве начального множества  $\mathcal{Z}^\Gamma(\tau_0)$  в рекуррентном наборе  $\{\mathcal{Z}^\Gamma(\tau_i): \tau_i \in \Gamma\}$  выбирается некоторое конечное множество  $\tilde{M}$  в  $\mathbb{R}^m$ , достаточно близкое к  $M$  в хаусдорфовой метрике.

После того, как осуществлено рекуррентное вычисление множеств  $\mathcal{Z}^\Gamma(\tau_i)$ ,  $i = \overline{0, N}$ , в  $\mathbb{R}^m$ , определяем в  $\mathbb{R}^m$  набор конечных множеств  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$ , отвечающий разбиению  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$  согласно равенствам  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j) = \mathcal{Z}^\Gamma(\tau_i)$ ,  $t_j = t_0 + \vartheta - \tau_i$ ,  $i = \overline{N, N-1, \dots, 0}$ .

При разбиениях  $\Gamma$  с достаточно малым диаметром  $\Delta = \Delta(\Gamma)$  и при достаточно точных аппроксимациях ограничений  $P$ ,  $Q$  множествами  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  и множеств  $Z_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $v \in Q$ , конечными множествами  $\mathcal{Z}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \mathcal{Z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $\tilde{v} \in \tilde{Q}$ , мы получаем конечный набор  $\{\mathcal{W}^\Gamma(t_j): t_j \in \Gamma\}$  конечных множеств в  $\mathbb{R}^m$ , достаточно близкий к набору  $\{W^0(t_j): t_j \in \Gamma\}$  временных сечений  $W^0(t_j)$  множества разрешимости  $W^0$  в задаче 1.1.

Располагая аппроксимирующим набором  $\{\mathcal{W}^\Gamma(t_j): t_j \in \Gamma\}$ , первый игрок приступает к завершающему этапу конструирования приближенного решения задачи 1.1 — реализации позиционной стратегии экстремального прицеливания (см. [3]) на набор  $\{\mathcal{W}^\Gamma(t_j): t_j \in \Gamma\}$ .

При этом предполагается, что второй игрок выбирает на каждом полуинтервале  $[t_j, t_{j+1})$  разбиения  $\Gamma$  некоторое постоянное управление  $v(t) = v \in \tilde{Q}$ , которое на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  может по ходу времени формироваться по принципу обратной связи:

$$v(t) = v^{(j)} = v(t_j, x(t_j)) \in \tilde{Q}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1};$$

здесь  $x(t_j)$  — фазовый вектор системы (1.1), реализовавшийся в момент  $t_j \in \Gamma$  в процессе эволюции системы (1.1),  $v(t, x)$  — некоторая функция со значениями в  $\tilde{Q}$ , зависящая от позиции  $(t, x)$  системы (1.1).

Рассмотрим начальный момент  $t_0$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ .

Пусть  $(t_0, x^{(0)})$  — начальная позиция системы (1.1). В момент  $t_0$  первый игрок выбирает произвольно вектор  $u(t_0)$  в  $\tilde{P}$  как управление на начальном промежутке  $[t_0, t_1)$  разбиения  $\Gamma$ :  $u^*(t) = u(t_0), t \in [t_0, t_1)$ .

При этом в системе (1.1) присутствует в качестве управления  $v(t)$  на  $[t_0, t_1)$  некоторый вектор  $v^{(0)} \in \tilde{Q}$ :  $v(t) = v^{(0)}, t \in [t_0, t_1)$ .

Движение системы (1.1) на полуинтервале  $[t_0, t_1)$  формируем как звено

$$\tilde{x}(t) = x^{(0)} + (t - t_0)f(t_0, x^{(0)}, u(t_0), v^{(0)}), \quad t \in [t_0, t_1),$$

ломаной Эйлера дифференциального уравнения (1.1).

В итоге в момент  $t_1 \in \Gamma$  реализовался фазовый вектор  $\tilde{x}(t_1)$ . Имея в распоряжении вектор  $\tilde{x}(t_1)$ , вычисляем ближайшую к  $\tilde{x}(t_1)$  на  $\mathscr{W}^\Gamma(t_1)$  точку  $\tilde{y}(t_1)$  и вектор  $s(t_1) = \tilde{y}(t_1) - \tilde{x}(t_1)$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

Затем первый игрок вычисляет управление  $u^*(t) = u^e(t_1)$  на полуинтервале  $[t_1, t_2)$ . При этом в случае, если  $\tilde{x}(t_1) \in \mathscr{W}^\Gamma(t_1)$  и, значит,  $s(t_1) = \mathbf{0}$ , выбираем в качестве  $u^e(t_1)$  любой вектор из  $\tilde{P}$ . В случае, если  $\tilde{x}(t_1) \notin \mathscr{W}^\Gamma(t_1)$  и, значит,  $s(t_1) \neq \mathbf{0}$ , выбираем  $u^e(t_1)$  из условия экстремального прицеливания движения системы (1.1) на множество  $\mathscr{W}^\Gamma(t_1)$ :

$$\left\langle s(t_1), f^{(1)}(t_1, \tilde{x}(t_1), u^e(t_1)) \right\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_1), f^{(1)}(t_1, \tilde{x}(t_1), u) \rangle.$$

Движение системы (1.1) на промежутке  $[t_1, t_2]$  формируем как звено

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_1) + (t - t_1)f(t_1, \tilde{x}(t_1), u^e(t_1), v^{(1)}), \quad t \in [t_1, t_2],$$

ломаной Эйлера дифференциального уравнения (1.1); здесь  $v(t) = v^{(1)}$  — некоторое управление второго игрока на промежутке  $[t_1, t_2]$ .

Далее продолжаем вычисление разрешающих управлений  $u^*(t) = u^e(t_j)$  на последующих полуинтервалах  $[t_j, t_{j+1})$ ,  $j = \overline{2, N-1}$ , разбиения  $\Gamma$  согласно правилу экстремального прицеливания (см. [3])

$$\left\langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j)) \right\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u) \rangle,$$

где  $s(t_j) = \tilde{y}(t_j) - \tilde{x}(t_j)$  и  $\tilde{y}(t_j)$  — ближайшая к  $\tilde{x}(t_j)$  точка в множестве  $\mathscr{W}^\Gamma(t_j)$ .

Движение системы (1.1) на промежутках  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{2, N-1}$ , формируем как звено ломаной Эйлера

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_j) + (t - t_j)f(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}), \quad t \in [t_j, t_{j+1}];$$

здесь  $v(t) = v^{(j)} \in \tilde{Q}$  — некоторое управление второго игрока на  $[t_j, t_{j+1})$ .

В ходе таких вычислений реализуется ломаная Эйлера  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , относительно которой можем утверждать следующее.

Задав некоторое  $\varepsilon > 0$ , можно в принципе за счет выбора малого  $\Delta(\Gamma)$ , достаточно близких к  $P, Q, M$  конечных множеств  $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{M}$  и достаточно хорошей дискретной аппроксимации пространства  $\mathbb{R}^m$  сконструировать набор  $\{\tilde{\mathscr{W}}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$  конечных множеств  $\tilde{\mathscr{W}}^\Gamma(t_j)$  в  $\mathbb{R}^m$ , настолько близкий к  $\{\tilde{W}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$ , что ломаные Эйлера  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , с достаточно близкими к  $\tilde{\mathscr{W}}^\Gamma(t_0)$  точками  $\tilde{x}(t_0) = x^{(0)}$  будут удовлетворять неравенству

$$\rho(\tilde{x}(\vartheta), \tilde{W}^\Gamma(\vartheta)) = \rho(\tilde{x}(\vartheta), M) \leq \varepsilon; \quad (1.17)$$

здесь  $\rho(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$ , где точка  $x$  и компакт  $Y$  содержатся в  $\mathbb{R}^m$ .

Заметим однако, что установить формулы (в виде оценок сверху), выражающие связь между  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ , аппроксимациями  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$ , дискретной аппроксимацией фазового пространства  $\mathbb{R}^m$  и числом  $\varepsilon$ , в рассматриваемой задаче 1.1 не удастся из-за сложности разрешающих конструкций задачи, которые обусловлены, в частности, нелинейностью системы (1.1) и наличием в конструкциях плохой для вывода каких-либо оценок операции пересечения множеств в  $\mathbb{R}^m$ .

Допустим теперь, что по заданному  $\varepsilon > 0$  (правая часть оценки (1.17)) выбраны такие  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$ , начальная точка  $\tilde{x}(t_0) = x^{(0)}$  и дискретизация пространства  $\mathbb{R}^m$ , что для указанных выше ломаных Эйлера  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x^{(0)}$ , выполняется (1.17).

Возникает вопрос о том, насколько велико отклонение  $\rho(x(\vartheta), M)$  от  $M$  конечной точки  $x(\vartheta)$  реального движения  $x(t)$ ,  $x(t_0) = x^{(0)}$ , системы (1.1), которое на промежутках  $[t_j, t_{j+1}]$  разбиения  $\Gamma$  описывается соотношением

$$x(t) = x(t_j) + \int_{t_j}^t f(\eta, x(\eta), u^e(t_j), v^{(j)}) d\eta, \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

где  $x(t_j)$  — конечная точка движения  $x(t)$  на предыдущем промежутке  $[t_{j-1}, t_j]$ , вектор  $v^{(j)} \in Q$  и вектор  $u^e(t_j) \in P$  вычислен по правилу экстремального прицеливания движения  $\tilde{x}(t)$  на  $\tilde{\mathcal{W}}^\Gamma(t_j)$

$$\left\langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j)) \right\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u) \rangle,$$

где  $s(t_j) = y(t_j) - \tilde{x}(t_j)$ ,  $y(t_j)$  — ближайшая к  $\tilde{x}(t_j)$  точка в  $\tilde{\mathcal{W}}^\Gamma(t_j)$ .

Для ответа на этот вопрос рассмотрим некоторую ломаную  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x^{(0)}$ , на  $[t_0, \vartheta]$ , порожденную управлениями  $v^{(j)} \in Q$  и  $u^e(t_j) = u^e(t_j, \tilde{x}(t_j))$  игроков на полуинтервалах  $[t_j, t_{j+1}]$ , а также движение  $x(t)$ ,  $x(t_0) = x^{(0)}$ , системы (1.1), порожденное на промежутках  $[t_j, t_{j+1}]$  теми же самыми управлениями игроков.

Допустим, что в некоторый момент  $t_j \in \Gamma$ ,  $j \in \overline{0, N-1}$ , реализовались конечные точки  $\tilde{x}(t_j)$  и  $x(t_j)$  движений  $\tilde{x}(t)$  и  $x(t)$  на  $[t_{j-1}, t_j]$

$$\tilde{x}(t_{j+1}) = \tilde{x}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}) dt,$$

$$x(t_{j+1}) = x(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x(t), u^e(t_j), v^{(j)}) dt,$$

из которых следует

$$\begin{aligned} & \|\tilde{x}(t_{j+1}) - x(t_{j+1})\| \leq \|\tilde{x}(t_j) - x(t_j)\| + \\ & + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|f(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}) - f(t, x(t), u^e(t_j), v^{(j)})\| dt \leq \\ & \leq \|\tilde{x}(t_j) - x(t_j)\| + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\|f(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}) - f(t_j, x(t_j), u^e(t_j), v^{(j)})\| + \\ & + \|f(t_j, x(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}) - f(t, x(t), u^e(t_j), v^{(j)})\|) dt \leq \\ & \leq \|\tilde{x}(t_j) - x(t_j)\| + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (L\|\tilde{x}(t_j) - x(t_j)\| + \omega^*((1+K)(t-t_j))) dt \leq \\ & \leq (1+L\Delta_j)\|\tilde{x}(t_j) - x(t_j)\| + \omega(\Delta_j), \end{aligned}$$

где напомним, что  $\omega(\Delta_j) = \Delta_j \omega^*((1+K)\Delta_j)$ , согласно определению функции  $\omega(\rho)$ ,  $\rho > 0$ .  
 Положив  $h(t_j) = \tilde{x}(t_j) - x(t_j)$ ,  $t_j \in \Gamma$ ,  $j \in \overline{0, N}$ , имеем при  $j \in \overline{0, N-1}$

$$\|h(t_{j+1})\| \leq e^{L\Delta_j} \|h(t_j)\| + \omega(\Delta_j). \quad (1.18)$$

Из рекуррентной оценки (1.18) путем последовательных подстановок оценок для величин  $\|h(t_{j+1})\|$  получаем

$$\|h(t_1)\| \leq e^{L\Delta_0} \|h(t_0)\| + \omega(\Delta_0) = \omega(\Delta_0),$$

поскольку  $h(t_0) = \tilde{x}(t_0) - x(t_0) = x^{(0)} - x^{(0)} = \mathbf{0}$ ,

$$\|h(t_2)\| \leq e^{L\Delta_1} \|h(t_1)\| + \omega(\Delta_1) \leq e^{L\Delta_1} \omega(\Delta_0) + \omega(\Delta_1),$$

$$\begin{aligned} \|h(t_3)\| &\leq e^{L\Delta_2} \|h(t_2)\| + \omega(\Delta_2) \leq e^{L\Delta_2} (e^{L\Delta_1} \omega(\Delta_0) + \omega(\Delta_1)) + \omega(\Delta_2) = \\ &= e^{L(\Delta_2+\Delta_1)} \omega(\Delta_0) + e^{L\Delta_2} \omega(\Delta_1) + \omega(\Delta_2). \end{aligned}$$

Анализ первых трех оценок сверху (для величин  $\|h(t_{j+1})\|$ ,  $j = 0, 1, 2$ ) показывает, что общая оценка сверху величины  $\|h(t_{j+1})\|$  выглядит следующим образом

$$\|h(t_{j+1})\| \leq e^{L(\Delta_j+\Delta_{j-1}+\dots+\Delta_1)} \omega(\Delta_0) + e^{L(\Delta_j+\Delta_{j-1}+\dots+\Delta_2)} \omega(\Delta_1) + \dots + \omega(\Delta_j).$$

Из этой оценки следует

$$\|h(t_{j+1})\| \leq e^{L(t_{j+1}-t_0)} \cdot \sum_{k=0}^j \Delta_k \cdot \omega^*((1+K)\Delta(\Gamma)),$$

то есть

$$\|h(t_{j+1})\| \leq e^{L(t_{j+1}-t_0)} (t_{j+1} - t_0) \omega^*((1+K)\Delta(\Gamma)), \quad j = \overline{0, N-1},$$

и, в частности, получаем

$$\|h(\vartheta)\| \leq e^{L(\vartheta-t_0)} (\vartheta - t_0) \omega^*((1+K)\Delta(\Gamma)). \quad (1.19)$$

Очевидно, что выбор диаметра  $\Delta = \Delta(\Gamma)$  разбиения  $\Gamma$  можно скорректировать так, что наряду с (1.17) будет справедлива оценка

$$e^{L(\vartheta-t_0)} (\vartheta - t_0) \omega^*((1+K)\Delta(\Gamma)) \leq \varepsilon, \quad (1.20)$$

и тогда

$$\|x(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta)\| = \|h(\vartheta)\| \leq \varepsilon. \quad (1.21)$$

Из оценок (1.17), (1.21) следует

$$\rho(x(\vartheta), M) \leq 2\varepsilon \quad (1.22)$$

при выбранных  $\Delta(\Gamma)$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x(t_0) = x^{(0)}$  и дискретизации пространства  $\mathbb{R}^m$ .

Вместе с тем мы показали, что для формирования движения  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , системы (1.1) является достаточно эффективным использование позиционной экстремальной стратегии  $u^e(t, x)$  первого игрока, значения  $u^e(t_j) = u^e(t_j, \tilde{x}(t_j))$  которой реализуются в моменты  $t_j \in \Gamma$  в процессе формирования ломаной Эйлера  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ . А именно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно добиться соответствующим выбором диаметра  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ , множеств  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$ , начальной точки  $x(t_0) = x^{(0)}$  и дискретной аппроксимации пространства  $\mathbb{R}^m$  выполнения оценки (1.22) для упомянутых движений  $x(t)$ ,  $x(t_0) = x^{(0)}$  системы (1.1).



## § 2. Примеры конкретных управляемых систем на конечном промежутке времени

Двойной маятник: задача о сближении с целью в фиксированный момент времени.

**Пример 1.** К вертикальной стене прикреплена перпендикулярно пружина с маятниками на концах пружины одинаковой длины и одинаковой массы. Считаем, что в идеале диаметр пружины очень мал (равен нулю), что отражено на рис. 9. Маятниками можно управлять при помощи сил, указанных на рис. 9, и управления находятся в распоряжении первого игрока. Первому игроку неизвестен коэффициент жесткости пружины, а известны лишь пределы, в которых он может меняться со временем. Задача первого игрока, состоит в том, чтобы в некоторый фиксированный момент времени обеспечить достаточную близость положений маятников.

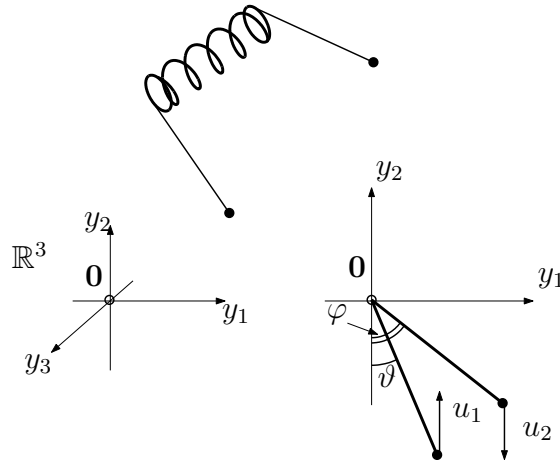


Рис. 9. Механическая управляемая система «Двойной маятник»

Математическая формализация данной задачи состоит в следующем. На промежутке времени  $[0; 4]$  задана конфликтно-управляемая система, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + v * (x_3 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sin(x_3) + v * (x_1 - x_3) + u_2, \end{cases}$$

где  $x_1 = \vartheta$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\vartheta}$ ,  $x_3 = \varphi$ ,  $x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\varphi}$ ;  $u = (u_1, u_2)$  — вектор управления первого игрока, где  $u_1 \in [-1; 1]$ ,  $u_2 \in [-1; 1]$ . Коэффициент жесткости пружины  $v$  неизвестен первому игроку и удовлетворяет включению  $v \in [0; 0.2]$ .

Полагаем  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  — фазовый вектор управляемой системы.

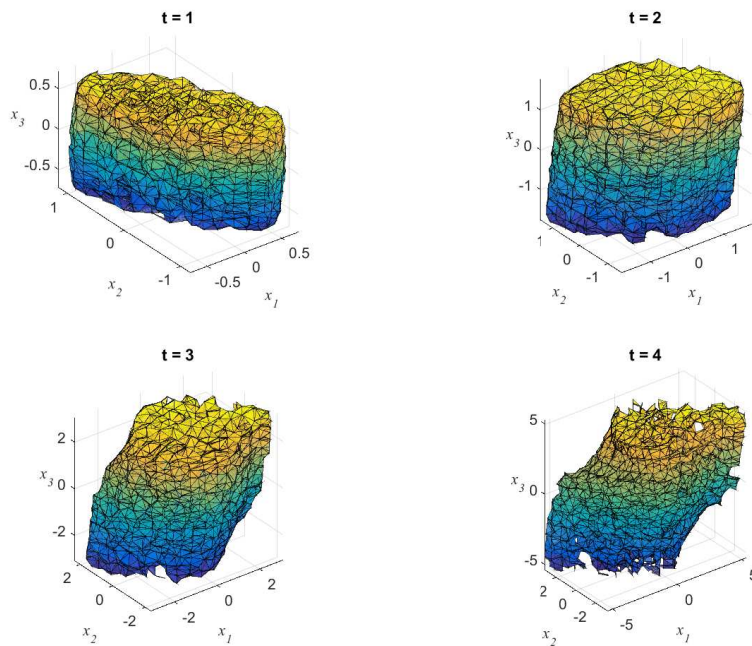
Задано целевое множество  $M$  — шар в пространстве  $R^4$  радиуса  $r = 0.3$ , с центром в  $0 \in R^4$ , отвечающий конечному моменту  $\vartheta = 4$  из промежутка  $[0; 4]$ .

Задача управления первого игрока состоит в том, чтобы из заданной начальной точки  $x_0 = (-5.39; 3.16; -4.39; 2.11)$  выбором управления  $u = u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$  обеспечить приведение фазового вектора  $x(\vartheta)$  системы на множество  $M$  при любых допустимых управлениях  $v(t, x)$  ( $v(t, x) \in [0; 0.2]$ ) второго игрока.

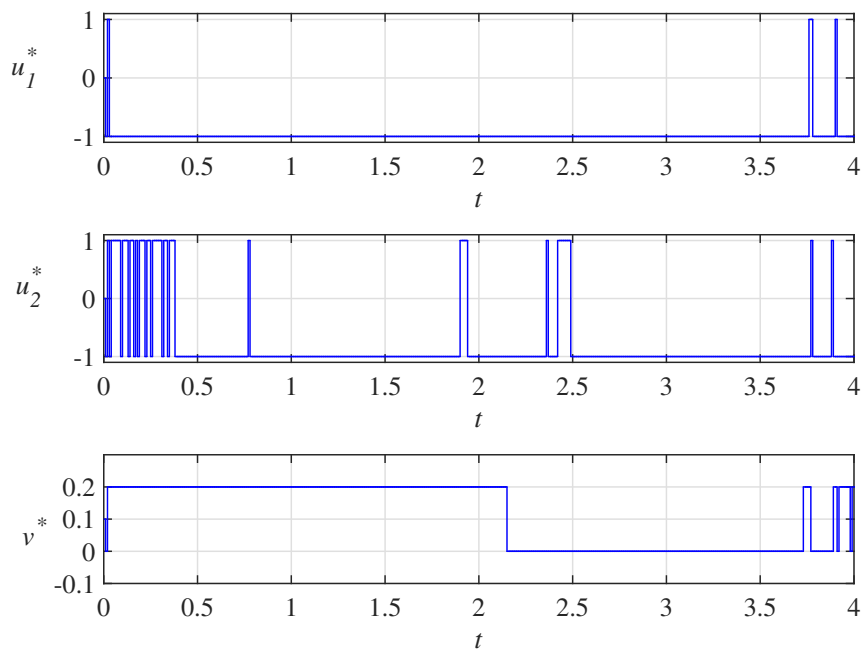
Задача решалась приближенно. Для приближенного решения было введено дискретное разбиение  $\Gamma$  промежутка  $[0; 4]$  с равномерным шагом  $\Delta t = 0.01$ .

Вычислены приближенно сечения  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  в  $R^4$  множества разрешимости, отвечающие моментам  $t_j \in \Gamma$ . На рис. 10 приведены проекции нескольких сечений  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  на подпространство переменных  $x_1, x_2, x_3$ . На рис. 11 приведены графики реализаций во времени

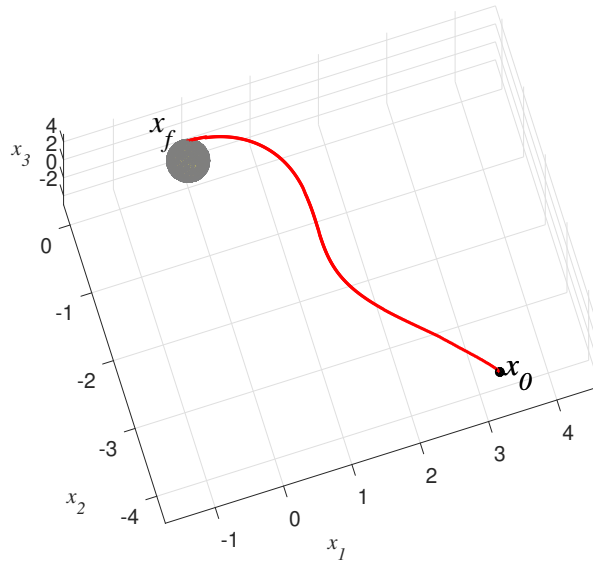
разрешающих управлений первого игрока и график программного управления второго игрока. На рис. 12 изображена траектория конфликтно-управляемой системы, порожденная указанными выше управлениями игроков.



**Рис. 10.** Пример 1. Проекция  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  на пространство переменных  $x_1, x_2, x_3$  для различных моментов времени  $t_j \in \Gamma$



**Рис. 11.** Пример 1. Графики реализаций управлений  $u_1^*(t), u_2^*(t), v^*(t)$



**Рис. 12.** Пример 1. Проекция траектории  $x^*(t)$  движения системы на пространство переменных  $x_1, x_2, x_3$

В примере 2, который приведен ниже, рассматривается тот же двойной маятник, что и в примере 1, при несколько других предположениях относительно коэффициента жесткости пружины и сил, воздействующих на маятники.

**Пример 2.** Динамика системы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + k * (x_3 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sin(x_3) + k * (x_1 - x_3) + v, \end{cases}$$

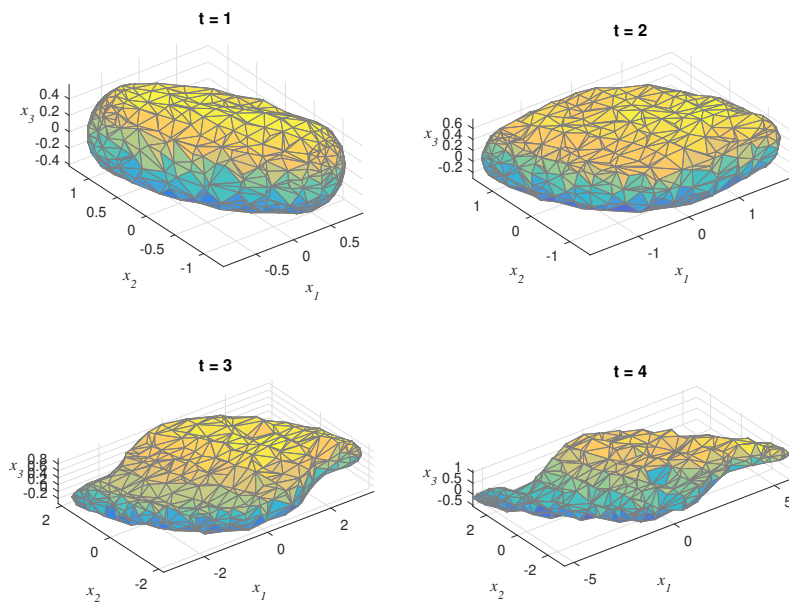
где  $k$  — коэффициент жесткости пружины, удовлетворяющий равенству  $k = 1$ ,  $x_1 = \vartheta$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\vartheta}$ ,  $x_3 = \varphi$ ,  $x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\varphi}$ ;  $u \in [-1; 1]$  — управление первого игрока,  $v \in [-1; 1]$  — управление второго игрока.

Промежуток времени, на котором рассматривается игровая задача о сближении, и целевое множество  $M$  те же, что и в примере 1.

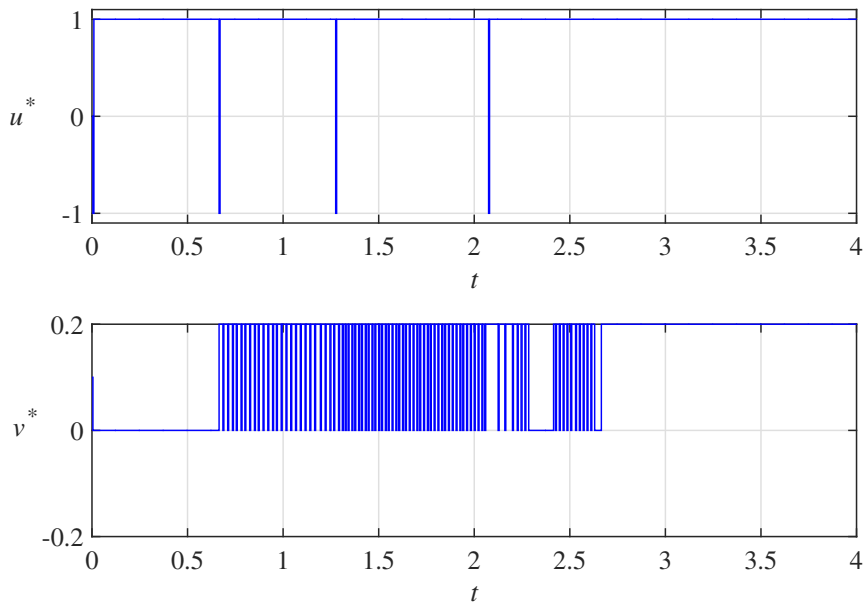
Задача управления первого игрока состоит в том, чтобы из заданной начальной точки  $x_0 = (-5.70; -3.05; 0.57; -0.08)$  выбором скалярного управления  $u = u(t, x)$ ,  $u(t, x) \in [-1; 1]$  обеспечить приведение фазового вектора  $x(\vartheta)$  системы на множество  $M$  при любых допустимых управлениях  $v = v(t, x)$  ( $v(t, x) \in [0; 0.2]$ ) второго игрока. При этом коэффициент жесткости пружины известен первому игроку. Эта задача решалась приближенно. Для приближенного решения было введено дискретное разбиение  $\Gamma$  промежутка  $[0; 4]$  с равномерным шагом  $\Delta t = 0.01$ .

Вычислены приближенно сечения  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  в  $R^4$  множества разрешимости, отвечающие моментам  $t_j \in \Gamma$ . На рис. 13 приведены проекции нескольких сечений  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  на подпространство переменных  $x_1, x_2, x_3$ . На рис. 14 приведены графики реализаций во времени разрешающих управлений первого игрока и график программного управления второго игрока. На рис. 15 изображена траектория конфликтно-управляемой системы, порожденная указанными выше управлениями игроков.

Рассмотрим механическую управляемую систему «качели» — плоский маятник с переменной длиной.



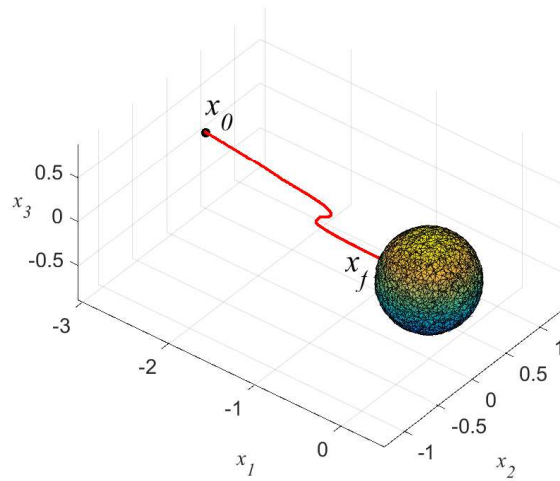
**Рис. 13.** Пример 2. Проекция  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  на пространство переменных  $x_1, x_2, x_3$  для различных моментов времени  $t_j \in \Gamma$



**Рис. 14.** Пример 2. Графики управлений  $u^*(t), v^*(t)$

**Пример 3.** В этом примере управление осуществляется за счет изменения во времени длины маятника.

Динамика системы описывается на промежутке времени  $[0; 2]$  дифференциальными уравнениями:



**Рис. 15.** Пример 2. Проекция траектории  $x(t)$  движения системы на пространство переменных  $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g \cdot \sin(x_1)}{x_3} - \frac{2 \cdot x_2}{x_3} \cdot u, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$

где  $x_1 = \vartheta$  — угол между маятником и вертикальной осью,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\vartheta}$ ,  $x_3 = z$  — длина маятника,  $u = \dot{z}$  — управление, влияющее на скорость изменения длины маятника,  $g$  — гравитационная постоянная.

Полагаем  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — фазовый вектор управляемой системы.

Наряду с системой заданы фазовые ограничения  $\Phi = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, -3 \leq x_2 \leq 3, 0.5 \leq x_3 \leq 0.75\}$  и целевое множество  $M = B \cap \Phi$ , где  $B$  — шар в  $\mathbb{R}^3$  радиуса  $r = 0.75$  с центром в точке  $z = (0, 0, 0)$ .

Задача управления состоит в том, чтобы из заданной начальной точки  $x_0 = (-1.09, -0.60, 0.66)$  привести маятник на  $M$  в момент времени  $\vartheta = 2$ .

Задача решалась приближенно. Для приближенного решения было введено дискретное разбиение  $\Gamma$  промежутка  $[0; 4]$  с равномерным шагом  $\Delta t = 0.01$ .

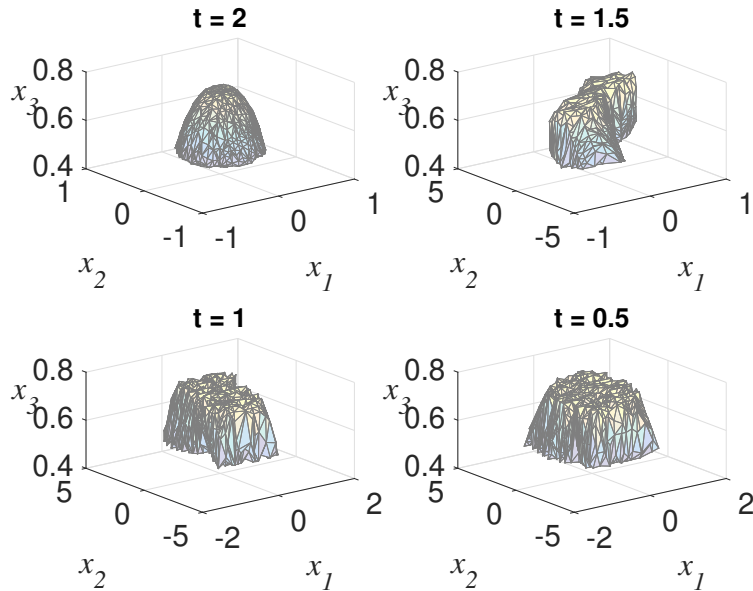
Вычислены приближенно сечения  $\mathscr{W}^\Gamma(t_j)$  в  $\mathbb{R}^3$  множества разрешимости, отвечающие моментам  $t_j \in \Gamma$ . На рис. 16 приведены сечения  $\mathscr{W}^\Gamma(t_j)$  в  $\mathbb{R}^3$ . На рис. 17 приведен график управления  $u(t)$ , решающего задачу о сближении с конечной точкой  $x_f$ . На рис. 18 изображены координаты движения  $x(t)$  на промежутке  $[0; 2]$ .

Начальная позиция для моделирования —  $x_0 = (-0.26; -0.36; 0.51)$ . Целевое множество  $M$  представляет собой шар в пространстве  $\mathbb{R}^3$  радиуса  $r = 0.3$  с центром в  $0 \in \mathbb{R}^3$ .

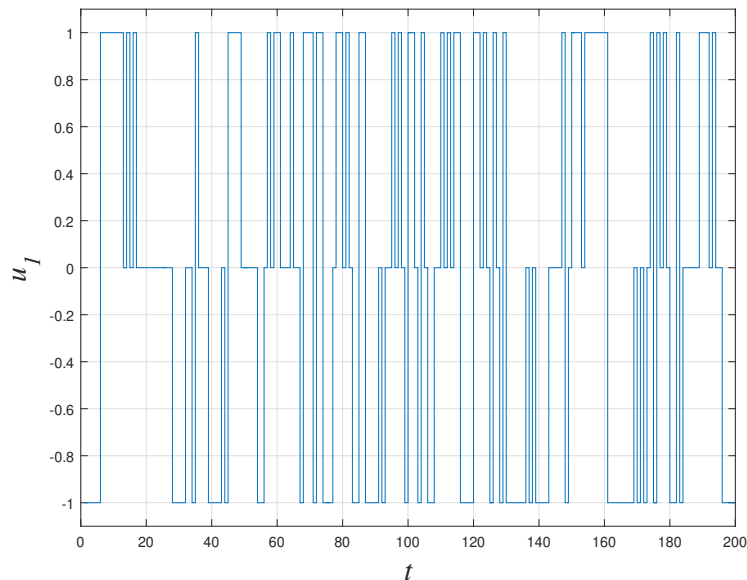
На рис. 19, 20, 21, 22, 23 представлены с помощью набора точек фрагменты траектории маятника на промежутках  $[0, 0.4]$ ,  $[0, 0.8]$ ,  $[0, 1.2]$ ,  $[0, 1.6]$ ,  $[0, 2]$  соответственно.

**Пример 4.** Динамика системы описывается на промежутке времени  $[0; 2]$  дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g \cdot \sin(x_1)}{x_3} - \frac{2 \cdot y}{x_3} \cdot u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = u_1, \end{cases}$$



**Рис. 16.** Пример 3. Множества  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  для различных моментов времени  $t_j \in \Gamma$



**Рис. 17.** Пример 3. График управления  $u(t)$

где  $x_1 = \vartheta$  — угол между маятником и вертикальной осью,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\vartheta}$ ,  $x_3 = z$  — длина маятника,  $u_1$  — управляющий параметр, воздействующий на скорость изменения длины маятника,  $u_2$  — сила, воздействующая на маятник,  $g$  — гравитационная постоянная.

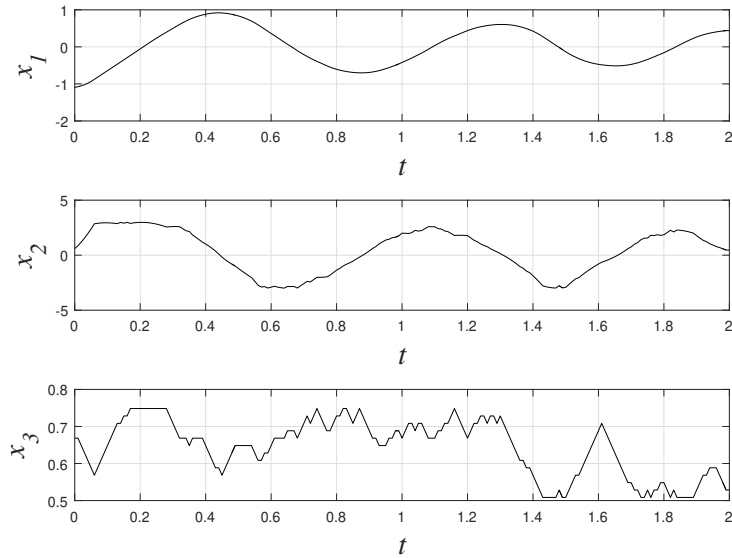
Полагаем,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — фазовый вектор управляемой системы.

Наряду с системой заданы фазовые ограничения  $\Phi = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, -3 \leq x_2 \leq 3, 0.5 \leq x_3 \leq 0.75\}$  и целевое множество  $M = B \cap \Phi$ , где  $B$  — шар в  $\mathbb{R}^3$  радиуса  $r = 0.75$  с центром в точке  $z = (0, 0, 0)$ .

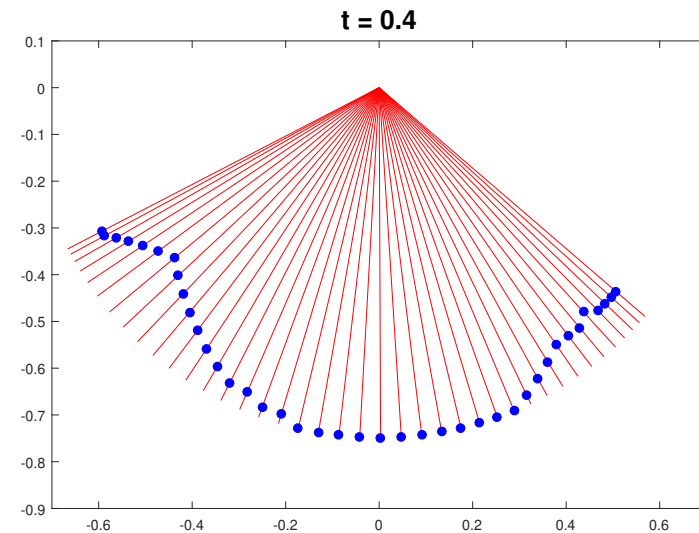
Задача управления состоит в том, чтобы из заданной начальной точки  $x_0 = (-0.10, -2.84, 0.58)$  привести маятник на  $M$  в момент времени  $\vartheta = 2$ .

Задача решалась приближенно. Для приближенного решения было введено дискретное разбиение  $\Gamma$  промежутка  $[0; 4]$  с равномерным шагом  $\Delta t = 0.01$ .

Вычислены приближенно сечения  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  в  $\mathbb{R}^3$  множества разрешимости, отвечающие моментам  $t_j \in \Gamma$ . На рис. 24 приведены сечения  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  в  $\mathbb{R}^3$ . На рис. 25 и рис. 26 приведены



**Рис. 18.** Пример 3. Координаты движения  $x(t)$  на промежутке  $[0; 2]$



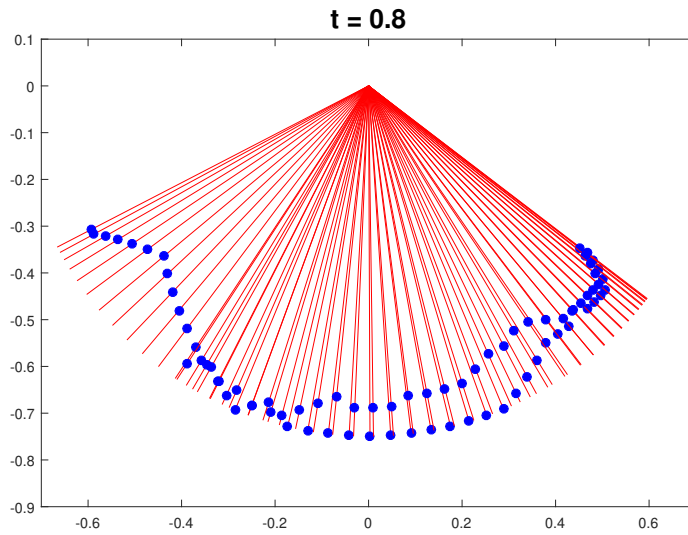
**Рис. 19.** Пример 3. Фрагмент траектории маятника на промежутке времени  $[0, 0.4]$

графики управлений  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , решающих задачу о сближении с конечной точкой  $x_f$ . На рис. 23 изображено координаты движения  $x(t)$  на промежутке  $[0; 2]$ .

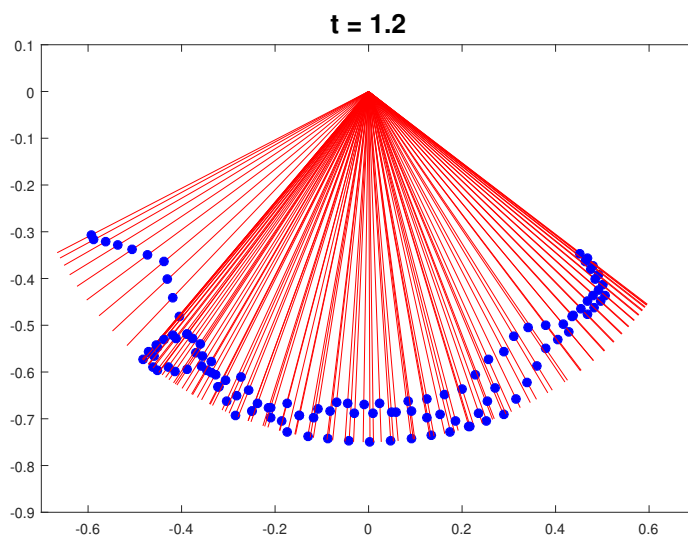
**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

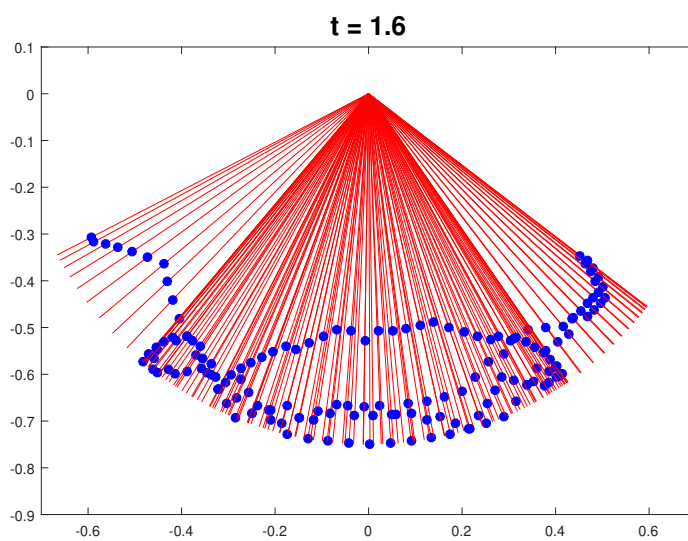
1. Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики. I // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12. <https://zbmath.org/0199.49003>
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 523–526. <https://www.mathnet.ru/rus/dan35165>
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263. <https://www.mathnet.ru/rus/dan39789>



**Рис. 20.** Пример 3. Фрагмент траектории маятника на промежутке времени  $[0, 0.8]$



**Рис. 21.** Пример 3. Фрагмент траектории маятника на промежутке времени  $[0, 1.2]$



**Рис. 22.** Пример 3. Фрагмент траектории маятника на промежутке времени  $[0, 1.6]$



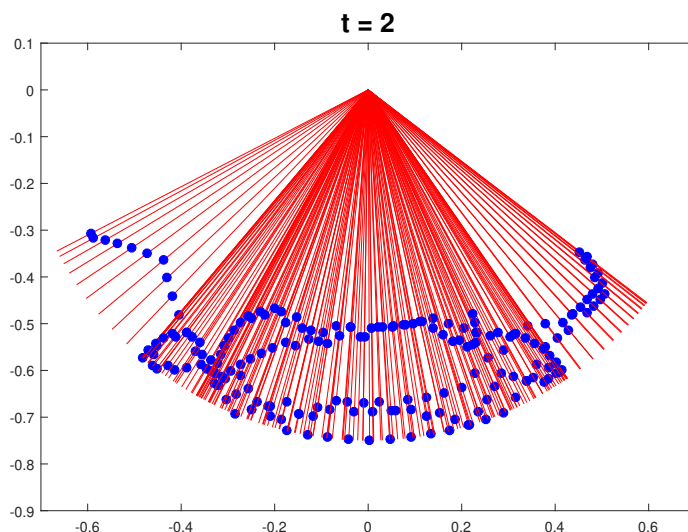


Рис. 23. Пример 3. Траектория маятника на промежутке времени  $[0, 2]$

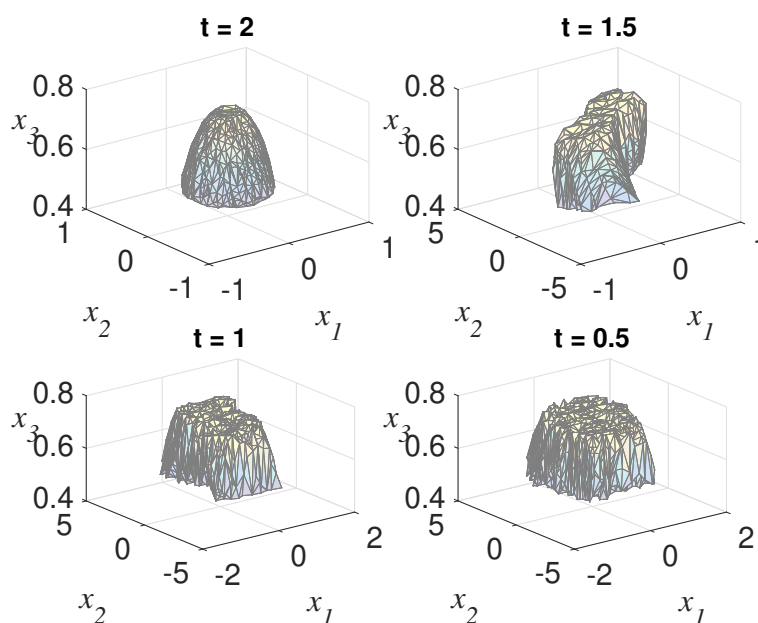
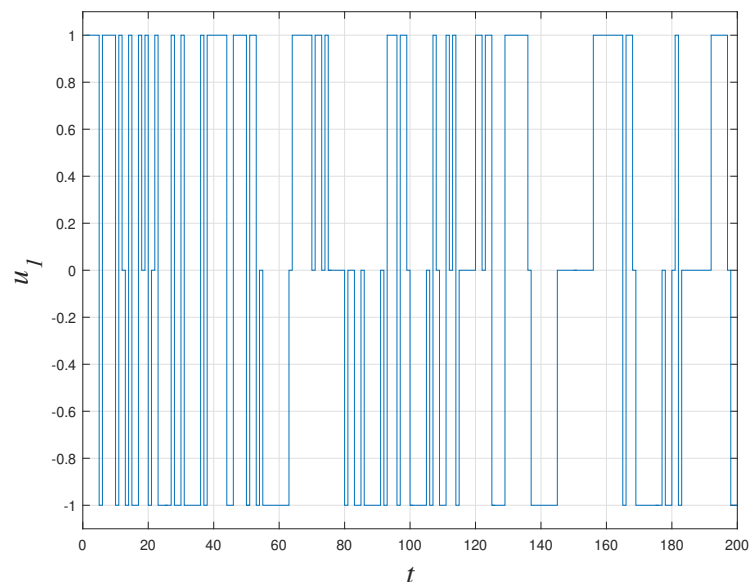
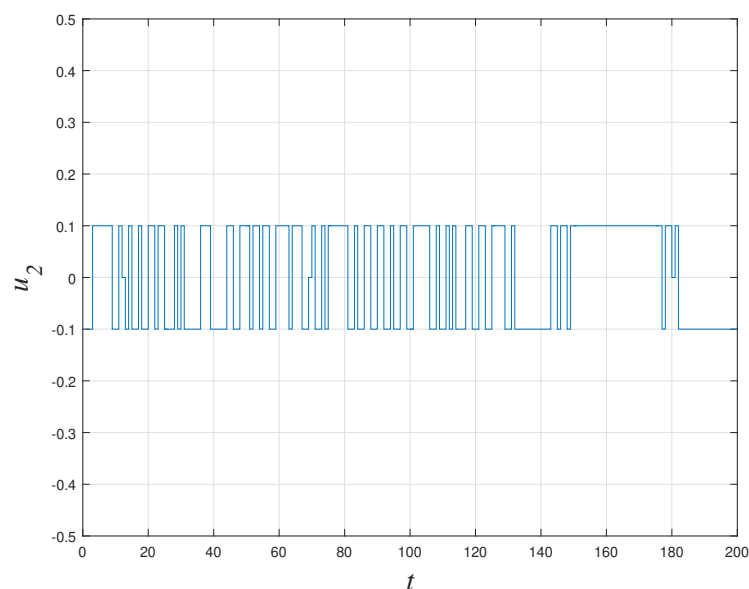


Рис. 24. Пример 4. Множества  $\mathcal{W}^\Gamma(t_j)$  для различных моментов времени  $t_j \in \Gamma$

5. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Труды Института математики и механики. 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45. <https://search.rsl.ru/ru/record/01007673325>
6. Понтрягин Л. О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280. <https://www.mathnet.ru/rus/dan33165>
7. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766. <https://www.mathnet.ru/rus/dan33242>
8. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник (новая серия). 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. <https://www.mathnet.ru/rus/sm2728>
9. Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Потрягина // Математический сборник (новая серия). 1981. Т. 116 (158). № 1 (9). С. 136–144. <https://www.mathnet.ru/rus/sm2447>
10. Никольский М. С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник (новая серия). 1985. Т. 128 (170). № 1 (9). С. 35–49. <https://www.mathnet.ru/rus/sm2016>

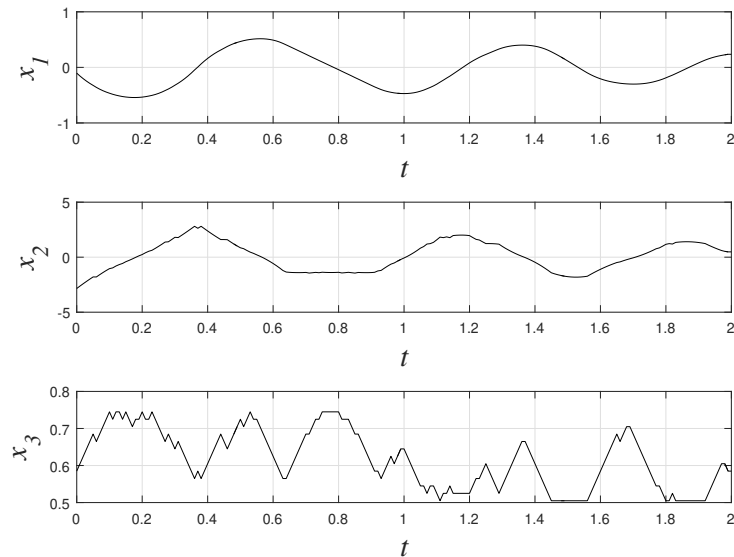


**Рис. 25.** Пример 4. График управления  $u_1(t)$



**Рис. 26.** Пример 4. График управления  $u_2(t)$

11. Азамов А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268. <https://www.mathnet.ru/rus/dan7722>
12. Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения. Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина. Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248. <https://www.mathnet.ru/rus/tm702>
13. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287. <https://www.mathnet.ru/rus/dan34373>
14. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. Дифференциальные игры с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
15. Половинкин Е. С. Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 433–446. <https://www.mathnet.ru/rus/de5120>



**Рис. 27.** Пример 4. Координаты движения  $x(t)$  на промежутке  $[0; 2]$

16. Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122. <https://doi.org/10.4213/sm604>
17. Субботин А. И., Субботина Н. Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 862–865. <https://www.mathnet.ru/rus/dan42174>
18. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
19. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
20. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
21. Кряжмский А. В., Осипов Ю. С. Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Сборник научных трудов. Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 131–140. <https://www.mathnet.ru/rus/timm497>
22. Guseĭnov Kh. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Проблемы управления и теории информации. 1985. Т. 14. № 3. С. 155–167. [http://real-j.mtak.hu/7996/1/MTA\\_ProblemsOfControl\\_14.pdf](http://real-j.mtak.hu/7996/1/MTA_ProblemsOfControl_14.pdf)
23. Камнева Л. В., Пацко В. С. Построение множества разрешимости в дифференциальных играх с простыми движениями и невыпуклым терминальным множеством // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 143–157. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-143-157>
24. Кумков С. С., Ле Менек С., Пацко В. С. Множества разрешимости в задачах преследования с двумя догоняющими и одним убегающим // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 148–165. <https://www.mathnet.ru/rus/timm1091>
25. Lukoyanov N., Gomoyunov M. Differential games on minimax of the positional quality index // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. Issue 3. P. 780–799. <https://doi.org/10.1007/s13235-018-0281-7>
26. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме вычисления игровых задач управления // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 2. С. 216–222.
27. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 4. С. 51–78. <https://doi.org/10.4213/sm1284>

28. Ершов А. А., Ушаков А. В., Ушаков В. Н. О двух игровых задачах о сближении // Математический сборник. 2021. Т. 212. № 9. С. 40–74. <https://doi.org/10.4213/sm9496>
29. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
30. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. № 6. С. 940–950. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26016239>
31. Ананьевский И. М., Решмин С. А., Черноусько Ф. Л. Методы управления нелинейными хаотическими системами. М.: Физматлит, 2006.
32. Петросян Л. А. Дифференциальные игры с неполной информацией // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 195. № 3. С. 558–561. <https://www.mathnet.ru/rus/dan35806>
33. Зимовец А. А., Матвийчук А. Р., Ушаков А. В., Ушаков В. Н. Свойство стабильности в игровой задаче о сближении при наличии фазовых ограничений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. Т. 4. № 4. С. 27–45. <https://doi.org/10.31857/S0002338821040132>
34. Ушаков В. Н. Унификация в игровой задаче сближения и свойство стабильности // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7. Вып. 1. С. 54–79. <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17105>
35. Ершов А. А., Ушаков В. Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный постоянный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. <https://doi.org/10.4213/sm8761>
36. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 25.09.2023

Принята к публикации 29.10.2023

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0527-5375>  
E-mail: [ushak@imm.uran.ru](mailto:ushak@imm.uran.ru)

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9685-9711>  
E-mail: [ale10919@yandex.ru](mailto:ale10919@yandex.ru)

Ушаков Андрей Владимирович, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3004-4245>  
E-mail: [aushakov.pk@gmail.com](mailto:aushakov.pk@gmail.com)

Матвийчук Александр Ростиславович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел вычислительных систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3606-858X>  
E-mail: [matv@imm.uran.ru](mailto:matv@imm.uran.ru)

**Цитирование:** В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков. Некоторые задачи сближения нелинейных управляемых систем в фиксированный момент времени // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 125–155.

*Keywords:* conflict-controlled system, control, player, game problem of convergence, fixed moment, solvability set, positional strategy, position, stability.

MSC2020: 93C15, 49N30, 49N35

DOI: 10.35634/2226-3594-20232-62-09

The game problem of target approach for nonlinear control system with a target set in a finite-dimensional phase space at a fixed time is studied. The problem is formulated and studied within the framework of concepts and constructions of the theory of positional differential games, created by N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin in the second half of the 20th century. One of the central problems of the theory of positional differential games is the problem of calculating positional sets of uptake in convergence game problems. The paper investigates a key stability property in the theory of positional differential games, which is a characteristic of some closed sets in the space of positions of a controlled system that are convenient for the first player to conduct the game. It is important that this property is also characteristic for solvability sets in convergence problems: the inclusion of the concept of stability in research makes it possible to obtain analytical descriptions of solvability sets in some specific convergence problems and to develop algorithms for approximate calculation of the solution in a number of specific problems. Some modifications of the definition of a  $u$ -stable bridge in the considered convergence problem and a system of sets approximating the attainability set are given. Three specific problems on the convergence of mechanical systems are also presented, computer solutions are simulated, and graphical simulation results are presented.

**Funding.** This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01483-23-00, project FEWS-2020-0010.

#### REFERENCES

1. Krasovskii N.N. Game problems in dynamics. I, *Engineering Cybernetics*, 1969, no. 5, pp. 1–10. <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=278754>
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. On the structure of differential games, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1970, vol. 11, pp. 143–147. <https://zbmath.org/0213.15901>
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
4. Krasovskii N.N. On the problem of unifying differential games, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 269–273. <https://zbmath.org/0367.90133>
5. Krasovskii N.N. Unification of differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki*, 1977, issue 24, pp. 32–45 (in Russian). <https://search.rsl.ru/ru/record/01007673325>
6. Pontryagin L.S. Linear differential games. I, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 769–771. <https://zbmath.org/0157.16304>
7. Pontryagin L.S. Linear differential games. II, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 910–912. <https://zbmath.org/0157.16401>
8. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, issue 3, pp. 285–303. <https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815>
9. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontryagin, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 44, issue 1, pp. 125–132. <https://doi.org/10.1070/SM1983v044n01ABEH000956>
10. Nikol'skii M.S. On the lower alternating integral of Pontryagin in linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1987, vol. 56, issue 1, pp. 33–47. <https://doi.org/10.1070/SM1987v056n01ABEH003022>
11. Azamov A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1988, vol. 37, no. 2, pp. 355–359. <https://zbmath.org/0683.90108>

12. Kurzanskii A. B. Pontryagin's alternated integral in the theory of control synthesis, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1999, vol. 224, pp. 212–225. <https://zbmath.org/0958.93034>
13. Pshenichnyj B. N. The structure of differential games, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1969, vol. 10, pp. 70–72. <https://zbmath.org/0227.90062>
14. Pshenichnyi B. N., Sagaidak M. I. Differential games of prescribed duration, *Cybernetics*, 1970, vol. 6, issue 2, pp. 72–83. <https://doi.org/10.1007/BF01070503>
15. Polovinkin E. S. Stability of a terminal set and optimality of pursuit time in differential games, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1984, vol. 20, no. 3, pp. 433–446 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/de5120>
16. Polovinkin E. S., Ivanov G. E., Balashov M. V., Konstantinov R. V., Khorev A. V. An algorithm for the numerical solution of linear differential games, *Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, issue 10, pp. 1515–1542. <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n10ABEH000604>
17. Subbotin A. I., Subbotina N. N. Necessary and sufficient conditions for a piecewise smooth value of a differential game, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1978, vol. 19, pp. 1447–1451. <https://zbmath.org/0431.90101>
18. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
19. Subbotin A. I. *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991.
20. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
21. Kryazhinskii A. V., Osipov Yu. S. On an algorithmic criterion of the solvability of game problems for linear controlled systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, suppl. 1, pp. S154–S162. <https://zbmath.org/1116.49325>
22. Guseinov Kh. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control, *Problems in Control and Information Theory*, 1985, vol. 14, no. 3, pp. 155–167. [http://real-j.mtak.hu/7996/1/MTA\\_ProblemsOfControl\\_14.pdf](http://real-j.mtak.hu/7996/1/MTA_ProblemsOfControl_14.pdf)
23. Kamneva L. V., Patsko V. S. Construction of the solvability set in differential games with simple motion and nonconvex terminal set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 57–71. <https://doi.org/10.1134/S008154381805005X>
24. Kumkov S. S., Le Menek S., Patsko V. S. Solvability sets in a pursuit problem with two pursuers and one evader, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 148–165 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/timm1091>
25. Lukoyanov N., Gomoyunov M. Differential games on minimax of the positional quality index, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 3, pp. 780–799. <https://doi.org/10.1007/s13235-018-0281-7>
26. Taras'yev A. M., Ushakov V. N., Khripunov A. P. On a computational algorithm for solving game control problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 51, issue 2, pp. 167–172. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(87\)90059-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90059-1)
27. Grigor'eva S. V., Pakhotinskikh V. Yu., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Construction of solutions in certain differential games with phase constraints, *Sbornik: Mathematics*, 2005, vol. 196, issue 4, pp. 513–539. <https://doi.org/10.1070/SM2005v196n04ABEH000890>
28. Ershov A. A., Ushakov A. V., Ushakov V. N. Two game-theoretic problems of approach, *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, issue 9, pp. 1228–1260. <https://doi.org/10.1070/SM9496>
29. Chernous'ko F. L., Melikyan A. A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Game control and search problems), Moscow: Nauka, 1978.
30. Chernous'ko F. L. Ellipsoidal approximation of attainability sets of a linear system with indeterminate matrix, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, issue 6, pp. 921–931. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00114-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00114-1)
31. Anan'evskii I. M., Reshmin S. A., Chernous'ko F. L. *Metody upravleniya nelineinymi khaoticheskimi sistemami* (Control methods for nonlinear chaotic systems), Moscow: Fizmatlit, 2006.
32. Petrosyan L. A. Differential games with incomplete information, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1970, vol. 11, pp. 1524–1527. <https://zbmath.org/0226.90059>

33. Zimovets A. A., Matviichuk A. R., Ushakov A. V., Ushakov V. N. Stability property in the convergence game problem in the presence of phase constraints, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, no. 4, pp. 530–548. <https://doi.org/10.1134/S1064230721040110>
34. Ushakov V. N. Unification in the game problem of convergence and the property of stability, *Chelyabinskii Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 2022, vol. 7, issue 1, pp. 54–79 (in Russian). <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17105>
35. Ershov A. A., Ushakov V. N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, issue 9, pp. 1312–1352. <https://doi.org/10.1070/SM8761>
36. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York–London: Academic Press, 1972. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8>

Received 25.09.2023

Accepted 29.10.2023

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0527-5375>

E-mail: [ushak@imm.uran.ru](mailto:ushak@imm.uran.ru)

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9685-9711>

E-mail: [ale10919@yandex.ru](mailto:ale10919@yandex.ru)

Andrei Vladimirovich Ushakov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3004-4245>

E-mail: [aushakov.pk@gmail.com](mailto:aushakov.pk@gmail.com)

Aleksandr Rostislavovich Matviychuk, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Computer Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3606-858X>

E-mail: [matv@imm.uran.ru](mailto:matv@imm.uran.ru)

**Citation:** V. N. Ushakov, A. A. Ershov, A. R. Matviychuk, A. V. Ushakov. Some problems of target approach for nonlinear control system at a fixed time moment, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 125–155.