

УДК 517.977

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

ОБ УСЛОВИЯХ ГЛАДКОСТИ И ВЫДЕЛЕНИИ КРАЯ РАССЕИВАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрен класс задач быстрогодействия в трехмерном пространстве с шаровой вектограммой скоростей. В качестве целевого множества выступает параметрически заданная гладкая кривая. Предложены численно-аналитические подходы к построению биссектрисы целевого множества — рассеивающей поверхности в задаче быстрогодействия. Основу алгоритмов составляют формулы точек края рассеивающей поверхности, выписанные в терминах инвариантов кривой. Показано, что эти точки образуют кромку биссектрисы и лежат в центрах соприкасающихся сфер к кривой. Доказана теорема о достаточных условиях гладкости рассеивающей поверхности. Найдены уравнения касательной плоскости к биссектрисе для тех ее точек, из которых выходит ровно две оптимальные траектории. Приведен пример решения задачи быстрогодействия в виде совокупности поверхностей уровня функции оптимального результата с выделением поверхности их негладкости.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, рассеивающая поверхность, биссектриса, псевдовершина, крайняя точка, касательная плоскость, функция оптимального результата.

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-03

Введение

Проведено исследование задач быстрогодействия в трехмерном евклидовом пространстве для случая, когда вектограмма скоростей есть шар единичного радиуса с центром в начале координат. Если целевое множество M невыпуклое, то в задаче возникает сингулярное множество, так называемая биссектриса $L(M)$. Согласно принятой в теории управления классификации $L(M)$ есть рассеивающая поверхность [1]: из каждой ее точки выходит более одной оптимальной траектории. В статьях [2, 3] изучены некоторые свойства крайних точек биссектрисы, образующих край ее замыкания. Возникает необходимость изучения ее строения в целом. В частности, требуется найти условия ее гладкости и получить уравнение касательной плоскости к ней, что существенно облегчает построение биссектрисы и поверхностей уровня функции оптимального результата.

§ 1. Основные понятия

Рассмотрим замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ до M (здесь $\|\cdot\|$ норма вектора в евклидовой метрике). Построим $\Omega_M(\mathbf{x}) \triangleq M \cap U(\mathbf{x}, \rho(\mathbf{x}, M))$ — множество точек из M , ближайших к \mathbf{x} в евклидовой метрике. Здесь и далее $U(\mathbf{x}, r) \triangleq \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ — замкнутый шар.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) > 1\} \quad (1.1)$$

называется биссектрисой M .

Здесь $\text{card } M$ означает мощность множества M . В случае если множество конечно, то его мощность равна числу его элементов. Множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ может состоять из бесконечного множества элементов, например если M содержит дугу кривой $\widehat{\Gamma}$, лежащей на сфере $\partial U(\mathbf{x}, r)$, $r = \rho(\mathbf{x}, \Gamma)$. Если $\widehat{\Gamma} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x})$, то $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) = \aleph_1$ — мощность множества континуум. Множества, аналогичные биссектрисе, часто называются в англоязычной литературе “conflict set”, “medial axe” (см. [4]).

Известно [5], что $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ — функция оптимального результата в задаче быстрого действия с целевым множеством M и динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1, \\ \dot{y} = v_2, \\ \dot{z} = v_3, \end{cases} \quad (1.2)$$

в которой на управление (v_1, v_2, v_3) наложено ограничение $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \leq 1$, то есть скорость системы берется из шара $U(\mathbf{0}, 1)$, $\mathbf{0} \triangleq (0, 0, 0)$. Будем обозначать $\Phi(\tau) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \rho(\mathbf{x}, M) = \tau\}$ — поверхность уровня функции $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ при $\tau \in (0, \infty)$. Если при некотором $\tau > 0$ $\Phi(\tau) \cap L(M) = \emptyset$, то $\Phi(\tau)$ — гладкая поверхность, а если $\Phi(\tau) \cap L(M) \neq \emptyset$, то она имеет изломы в точках из $\Phi(\tau) \cap L(M)$. В особых случаях, когда множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ включает одномерные многообразия, лежащие на границе ∂M множества M , $\Phi(\tau)$ может вырождаться в кривую.

§ 2. Особенности задач при целевом множестве кривой

Рассмотрим класс задач быстрого действия, в которых целевое множество M — это параметрически заданная кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in T\}, \quad (2.1)$$

такая, что производные первого, второго и третьего порядка $\mathbf{r}(t)$ определены при $t \in T$, где $T \subseteq \mathbb{R}$ — область задания вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Считаем, что на вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ наложены стандартные в дифференциальной геометрии условия бирегулярности $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \neq \mathbf{0}$ на всей ее области определения T (см. [6]). Здесь $\cdot \times \cdot$ означает векторное произведение векторов. Кроме того, считаем, что кривая (2.1) не допускает самопересечения, то есть если $t_1 \neq t_2$, то $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ при $t_1, t_2 \in T$. Множество (2.1) называется географом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Если для кривой Γ выполняется условие бирегулярности, то Γ не совпадает с прямой даже локально. Следовательно, Γ — не выпуклое множество, поэтому $L(\Gamma) \neq \emptyset$.

К основным инвариантам [6] в точке $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$, кривой Γ относят:

- (a) $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали (репер Френе);
- (b) $k(t)$ — кривизну;
- (c) $\varkappa(t)$ — кручение.

С задачей быстрого действия с динамикой (1.2) связана задача Дирихле для дифференциального уравнения типа Гамильтона–Якоби:

$$\begin{cases} \min_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 : \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \nu_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 1 = 0, \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Функция оптимального результата $u(\mathbf{x})$ в задаче быстрого действия совпадает с обобщенным (минимаксным [7]) решением задачи (2.2) (см. [5]). Сужение функции $u(\mathbf{x})$ на множество $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ дифференцируемо всюду, за исключением биссектрисы $L(\Gamma)$. В точках $\mathbf{x} \in L(\Gamma)$ определен супердифференциал $D^+u(\mathbf{x})$, подробнее см. [8].

Множество $\Phi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, целесообразно строить как часть поверхности

$$\Lambda(\tau) = \{\mathbf{r}(t) + \mathbf{e}_2(t)\tau \cos \varphi + \mathbf{e}_3(t)\tau \sin \varphi : t \in T, \varphi \in [0, 2\pi]\}. \quad (2.3)$$

В общем случае на $\Lambda(\tau)$ могут быть области как входящие в $\Phi(\tau)$, так и не входящие. Их разграничивают именно кривые, образующиеся при пересечении $\Lambda(\tau)$ с множеством (1.1), точнее с теми его точками $\mathbf{x}^* \in L(\Gamma)$, для которых $\rho(\mathbf{x}^*, \Gamma) = \tau$.

О п р е д е л е н и е 2.1 ([2]). Точка $\mathbf{r}(t_0)$ кривой Γ такая, что существуют последовательности $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n \subset L(\Gamma)$ и $\{t_i^-, t_i^+\} \subset T$, для которых выполняются вложения $\forall i \in \mathbb{N}$ $\{\mathbf{r}(t_i^-), \mathbf{r}(t_i^+)\} \subseteq \Omega_\Gamma(\mathbf{x}_i)$ и предельное соотношение $\lim_{i \rightarrow \infty} (t_i^-, t_i^+) = (t_0, t_0)$, называется псевдовершиной кривой Γ . Если определен предел $\mathbf{x}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i$, то он называется крайней точкой биссектрисы $L(\Gamma)$, порожденной точкой $\mathbf{r}(t_0)$.

§ 3. Свойства биссектрисы

§ 3.1. Выделение края поверхности $L(\Gamma)$

Обозначим $W(t_0)$ множество крайних точек биссектрисы, порожденных точкой $\mathbf{r}(t_0)$. Если $\mathbf{r}(t_0)$ не является псевдовершиной, то $W(t_0) = \emptyset$. Обозначим $\check{L}(\Gamma)$ множество крайних точек биссектрисы $L(\Gamma)$. Известно [9], что биссектриса связного невыпуклого множества M всегда имеет непустое множество крайних точек, которые входят в ее замыкание. Лист множества (1.1) может быть гладкой поверхностью без края только в случае, если она есть геометрическое множество точек, равноудаленных от двух компонент связности $M_1, M_2 \subset M$, например, двух прямых (см. [10]).

При построении множества $L(\Gamma)$ важно выделить его кромку, состоящую из крайних точек. Для плоской дважды гладкой кривой их координаты получаются по формулам, в которые входит ее кривизна [11]. В случае пространственной кривой отыскание координат $\check{L}(\Gamma)$ требует знания двух инвариантов: кривизны и кручения.

О п р е д е л е н и е 3.1. Центром $\mathbf{c}_s(t_0)$ соприкасающейся сферы к пространственной кривой Γ в точке $\mathbf{r}(t_0)$, в которой $\varkappa(t_0) \neq 0$, называется точка

$$\mathbf{c}_s(t_0) = \mathbf{r}(t_0) + k^{-1}(t_0)\mathbf{e}_2(t_0) - \frac{k'(t_0)}{k^2(t_0)\varkappa(t_0)\|\mathbf{r}'(t_0)\|}\mathbf{e}_3(t_0). \quad (3.1)$$

По сути $\mathbf{c}_s(t_0)$ есть предел пересечения трех нормальных плоскостей к кривой Γ в несовпадающих точках $\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2), \mathbf{r}(t_3)$ при $(t_1, t_2, t_3) \rightarrow (t_0, t_0, t_0)$, см. [12].

У т в е р ж д е н и е 3.1. Для любой точки $\mathbf{r}(t_0)$ кривой Γ при $\varkappa(t_0) \neq 0$ выполняется

$$W(t_0) \subseteq \{\mathbf{c}_s(t_0)\}.$$

Доказательство следует из теоремы 3.1 работы [3], где выведена формула для координат крайней точки биссектрисы. Заметим, что в случае если $\varkappa(t) = 0$ и $k'(t) = 0$, то множество $W(t)$ может быть подмножеством прямой $\{\mathbf{r}(t) + k^{-1}(t)\mathbf{e}_2(t) + \lambda\mathbf{e}_3(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

С л е д с т в и е 3.1. Если $\varkappa(t) \neq 0$ для любого $t \in T$, то все множество крайних точек биссектрисы лежит на кривой $C(\Gamma) = \{\mathbf{c}_s(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in T\}$, состоящей из центров соприкасающихся сфер к Γ , образуя кусочно-гладкий край поверхности, совпадающей с замыканием $L(\Gamma)$. При этом окаймляющая биссектрису кривая не обязательно содержит все точки $\mathbf{c}_s(t)$, $t \in T$. Если для некоторого t найдется такое $t^* \in T$, что $\|\mathbf{c}_s(t) - \mathbf{r}(t^*)\| < \|\mathbf{c}_s(t) - \mathbf{r}(t)\|$, то точка $\mathbf{r}(t)$ не порождает крайнюю точку биссектрисы. При этом кривая $C(\Gamma)$, в отличие от Γ , может иметь точки самопересечения.

§ 3.2. Условия гладкости множества $L(\Gamma)$

Возникает необходимость исследовать биссектрису везде, а не только в окрестности крайних точек. В частности, важно показать, при каких условиях $L(\Gamma)$ является гладкой поверхностью.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть заданы поверхность S и точка $s \in S$. Плоскость P называется касательной к S в точке s , если выполнены условия:

(1) включение

$$s \in P; \quad (3.2)$$

(2) для любой последовательности $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ и вектора \bar{s} таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = s \quad (3.3)$$

и существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{s_i - s}{\|s_i - s\|} = \bar{s}, \quad (3.4)$$

найдутся точка $p^* \in P \setminus \{s\}$ и число $\alpha > 0$ такие, что

$$\alpha(p^* - s) = \bar{s}; \quad (3.5)$$

(3) для любой точки $p^* \in P \setminus \{s\}$ найдутся такая последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S \setminus \{s\}$, для которой справедливо предельное соотношение (3.3), а также число $\alpha > 0$, что выполняются (3.4), (3.5).

Т е о р е м а 3.1. Пусть для некоторой точки $x_0 \in L(\Gamma)$ множество проекций состоит ровно из двух элементов

$$\Omega_{\Gamma}(x_0) = \{r(t_1), r(t_2)\}. \quad (3.6)$$

Тогда к поверхности $L(\Gamma)$ в точке x_0 определена касательная плоскость

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3: \langle p - x_0, r(t_1) - r(t_2) \rangle = 0\}. \quad (3.7)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $v = r(t_1) - r(t_2)$. Без ограничения общности полагаем, что $x_0 = 0$. Покажем сначала, что для любой последовательности точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(\Gamma) \setminus \{0\}$ такой, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad (3.8)$$

выполняется

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\langle \frac{x_i}{\|x_i\|}, v \right\rangle = 0. \quad (3.9)$$

Многозначное отображение $x \mapsto \Omega_{\Gamma}(x)$ полунепрерывно сверху по включению (см. [13, с. 111]). Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что имеет место вложение $\Omega_{\Gamma}(0) \subset (\Omega_{\Gamma}(0) + U(0, \delta))$ при всех $x \in U(0, \varepsilon)$. Выберем достаточно малое значение ε , чтобы выполнялось

$$U(r(t_1), \delta) \cap U(r(t_2), \delta) = \emptyset. \quad (3.10)$$

Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma \cap U(r(t_1), \delta)$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap U(r(t_2), \delta)$. В малой окрестности точки 0 биссектриса $L(\Gamma)$ может быть представлена как геометрическое множество точек, равноудаленных от Γ_1 и Γ_2 . Это следует из условия (3.6) о том, что у точки 0 нет других проекций на Γ ,

кроме $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_2)$. Для функции евклидового расстояния до замкнутого множества Γ в точках $\mathbf{x} \notin \Gamma$, в которых множество проекций состоит ровно из одного элемента $\Omega_\Gamma = \{\mathbf{y}\}$, определен градиент (см. [8, с. 244])

$$Du(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}.$$

Поэтому для функций $u_1 = \rho(\mathbf{x}, \Gamma_1)$ и $u_2 = \rho(\mathbf{x}, \Gamma_2)$ определены градиенты $Du_1(\mathbf{0})$ и $Du_2(\mathbf{0})$. Поэтому можно записать оценки

$$u_1(\mathbf{x}_i) = u_1(\mathbf{0}) + \langle \mathbf{x}_i, Du_1(\mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|), \quad (3.11)$$

$$u_2(\mathbf{x}_i) = u_2(\mathbf{0}) + \langle \mathbf{x}_i, Du_2(\mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|). \quad (3.12)$$

При этом, по построению, начиная с некоторого номера,

$$u_1(\mathbf{x}_i) = u_2(\mathbf{x}_i). \quad (3.13)$$

Из (3.11), (3.12) следует выражение для разности

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{x}_i) - u_1(\mathbf{x}_i) &= \langle \mathbf{x}_i, Du_2(\mathbf{x}_0) \rangle - \langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0, Du_1(\mathbf{x}_0) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|) = \\ &= \langle \mathbf{x}_i, Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь $o(t)$ — такая функция, что $\lim_{t \rightarrow 0} o(t)t^{-1} = 0$. Множество всех векторов единичной нормы ограничено. Поэтому, если (3.9) не выполняется, то найдется подпоследовательность $\{\mathbf{x}_i^*\}_{i=1}^\infty \subseteq \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^\infty$, и вектор \mathbf{w} такой, что $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, и имеет место предельное соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|} = \mathbf{w}. \quad (3.15)$$

Без ограничения общности полагаем, что $\{\mathbf{x}_i^*\}_{i=1}^\infty = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда из (3.14) и (3.15) вытекает

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{x}_i) - u_1(\mathbf{x}_i) &= \langle \mathbf{w}\|\mathbf{x}_i\| + \mathbf{o}(\mathbf{x}_i), Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|) = \\ &= \langle \mathbf{w}, Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle \|\mathbf{x}_i\| + \langle \mathbf{o}(\mathbf{x}_i), Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x}_i\|) = \\ &= \langle \mathbf{w}, Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle \|\mathbf{x}_i\| + o(\|\mathbf{x}_i\|). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь $\mathbf{o}(\mathbf{x})$ — такая вектор-функция, что $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{o}(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{x}\|^{-1} = 0$. По выбору вектора \mathbf{w} можно записать число $w = \langle \mathbf{w}, Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle \neq 0$. Значит, из (3.16) вытекает

$$u_2(\mathbf{x}_i) - u_1(\mathbf{x}_i) = w\|\mathbf{x}_i\| + o(\|\mathbf{x}_i\|).$$

Из (3.8) и свойств бесконечно малой функции следует, что можно найти такой номер n , что для любого натурального числа $i > n$ имеет место оценка $o(\|\mathbf{x}_i\|) < 0.5w\|\mathbf{x}_i\|$. Тогда

$$\forall i > n \quad |u_2(\mathbf{x}_i) - u_1(\mathbf{x}_i)| = |w\|\mathbf{x}_i\| + o(\|\mathbf{x}_i\|)| > |w\|\mathbf{x}_i\| - 0.5w\|\mathbf{x}_i\|| = |0.5w\|\mathbf{x}_i\|| > 0.$$

Значит, для всех достаточно больших номеров (3.13) не выполняется. Получилось противоречие. Значит, для всех последовательностей векторов, сходящихся к $\mathbf{0}$, в пределе угол с плоскостью (3.7) равен нулю.

Покажем теперь, что для произвольного вектора \mathbf{p} такого, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = 0$ и $\|\mathbf{p}\| = 1$, найдется последовательность $\{\check{\mathbf{x}}_i\}_{i=1}^\infty \subset L(\Gamma) \setminus \{\mathbf{0}\}$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \check{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\check{\mathbf{x}}_i}{\|\check{\mathbf{x}}_i\|} = \mathbf{p}. \quad (3.18)$$

Будем считать, что построения проводятся в том же шаре $U(\mathbf{0}, \varepsilon)$, чтобы выполнялось (3.10). Введем вспомогательные последовательности. Одна из них берется по формуле

$$\mathbf{x}_i^+ = \alpha_i i^{-1} \mathbf{p} + \alpha_i i^{-2} \mathbf{v},$$

где $\alpha_i \in (0, 1)$ выбирается достаточно малым, чтобы выполнялось $u_2(\mathbf{x}_i^+) > u_1(\mathbf{x}_i^+)$. Такое значение всегда найдется, поскольку $\langle \mathbf{v}, Du_2(\mathbf{0}) \rangle > 0$, $\langle \mathbf{v}, Du_1(\mathbf{0}) \rangle < 0$. Поэтому

$$\langle i^{-1} \mathbf{p} + i^{-2} \mathbf{v}, Du_2(\mathbf{0}) \rangle - \langle i^{-1} \mathbf{p} + i^{-2} \mathbf{v}, Du_1(\mathbf{0}) \rangle = \langle i^{-2} \mathbf{v}, Du_2(\mathbf{0}) - Du_1(\mathbf{0}) \rangle > 0.$$

Аналогично, другая последовательность строится как

$$\mathbf{x}_i^- = \beta_i i^{-1} \mathbf{p} - \beta_i i^{-2} \mathbf{v},$$

где $\beta_i \in (0, 1)$ выбирается достаточно малым, чтобы выполнялось $u_2(\mathbf{x}_i^-) < u_1(\mathbf{x}_i^-)$. Последовательности $\{\mathbf{x}_i^+\}_{i=1}^\infty$ и $\{\mathbf{x}_i^-\}_{i=1}^\infty$ построены таким образом, что при $i \rightarrow \infty$ углы между векторами \mathbf{x}_i^+ и \mathbf{x}_i^- с одной стороны и вектором \mathbf{p} с другой стороны, стремятся к нулю. Поскольку функции $u_1(\mathbf{x})$ и $u_2(\mathbf{x})$ непрерывны, то найдется точка $\check{\mathbf{x}}_i \in [\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_i^-]$ такая, что $u_1(\check{\mathbf{x}}_i) = u_2(\check{\mathbf{x}}_i)$. Следовательно, $\check{\mathbf{x}}_i \in L(\Gamma)$. При этом по построению имеет место представление

$$\check{\mathbf{x}}_i = \omega(i^{-1}) \mathbf{p} + i^{-1} \omega(i^{-1}) \mathbf{v},$$

где $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\check{\mathbf{x}}_i}{\|\check{\mathbf{x}}_i\|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega(i^{-1}) \mathbf{p} + i^{-1} \omega(i^{-1}) \mathbf{v}}{\|\omega(i^{-1}) \mathbf{p} + i^{-1} \omega(i^{-1}) \mathbf{v}\|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p} + \omega(i^{-1}) \mathbf{v}}{\|\mathbf{p} + \omega(i^{-1}) \mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = \mathbf{p},$$

которое совпадает с (3.18). В то же время по построению

$$\|\check{\mathbf{x}}_i\| \leq \|i^{-1} \mathbf{p} + i^{-2} \mathbf{v}\| + \|i^{-1} \mathbf{p} - i^{-2} \mathbf{v}\| \leq 2i^{-1} \|\mathbf{p}\| + 2i^{-2} \|\mathbf{v}\| \leq 2i^{-1} + 2i^{-2} \|\mathbf{v}\|.$$

Следовательно, выполняется предельное соотношение (3.17).

Включение $\mathbf{0} \in P$ выполняется по построению плоскости (3.7). Это влечет справедливость включения (3.2) и, соответственно, условия (1). Равенства (3.8), (3.9) гарантируют выполнение условия (2), поскольку нормаль к плоскости P параллельна вектору \mathbf{v} . Существование последовательности $\{\check{\mathbf{x}}_i\}_{i=1}^\infty \subset L(\Gamma)$, для которой справедливы (3.17), (3.18), является достаточным для (3), поскольку любой вектор \mathbf{p} может быть представлен как $\alpha \mathbf{p}^*$, где $\mathbf{p}^* \in P \cap U(\mathbf{0}, 1)$, $\alpha \in (0, \infty)$. \square

З а м е ч а н и е 1. Условие теоремы о наличии ровно двух ближайших точек на кривой Γ является существенным. В примере 1 работы [14] биссектриса содержит одномерное многообразие L^* , на котором негладко склеиваются два листа $L(\Gamma)$. Его возникновение обусловлено тем, что в точках $\mathbf{x} \in L^*$ имеет место $\text{card } \Omega_\Gamma(\mathbf{x}) = 4 > 2$.

Формула (3.7) показывает, что оптимальные траектории $[\mathbf{x}_0, \mathbf{r}(t_1)]$ и $[\mathbf{x}_0, \mathbf{r}(t_2)]$ при $\mathbf{x}_0 \in L(\Gamma)$ направлены в разные стороны от касательной плоскости к $L(\Gamma)$. Поэтому $L(\Gamma)$ можно считать рассеивающей поверхностью в задаче быстрогодействия в соответствии с классификацией Р. Айзекса [1, гл. 6].

§ 4. Пример решения задачи быстрогодействия

Авторы модернизировали программный комплекс [15] для работы с кривыми (2.1) в трехмерном пространстве.

Пример 4.1. Пусть в задаче (2.2) целевое множество есть кривая Γ , описанная как годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3 + t), \quad (4.1)$$

заданной на области определения $T = \mathbb{R}$. Требуется построить решение в виде карты поверхностей уровня функции оптимального результата, выделив рассеивающую поверхность.

Анализ производных трех первых порядков вектор-функции (4.1) показывает, что во всех ее точках $k(t) \neq 0$ и $\varkappa(t) \neq 0$, а значит определен центр соприкасающейся сферы по формуле (3.1). При этом каждая точка является псевдовершиной. Согласно следствию 3.1 множество всех центров соприкасающихся сфер формируют край $\check{L}(\Gamma)$ биссектрисы $L(\Gamma)$, совпадающий с $C(\Gamma)$. Ближайшая к Γ точка замыкания рассеивающей поверхности — это центр соприкасающейся сферы $\mathbf{c}_s(0) = (0.5, 0, 0)$ в точке $\mathbf{r}(0)$, для него $u(\mathbf{c}_s(0)) = \|\mathbf{c}_s(0) - \mathbf{r}(0)\| = 0.5$. Поэтому все поверхности уровня $\Phi(\tau)$ при $\tau \in (0, 0.5]$ являются гладкими, они совпадают с множествами (2.3) при соответствующем τ . В случае $\tau \in (0.5, \infty)$ поверхности $\Phi(\tau)$ негладкие. Они вложены в множества (2.3), при этом области $\Lambda(\tau)$, входящие в $\Phi(\tau)$, ограничены линиями $\Lambda(\tau) \cap L(\Gamma)$.

Моделирование решения задачи показывает, что из всех точек биссектрисы исходит ровно две оптимальные траектории. Поэтому поверхность, совпадающая с замыканием $L(\Gamma)$, за исключением своих крайних точек, является гладкой, в ней везде определены касательные плоскости (3.7) по теореме 3.1. В свою очередь в окрестностях точек $L(\Gamma)$ поверхности уровня $\Phi(\tau)$ могут быть представлены как склейки двух гладких поверхностей уровня функций евклидоваго расстояния от разных подмножеств кривой Γ .

На рис. 1 показан годограф Γ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ (фиолетовой кривой), биссектриса $L(\Gamma)$ (желто-зеленой поверхностью), множество ее крайних точек $\check{L}(\Gamma)$ (вишневой кривой). Также на рисунке приведена точка $\mathbf{x} \in L(\Gamma)$ (красным маркером), ее проекции $\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2) \in \Omega_\Gamma(\mathbf{x})$ (фиолетовыми маркерами) и оптимальные траектории $[\mathbf{x}, \mathbf{r}(t_1)]$ и $[\mathbf{x}, \mathbf{r}(t_2)]$ (красными линиями). На рис. 2 представлены поверхность $\Phi(1)$ функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$ (ее цвет с ростом ординаты меняется от синего до красного), рассеивающая поверхность $L(\Gamma)$ и кривая Γ . Рис. 3 аналогичен, но на нем изображено множество $\Phi(1.5)$. На рис. 2, 3 показано, что поверхности $\Phi(\tau)$ изламываются на линиях пересечения с биссектрисой.

§ 5. Заключение

Найдены формулы координат крайних точек биссектрисы $L(\Gamma)$ гладкой кривой Γ в терминах инвариантов (а)–(с) дифференциальной геометрии. Показано, что в достаточно общем случае они совпадают с центрами соприкасающихся сфер к Γ в точках, в которых кручение отлично от нуля. Для регулярных областей множества (1.1), из которых исходит ровно две оптимальные траектории, доказана их гладкость. Найдено выражение для касательной плоскости P к $L(\Gamma)$, которое содержит только координаты проекций точки $\mathbf{x} \in L(\Gamma)$ на Γ . Выполнено моделирование решения задачи быстрогодействия с динамикой (1.2) для случая целевого множества — годографа вектор-функции (4.1). Проведена визуализация результатов, включая построение рассеивающей поверхности и начинающихся на ней оптимальных траекторий. Построены поверхности уровней $\Phi(\tau)$ функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$ при различных τ . Результаты могут использоваться для изучения свойств невыпуклых множеств в трехмерном евклидовом пространстве, в частности, для вычисления их меры невыпуклости [16, 17].

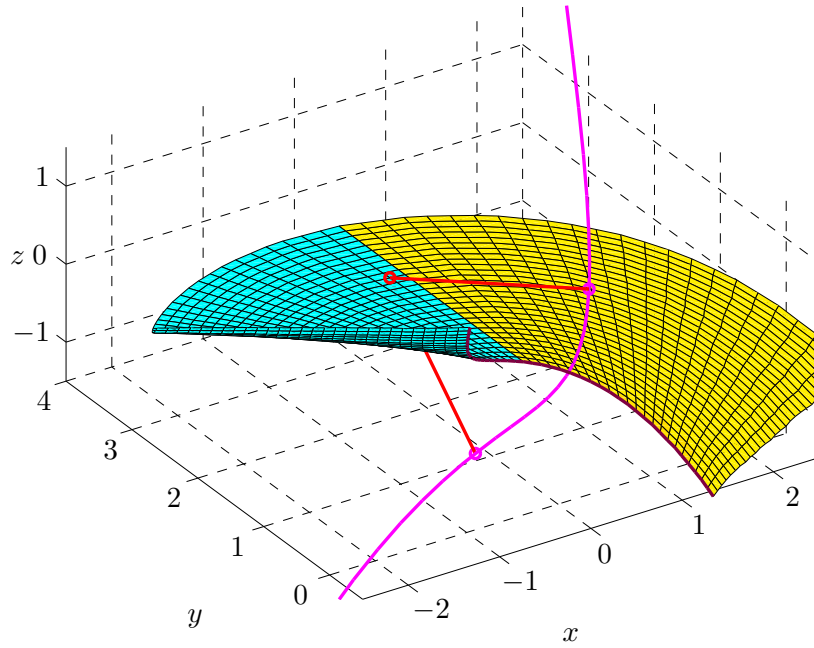


Рис. 1. Кривая Γ , биссектриса $L(\Gamma)$, множество ее крайних точек $\check{L}(\Gamma)$, точка $x \in L(\Gamma)$ и оптимальные траектории $[x, r(t_1)]$ и $[x, r(t_2)]$

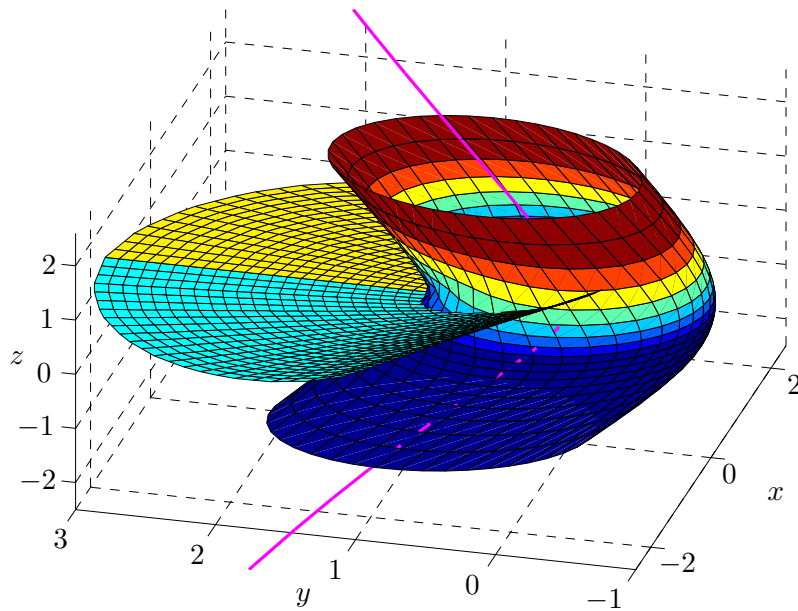


Рис. 2. Кривая Γ , биссектриса $L(\Gamma)$ и поверхность $\Phi(1)$

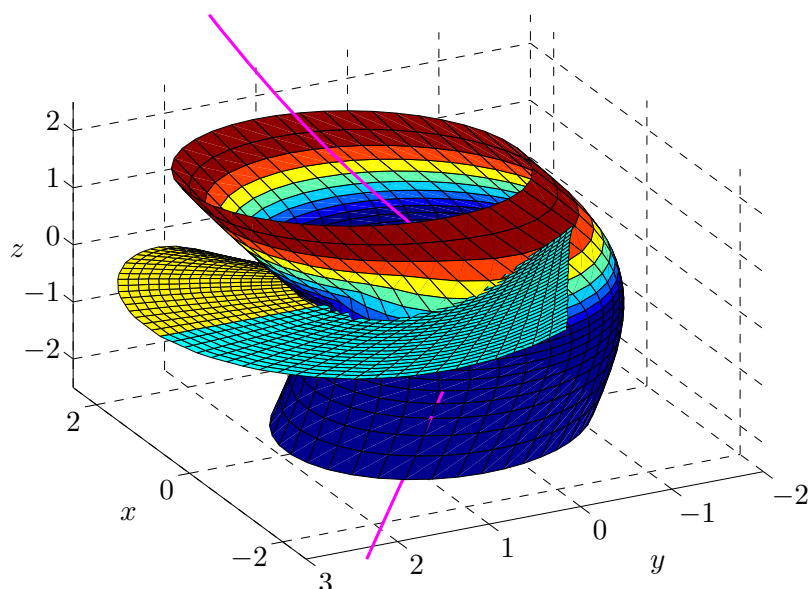


Рис. 3. Кривая Γ , биссектриса $L(\Gamma)$ и поверхность $\Phi(1.5)$

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Combined algorithms for constructing a solution to the time-optimal problem in three-dimensional space based on the selection of extreme points of the scattering surface // *Ural Mathematical Journal*. 2022. Vol. 8. No. 2. P. 115–126. <https://doi.org/10.15826/umj.2022.2.009>
3. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Analytic-numerical approach to construction of minimax solution to the Hamilton–Jacobi equation in three-dimensional space // *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 262. No. 3. P. 291–300. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05817-9>
4. Giblin P. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions // *The mathematics of surfaces IX. Proceedings of the Ninth IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*. London: Springer, 2000, pp. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
5. Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2008. Т. 14. № 2. С. 182–191. <https://www.mathnet.ru/rus/timm34>
6. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М.: Просвещение, 1982.
7. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
8. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
9. Giblin P., Reeve G. Centre symmetry sets of families of plane curves // *Demonstratio Mathematica*. 2015. Vol. 48. No. 2. P. 167–192. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0016>
10. Sotomayor J., Siersma D., Garcia R. Curvatures of conflict surfaces in Euclidean 3-space // *Banach Center Publications*. 1999. Vol. 50. P. 277–285. <https://doi.org/10.4064/-50-1-277-285>
11. Успенский А. А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2014. Т. 20. № 3. С. 276–290. <https://www.mathnet.ru/rus/timm1100>

12. Нигмедзянова А. М. Дифференциальная геометрия. Часть 1: Дифференциальная геометрия кривых. Учебно-методическое пособие. Казань: Казанский университет, 2014.
13. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 108–119.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>
14. Успенский А. А., Лебедев П. Д. О структуре сингулярного множества решения в одном классе пространственных задач управления по быстродействию // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 471–486.
<https://doi.org/10.35634/vm210309>
15. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Программа построения решения задачи быстродействия в трехмерном пространстве с шаровой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022666123 от 07.09.2022.
16. Ушаков В. Н., Ершов А. А. Оценка роста степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в терминах α -множеств // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 100–106.
<https://doi.org/10.31857/S268695432006017X>
17. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Матвийчук А. Р. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 261–270. <https://doi.org/10.4213/tm4219>

Поступила в редакцию 29.04.2024

Принята к публикации 10.05.2024

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>
E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Цитирование: П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Об условиях гладкости и выделении края рассеивающей поверхности в одном классе пространственных задач быстродействия // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 37–48.

P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii

On smoothness conditions and selection of the edge of a scattering surface in one class of 3D time-optimal problems

Keywords: time-optimal problem, scattering surface, bisector, pseudovertex, extreme point, tangent plane, optimal result function.

MSC2020: 35A18, 14H20, 14J17

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-03

A class of time-optimal problems in three-dimensional space with a spherical velocity vectogram is considered. The target set is a parametrically defined smooth curve. Numerical and analytical approaches to constructing the bisector of the target set – the scattering surface – in the time-optimal problem are proposed. The algorithms are based on formulas for the edge points of the scattering surface, written in terms of curve invariants. It is shown that these points form the edge of the bisector and lie at the centers of the touching spheres to the curve. A theorem on sufficient conditions for the smoothness of a scattering surface is proven. The equations of the tangent plane to the bisector are found for those points from which exactly two optimal trajectories emerge. An example of solving a time-optimal problem in the form of a set of level surfaces of the optimal result function is given, highlighting the surface of their non-smoothness.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Combined algorithms for constructing a solution to the time-optimal problem in three-dimensional space based on the selection of extreme points of the scattering surface, *Ural Mathematical Journal*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 115–126. <https://doi.org/10.15826/umj.2022.2.009>
3. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Analytic-numerical approach to construction of minimax solution to the Hamilton–Jacobi equation in three-dimensional space, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 262, no. 3, pp. 291–300. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05817-9>
4. Giblin P. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions, *The mathematics of surfaces IX. Proceedings of the Ninth IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*, London: Springer, 2000, pp. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
5. Lebedev P.D., Uspenskii A. A., Ushakov V.N. Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S191–S201. <https://doi.org/10.1134/S0081543808060175>
6. Shcherbakov R. N., Pichurin L. F. *Differentsialy pomagayut geometrii* (Differentials help geometry), Moscow: Prosveshchenie, 1982.
7. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
8. Dem’yanov V. F., Vasil’ev L. V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* (Non-differentiable optimization), Moscow: Nauka, 1981.
9. Giblin P. J., Reeve G. Centre symmetry sets of families of plane curves, *Demonstratio Mathematica*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 167–192. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0016>
10. Sotomayor J., Siersma D., Garcia R. Curvatures of conflict surfaces in Euclidean 3-space, *Banach Center Publications*, 1999, vol. 50, pp. 277–285. <https://doi.org/10.4064/-50-1-277-285>
11. Uspenskii A. A. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 239–254. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090163>

12. Nigmedzyanova A.M. *Differentsial'naya geometriya. Chast' 1: Differentsial'naya geometriya krivykh* (Differential geometry. Part 1: Differential geometry of curves), Kazan: Kazan University, 2014.
13. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 108–119 (in Russian).
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>
14. Uspenskii A. A., Lebedev P.D. On the structure of the singular set of solutions in one class of 3D time-optimal control problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 471–486 (in Russian).
<https://doi.org/10.35634/vm210309>
15. Lebedev P.D., Uspensky A. A. *A program for constructing a solution to a time-optimal problem in three-dimensional space with a spherical velocity vectogram and a non-convex target set*. Certificate of state registration of the computer program No. 2022666123, September 07, 2022.
16. Ushakov V.N., Ershov A. A. Estimation of the growth of the degree of nonconvexity of reachable sets in terms of α -sets, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, issue 3, pp. 532–537.
<https://doi.org/10.1134/S1064562420060198>
17. Ushakov V.N., Ershov A.A., Matviychuk A.R. On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2021, vol. 315, pp. 247–256. <https://doi.org/10.1134/S0081543821050199>

Received 29.04.2024

Accepted 10.05.2024

Pavel Dmitrievich Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Alexandr Alexandrovich Uspenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Citation: P.D. Lebedev, A. A. Uspenskii. On smoothness conditions and selection of the edge of a scattering surface in one class of 3D time-optimal problems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 63, pp. 37–48.