Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2024. Том 63. С. 49–60

УДК 517.977

© ***Н. Н. Петров***

ДВУХКРАТНАЯ ПОИМКА СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая линейной нестационарной системой дифференциальных уравнений в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной функцией. Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений — строго выпуклый компакт с гладкой границей, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, рекуррентная функция.

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-04

Введение

Теория дифференциальных игр двух лиц, основы которой были заложены Р. Айзексом [1], к настоящему времени представляет собой глубоко содержательную теорию [2–8]. В настоящее время одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр преследования–убегания является разработка методов решения задач, посвященных конфликтному взаимодействию групп преследователей и убегающих [9–12]. При этом активно ведется поиск классов задач для анализа которых эффективно применимы ранее разработанные методы, в частности, метод разрешающих функций [13–16]. Для получения более содержательных условий разрешимости задач преследования–уклонения делаются различные дополнительные предположения. В работе [17] была рассмотрена задача преследования группой преследователей группу убегающих при условии, что все убегающие используют одно и то же управление. Были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Задачу преследования, в которой все убегающие используют одно и то же управление в дальнейшем будем называть задачей о преследовании скоординированных убегающих. Развитием данной работы являются, в частности, работы [18, 19], в которых получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление. Достаточные условия поимки двух скоординированных убегающих получены в работе [20]. В работах [21, 22] получены достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх в предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Работа [23] посвящена задаче преследования двух скоординированных убегающих в рекуррентных дифференциальных играх при условии, что целью преследователей является либо поимка одного убегающего двумя преследователями, либо поимка двух убегающих. Задача о многократной поимке заданного числа убегающих в линейных дифференциальных играх при условии, что убегающие используют одно и то же управление рассматривалась в работах [24, 25] на основе сведения исходной задачи к задаче о многократной поимке одного убегающего в некоторой вспомогательной игре.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей двух жестко скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями. Получены достаточные условия поимки. Предложен конструктивный способ построения стратегий преследователей, отличный от способа, изложенного в [24, 25].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 2)$ $n + 2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и два убегающих E_1, E_2.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, x_i, y_j, x_i^0, y_i^0, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, +\infty)$ матричная функция порядка $k \times k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j = 1, 2$. Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Измеримая функция $v \colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$. Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[t_0, t]$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.

Определение 1.2. В игре $\Gamma(n + 2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0]$, найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$ и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$, $j \in \{1, 2\}$.

Определение 1.3 (см. [26]). Функция $f \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которого справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Функция $f \colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega, \quad \Phi(t_0) = E,$$

где E — единичная матрица.

П р е д п о л о ж е н и е 1.1. Будем предполагать, что фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной на $[t_0, +\infty)$ функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, +\infty)$.

§ 2. Вспомогательные результаты

О п р е д е л е н и е 2.1. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Обозначим через $\operatorname{Int} X$, $\operatorname{co} X$, соответственно внутренность, выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Т е о р е м а 2.1 (см. [27]). *Векторы a_1, a_2, ..., a_m образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Л е м м а 2.1 (см. [28]). *Пусть $a_1, \ldots, a_m, b_1, b_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что*

(1) *для всех $l \in J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$ выполнено*

$$\operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co} \{b_1, b_2\} \neq \varnothing;$$

(2) $a_{m-1}, a_m \in \{z \mid z = tb_1 + (1-t)b_2,\ t < 0\}$.

Тогда для любого $q \in J = \{1, \ldots, m\}$ справедливо включение

$$b_2 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J, i \neq q\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \Omega(J) = \{(i_1, i_2) \big| \, i_1, i_2, \in J, i_1 \neq i_2\},$$

где J — конечное множество натуральных чисел.

Л е м м а 2.2 (см. [28]). *Пусть $m \geqslant 4$, $a_1, \ldots, a_{m-2}, c \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для любого $l \in J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$ векторы $\{a_i, i \in J_0, i \neq l, c\}$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Тогда для любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ существует $\hat{\mu} > 0$ такое, что для всех $\mu > \hat{\mu}$ справедливо неравенство*

$$\delta(\mu) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(w_i, v) > 0,$$

где $J = \{1, \ldots, m\}$, $\Omega^0(J) = \Omega(J_0) \cup \{(m-1, m)\}$,

$$w_i = \begin{cases} a_i, \ i \in J_0, \\ b_1 + \mu c, \ i = m-1, \\ b_2 + \mu c, \ i = m. \end{cases}$$

Л е м м а 2.3 (см. [21]). *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$, $J = \{1, \ldots, m\}$ таковы, что*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v) > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ что для любых $b_1, \ldots b_m \in \mathbb{R}^k$, $b_j \in D_\varepsilon(a_j)$, $j \in J$, имеет место следующее неравенство

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(b_j, v) > 0.$$

С л е д с т в и е 2.1 (см. [21]). *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$, $J = \{1, \ldots, m\}$ таковы, что для всех $l \in J$ выполнено включение $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_j, j \in J, j \neq l\}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ что для любых $b_1, \ldots b_m \in \mathbb{R}^k$, $b_j \in D_\varepsilon(a_j)$, $j \in J$, имеет место следующее неравенство*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(b_j, v) > 0.$$

Л е м м а 2.4. *Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что*

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v) > 0,$$

где $\Omega^0(J) = \Omega(J_0) \cup \{m-1, m\}$, $J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$. Тогда существует момент $T_0 > 0$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся $\Lambda = (\alpha, \beta) \in \Omega^0(J)$ и момент $\tau \in [0; T_0]$ такие, что

$$\int_0^\tau \lambda(\Phi(s) a_\alpha, v(s))\, ds \geqslant 1, \quad \int_0^\tau \lambda(\Phi(s) a_\beta, v(s))\, ds \geqslant 1.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.3 [21].

§ 3. Достаточные условия поимки

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n-2$, такое, что для всех $l \in I_0$*

$$\operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co} \{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (3.1) следует [29], что для каждого $l \in I_0$ набор $\{x_i^0 - y_1^0, x_i^0 - y_2^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Обозначим $c = y_1^0 - y_2^0$. Так как

$$x_i^0 - y_2^0 = x_i^0 - y_1^0 + c,$$

то для всех $l \in I_0$ положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}^0, i \in I_0, i \neq l, c\}$. Считаем, что $I_0 = \{1, \ldots, n-2\}$. Из леммы 2.2 следует, что существует число $\mu > 0$ такое, что

$$\delta(\mu) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(I)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(w_i, v) > 0,$$

где $I = \{1, \ldots, n\}$, $\Omega^0(I) = \Omega(I_0) \cup \{(n-1, n)\}$,

$$w_i^0 = \begin{cases} z_{i1}^0, & \text{если } i \in I_0, \\ z_{n-12}^0 + \mu c, & \text{если } i = n-1, \\ z_{n2}^0 + \mu c, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Из леммы 2.4 следует, что число

$$T_0 = \min\{T > t_0 \big| \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega(I)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{T} \lambda(\Phi(s) w_j^0, v(s)) d\, s \geqslant 1\}$$

конечно. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих.

Определим функции

$$F_i(v(\cdot), t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(\Phi(s) w_i^0, v(s))\, ds.$$

Из леммы 2.4 следует, что существуют номера $l, m \in I$ и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что

$$F_l(v(\cdot), \tau_1) = 0, \quad F_m(v(\cdot), \tau_2) = 0. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем считать, что если $F_q(v(\cdot), \tau) = 0$ при некоторых $q \in I$, $\tau \in [t_0, T_0)$, то $\lambda(w_q^0, v(s)) = 0$ для всех $s \in [\tau, T_0]$. Тогда из условия (3.2) получаем, что существуют номера $l, m \in I$, для которых

$$F_l(v(\cdot), T_0) = 0, \quad F_m(v(\cdot), T_0) = 0. \tag{3.3}$$

Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, на отрезке $[t_0, T_0]$, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(\Phi(t) w_i^0, v(t)) \Phi_i(t) w_i^0.$$

Тогда из системы (1.3) следует, что для всех $t \in [t_0, T_0]$

$$\begin{gathered} z_{i1}(t) = \Phi(t) z_{i1}^0 F_i(v(\cdot), t),\ i \in I_0, \\ z_{n-12}(t) = \Phi(t) z_{n-12}^0 F_{n-1}(v(\cdot), t) - \mu \Phi(t) c (1 - F_{n-1}(v(\cdot), t)), \\ z_{n2}(t) = \Phi(t) z_{n2}^0 F_n(v(\cdot), t) - \mu \Phi(t) c (1 - F_n(v(\cdot), t)). \end{gathered}$$

Из условия (3.3) и определения управлений преследователей P_i, $i \in I$, вытекает, что возможны следующие варианты.

1. Существуют $i, m \in I_0$, для которых выполнено условие (3.3). В этом случае преследователи P_l, P_m осуществляют поимку убегающего E_1, что означает, что в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

2. Условие (3.3) выполнено для $l = n - 1$, $m = n$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu \Phi(T_0) c$, $z_{n2}(T_0) = -\mu \Phi(T_0) c$. Отметим, что для всех $i \in I_0$ имеет место $z_{i1}(T_0) = \Phi(T_0) z_{i1}^0 F_i(v(\cdot), T_0)$. Возьмем $\varepsilon > 0$, для которого справедливы лемма 2.2 и следствие 2.1, когда в качестве a_j взяты z_{i1}^0, z_{i2}^0, $i \in I_0$, c. Пусть $T^0 > 0$ такое, что $T^0 > t_0 + T_0$. Так как функция Φ является рекуррентной, то по ε существует $T(\varepsilon)$, что на отрезке $[T^0, T^0 + T(\varepsilon)]$ найдется число $\tau(t_0)$, для которого справедливо неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau(t_0)) - \Phi(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M},$$

где $M = \max\{\|z_{i1}^0\|, \|z_{i2}^0\|, i \in I, \|c\|\}$. Задаем управления преследователей на отрезке $[T_0, T_1]$, где $T_1 = t_0 + \tau(t_0)$, полагая $u_i(t) = v(t)$ для всех $i \in I$. Тогда будем иметь

$$z_{i1}(T_1) = \Phi(T_1) z_{i1}^0 F_i(v(\cdot), T_0), \quad i \in I_0, \tag{3.4}$$

$$z_{n-12}(T_1) = -\mu \Phi(T_1) c, \quad z_{n2}(T_1) = -\mu \Phi(T_1) c. \tag{3.5}$$

Докажем, что для каждого $q \in I_0$ выполнено условие

$$\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_{i1}(T_1),\ i \in I_0 \setminus \{q\}\} \cap \operatorname{co}\{y_1(T_1), y_2(T_1)\} \neq \varnothing. \tag{3.6}$$

Пусть $q \in I_0$. Так как

$$z_{i2}(T_1) = z_{i1}(T_1) + y_1(T_1) - y_2(T_1) = z_{i1}(T_1) + \Phi(T_1)z_{i2}^0 - \Phi(T_1)z_{i1}^0,$$

то из (3.4) следует, что для всех $i \in I_0$ справедливы равенства

$$\Phi(T_1)z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_1)}{F_i(v(\cdot), T_0)},$$
$$\Phi(T_1)z_{i2}^0 = z_{i2}(T_1) + \frac{z_{i1}(T_1)(1 - F_i(v(\cdot), T_0)}{F_i(v(\cdot), T_0)}.$$

В силу выбора T_1 имеем

$$\|\Phi(T_1)z_{ij}^0 - \Phi(t_0)z_{ij}^0\| < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу следствия 2.1 и условия теоремы набор векторов

$$\{\Phi(T_1)z_{i1}^0, \Phi(T_1)z_{i2}^0, i \in I_0 \setminus \{q\}\}$$

образует положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$. Поэтому положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор векторов

$$\{z_{i1}(T_1), z_{i2}(T_1) + \frac{z_{i1}(T_1)(1 - F_i(v(\cdot), T_0)}{F_i(v(\cdot), T_0)}, i \in I_0 \setminus \{q\}\}.$$

Так как $F_i(v(\cdot), T_0) \in (0, 1]$, то положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}(T_1), z_{i2}(T_1), i \in I_0 \setminus \{q\}\}$. Из последнего условия в силу теоремы 2.1 получаем справедливость (3.6).

Из условия (3.5) получаем

$$x_{n-1}(T_1) - y_2(T_1) = -\mu(y_1(T_1) - y_2(T_1)),\ x_n(T_1) - y_2(T_1) = -\mu(y_1(T_1) - y_2(T_1)).$$

Отсюда

$$x_{n-1}(T_1) = -\mu y_1(T_1) + (1 + \mu)y_2(T_1),\ x_n(T_1) = -\mu y_1(T_1) + (1 + \mu)y_2(T_1).$$

Используя лемму 2.1, получаем, что для каждого $l \in I$ справедливо включение

$$y_2(T_1) \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i(T_1), i \in I \setminus \{l\}\}.$$

Принимая момент T_1 за начальный и используя результаты работы [19], получим, что в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит двухкратная поимка. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.1 (см. [28]). *Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$ и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, такое, что для всех $l \in I_0$*

$$\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Действительно, в этом случае предположение 1.1 выполнено автоматически, так как $\Phi(t)$ для всех t есть единичная матрица.

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть $A(t) = A$ для всех $t \geqslant t_0$, причем все собственные числа матрицы A являются простыми и чисто мнимыми, и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, такое, что для всех $l \in I_0$*

$$\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Действительно, в силу [26] матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной.

П р и м е р 3.1 (см. [21]). Определим множество $\mathcal{F} = (0, 2\pi) \cup \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (2\pi n^2, 2\pi n^2 + 2\pi)$. Пусть в системе (1.3) $t_0 = 0$, матрица $A(t) = a(t)E$, где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \mathcal{F}, \\ \sin t, & \text{если } t \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной [21]. Поэтому, если начальные условия таковы, что выполнены условия теоремы 3.1, то в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

П р и м е р 3.2. Пусть в системах (1.1), (1.2) $k = 2$, $n = 6$, $t_0 = 0$, $V = \{v\colon \|v\| \leqslant 1\}$, $A(t) = a(t)E$, функция $a(t)$ из примера 3.1. Начальные условия имеют вид $x_1^0 = (2; 2)$, $x_2^0 = (2; -2)$, $x_3^0 = (-2; 2)$, $x_4^0 = (-2; -2)$, $x_5^0 = (0; 1)$, $x_6^0 = (-10; 1)$, $y_1^0 = (1; 7)$, $y_2^0 = (-1; -7)$. Взяв в качестве множества $I_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, получим, что выполнены условия теоремы 3.1. Следовательно, в игре $\Gamma(6, 2)$ происходит поимка.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что условия теоремы 3.1 не гарантирует даже однократную поимку хотя бы одного убегающего при условии, что каждый убегающий может использовать любое допустимое управление. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 3.3. Пусть в системах (1.1), (1.2) $k = 2$, $n = 6$, $t_0 = 0$, $V = \{v\colon \|v\| \leqslant 1\}$, $A(t) = 0$. Начальные условия имеют вид $x_1^0 = (2; 2)$, $x_2^0 = (2; -2)$, $x_3^0 = (-2; 2)$, $x_4^0 = (-2; -2)$, $x_5^0 = (0; 1)$, $x_6^0 = (0; -1)$, $y_1^0 = (1; 4)$, $y_2^0 = (-1; -4)$. Если убегающий E_1 выберет управление $v_1(t) = (0; 1)$, а убегающий E_2 выберет управление $v_2(t) = (0; -1)$, то они оба уклоняются от встречи.

В то же время выполнены условия теоремы 3.1 и поэтому в игре $\Gamma(6, 2)$ происходит поимка жестко скоординированных убегающих.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS–2024–0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. https://zbmath.org/0298.90067
4. Friedman A. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
5. Hajek O. Pursuit games. An introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion. New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
6. Нарманов А. Я., Щелчков К. А. Задача уклонения в нелинейной дифференциальной игре с дискретным управлением // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 75–85. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments // Systems and Control Letters. 2019. Vol. 125. P. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008

9. Chen Mo, Zhou Zhengyuan, Tomlin C. J. Multiplayer reach-avoid games via pairwise outcomes // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62. Issue 3. P. 1451–1457. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2577619
10. Garcia E., Casbeer D. W., von Moll A., Pachter M. Multiple pursuer multiple evader differential games // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol. 66. Issue 5. P. 2345–2350. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3003840
11. Sun Wei, Tsiotras P., Yezzi A. J. Multiplayer pursuit–evasion games in three-dimensional flow fields // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. Issue 4. P. 1188–1207. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00304-4
12. Zhou Zhengyuan, Ding Jerry, Huang Haomiao, Takei Ryo, Tomlin C. Efficient path planning algorithms in reach-avoid problems // Automatica. 2018. Vol. 89. P. 28–36. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.11.035
13. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
14. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
15. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009.
16. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. Issue 4. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
17. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.
18. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.
19. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37. https://elibrary.ru/item.asp?id=18040387
20. Виноградова М. Н., Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. https://www.mathnet.ru/rus/timm897
21. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 182. Issue 1. P. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
22. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 371–377. https://www.mathnet.ru/rus/semr1508
23. Petrov N. N. On the problem of pursuing two coordinated evaders in linear recurrent differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2023. Vol. 197. Issue 3. P. 1011–1023. https://doi.org/10.1007/s10957-023-02230-3
24. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. Issue 3. P. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
25. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
26. Зубов В. И. К теории рекуррентных функций // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 4. С. 532–560. https://www.mathnet.ru/rus/smj4848
27. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. https://www.mathnet.ru/rus/de328
28. Петров Н. Н. Двукратная поимка скоординированных убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 281–292. https://doi.org/10.35634/vm230207

29. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79. https://elibrary.ru/item.asp?id=14957640

Поступила в редакцию 08.02.2024

Принята к публикации 25.04.2024

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Цитирование: Н. Н. Петров. Двухкратная поимка скоординированных убегающих в рекуррентных дифференциальных играх // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 49–60.

N. N. Petrov

Double capture of coordinated evaders in recurrent differential games

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, recurrent function.

MSC2020: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-04

In finite-dimensional Euclidean space, a problem of pursuit of two evaders by a group of pursuers, which is described by a linear nonstationary system of differential equations, is considered under the assumption that the fundamental matrix of the homogeneous system is a recurrent function. It is assumed that the evaders use the same control. The pursuers use counterstrategies based on information about the initial positions and the prehistory of the control of the evaders. The set of admissible controls is a strictly convex compact with a smooth boundary, and the goal sets are the origin of coordinates. The goal of the group of pursuers is to catch at least one evader by two pursuers. In terms of initial positions and parameters of the game, a sufficient condition for capture is obtained. This study is based on the method of resolving functions, which makes it possible to obtain sufficient conditions for solvability of the problem of pursuit in some guaranteed time.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment, project FEWS–2024–0009.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L. S. *Selected scientific works. Vol. 2*, Moscow: Nauka, 1988.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://zbmath.org/0649.90101
4. Friedman A. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
5. Hajek O. *Pursuit games. An introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion*, New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
6. Narmanov A. Ya., Shchelchkov K. A. The evasion problem in a nonlinear differential game with discrete control, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 75–85 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments, *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 125, pp. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
9. Chen Mo, Zhou Zhengyuan, Tomlin C. J. Multiplayer reach-avoid games via pairwise outcomes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, issue 3, pp. 1451–1457. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2577619
10. Garcia E., Casbeer D. W., von Moll A., Pachter M. Multiple pursuer multiple evader differential games, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, vol. 66, issue 5, pp. 2345–2350. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3003840
11. Sun Wei, Tsiotras P., Yezzi A. J. Multiplayer pursuit–evasion games in three-dimensional flow fields, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 4, pp. 1188–1207. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00304-4
12. Zhou Zhengyuan, Ding Jerry, Huang Haomiao, Takei Ryo, Tomlin C. Efficient path planning algorithms in reach-avoid problems, *Automatica*, vol. 89, pp. 28–36. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.11.035

13. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
14. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990 (in Russian).
15. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
16. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 4, pp. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
17. Satimov N., Mamatov M. S. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between the group of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk Uzbekskoi SSR*, 1983, vol. 4, pp. 3–6 (in Russian).
18. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
19. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
20. Vinogradova M. N., Petrov N. N., Solov'eva N. A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timm897
21. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, issue 1, pp. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
22. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 371–377. https://www.mathnet.ru/eng/semr1508
23. Petrov N. N. On the problem of pursuing two coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2023, vol. 197, issue 3, pp. 1011–1023. https://doi.org/10.1007/s10957-023-02230-3
24. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 3, pp. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
25. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160104
26. Zubov V. I. On the theory of recurrent functions, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1962, vol. 3, no. 4, pp. 532–560 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/smj4848
27. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de328
28. Petrov N. N. Two-time capture of coordinated evaders in a simple pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 281–292 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230207
29. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of the pursuit of a group rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, issue 5, pp. 749–753. https://zbmath.org/1078.49507

Received 08.02.2024

Accepted 25.04.2024

Nikolai Nikandrovich Petrov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Citation: N. N. Petrov. Double capture of coordinated evaders in recurrent differential games, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 63, pp. 49–60.