Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2024. Том 63. С. 80–90

УДК 517.957

© *Г. У. Уразбоев, М. М. Хасанов, О. Б. Исмоилов*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

В данной работе показано, что модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ) отрицательного порядка с интегральным источником может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Основной результат работы состоит в выводе эволюции спектральных данных системы Дирака с периодическим потенциалом, связанным с решением модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка, система Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина–Трубовица, формулы следов.

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-06

Введение

Нелинейные уравнения, допускающие солитонные решения, играют важную роль в теории интегрируемых систем. Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющим широкое прикладное значение, является модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ)

$$q_t \pm 6q^2 u_x + q_{xxx} = 0.$$

Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые была установлена в работе М. Вадати (см. [1]).

Определение периодических решений интегрируемых уравнений играют важную роль в теории дисперсионных ударных волн и других их приложениях к физике. Исследованию уравнения мКдФ в классе периодических и конечнозонных функций посвящены работы [2, 3].

В. К. Мельников [4] применил метод обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения КдФ с самосогласованным источником, которое описывает процесс передачи энергии от лазерного луча к ионно-звуковой волне [5].

В работе [6] с помощью метода обратной задачи было проинтегрировано уравнение мКдФ положительного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В последнее время нелинейные уравнения отрицательного порядка стали важной частью области интегрируемых систем и некоторых соответствующих разделов физических явлений. Некоторыми примерами этих уравнений являются уравнение КдФ отрицательного порядка и мКдФ отрицательного порядка [7, 8]. Эти уравнения были получены с использованием оператора рекурсии уравнений КдФ и мКдФ. Изучению отрицательно-четных иерархий мКдФ и ее солитонных решений посвящены работы [9–11]. В работе [12] методом обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих функций. Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником и свободным членом в классе периодических функций изучено в работах [13–15].

Уравнение мКдФ отрицательного порядка в классе периодических функций было решено в работе [16].

Данная работа посвящена изучению уравнения мКдФ отрицательного порядка с интегральным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение мКдФ отрицательного порядка с интегральным источником

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)\,d\lambda, \\ \mu_x = -q^2, \end{cases} \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{0.1}$$

с условиями

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)\big|_{x=0} = \mu_0(t), \tag{0.2}$$

где $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\mu_0(t) \in C^1[0,\infty)$ — заданные действительные функции, причем $q_0(x)$ имеет период π. Предполагается, что действительные функции $q(x,t)$ и $\mu(x,t)$ удовлетворяют условиям периодичности

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R},$$
$$\mu_t(x+\pi,t) \equiv \mu_t(x,t), \quad t \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R},$$

и условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q(x,t) &\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0), \\ \mu(x,t) &\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0). \end{aligned} \tag{0.3}$$

В рассматриваемой задаче $\gamma(\lambda,t) \in C([0,\infty)\times[0,\infty))$ — заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\gamma(\lambda,t) = \underline{O}\big(1/\lambda^4\big)$ при $\lambda\to\infty$, $\psi^\pm =$ $= (\psi_1^\pm(x,\lambda,t), \psi_2^\pm(x,\lambda,t))^T$ — решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^\pm(0,\lambda,t)=1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{0.4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (0.4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$.

В данной работе будет предложен алгоритм построения решения

$$\big(q(x,t), \mu(x,t), \psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t), s_1(\pi,\lambda,t)\big)$$

задачи (0.1)–(0.3) в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (0.4).

З а м е ч а н и е 1. Условие периодичности

$$\mu_t(x+\pi,t) - \mu_t(x,t) = 0,$$

в силу π-периодичности по переменной x функции $q(x,t)$ и равенства

$$\mu(x,t) = \mu_0(t) - \int_0^x q^2(s,t)\,ds,$$

примет вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi q^2(s,t)\,ds = 0,$$

то есть рассматриваемая система обладает тем же интегральным инвариантом, что и классическое уравнение мКдФ. Можно показать, что и остальные инварианты классического уравнения мКдФ являются инвариантами рассматриваемой задачи.

§ 1. Необходимые сведения об операторе Дирака с периодическим потенциалом на всей прямой

В этом параграфе приведем известные основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для линейной системы Дирака с периодическим коэффициентом [17–20]

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция.

Для рассматриваемого оператора функция Ляпунова имеет вид $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$, где $c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) \\ c_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ и $s(x,\lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x,\lambda) \\ s_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ — решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $s(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Уравнение (1.1) имеет два линейно независимых решения, которые имеют вид:

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

Эти решения принято называть решениями Флоке.

Спектр оператора (1.1) состоит из следующего множества

$$\mathbb{E} = \{\lambda \in \mathbb{R}\colon -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, называются лакунами уравнения (1.1). Легко видеть, что концы лакун являются собственными значениями либо периодической $y_1(0) = y_1(\pi)$, $y_2(0) = y_2(\pi)$, либо антипериодической $y_1(0) = -y_1(\pi)$, $y_2(0) = -y_2(\pi)$ граничной задачи для уравнения Дирака (1.1), и состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$. Нули ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, функции $s(\pi,\lambda)$ являются собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ на отрезке $[0,\pi]$ для системы (1.1), $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Последовательность собственных значений $\left\{\xi_n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}$, задачи Дирихле и знаки $\sigma_n = \operatorname{sign}\left\{ s_2(\pi,\xi_n) - \dfrac{1}{s_2(\pi,\xi_n)} \right\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными параметрами задачи (1.1). Последовательность чисел $\ldots \leqslant \lambda_{-2} < \lambda_{-1} \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \ldots$ и спектральные параметры $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = \operatorname{sign}\left\{ s_2(\pi,\xi_n) - \dfrac{1}{s_2(\pi,\xi_n)} \right\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными данными уравнения (1.1).

Обратная спектральная задача состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ по спектральным данным задачи (1.1).

Если в задаче (1.1) $q(x)$ заменить на $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, зависят от параметра τ как решения системы уравнений Дубровина–Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau) h_n(\xi)\xi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}},$$

причем знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина–Трубовица, и первая формула следов

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))$$

позволяют решить обратную спектральную задачу.

Простыми вычислениями можно проверить следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Если вектор-функция* $(y_1, y_2)^T$ *является решением системы* (1.1)*, то выполняются следующие тождества:*

$$2y_2y_1 = \frac{1}{2\lambda}[y_2^2 - y_1^2]' + \frac{1}{\lambda}q(y_1^2 + y_2^2), \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{2}[y_2^2 + y_1^2]' = q(y_1^2 - y_2^2). \tag{1.3}$$

§ 2. Эволюция спектральных параметров

Прежде всего, покажем равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (0.1). Для этого воспользуемся тождеством

$$s_1(\pi,\lambda,t)\big[\psi_1^+(\tau,\lambda,t)\psi_2^-(\tau,\lambda,t) + \psi_1^-(\tau,\lambda,t)\psi_2^+(\tau,\lambda,t)\big] = s_2(\pi,\lambda,t,\tau) - c_1(\pi,\lambda,t,\tau), \tag{2.1}$$

где $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ — решения системы Дирака с коэффициентами $q(x+\tau,t)$, удовлетворяющие начальным условиям $c_1(0,\lambda,t,\tau) = 1$, $c_2(0,\lambda,t,\tau) = 0$ и $s_1(0,\lambda,t,\tau) = 0$, $s_2(0,\lambda,t,\tau) = 1$. Из асимптотических формул для решений $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ следует оценка

$$s_2(\pi,\lambda,t,\tau) - c_1(\pi,\lambda,t,\tau) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } \lambda \to \pm\infty,$$

которая вместе с равенством (2.1) обеспечивают равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (0.1).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть набор* $\big(q(x,t), \mu(x,t), \psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t)\big)$ *является решением задачи* (0.1)–(0.3)*. Тогда спектр оператора* (0.4) *не зависит от параметра* t*, а спектральные параметры* $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$*, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина–Трубовица:*

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\left\{q_t(0,t) - \mu_t(0,t) - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2 - \lambda^2}\,d\lambda\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{2.2}$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, — спектральные параметры системы Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n(x,t) = (y_{n,1}(x,t), y_{n,2}(x,t))^T$, $n \in \mathbb{Z}$, ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле для уравнения (0.4), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Дифференцируя по t равенство $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$ и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= (\dot{\Omega}(x,t)y_n + L(t)\dot{y}_n) + (L(t)y_n, y_n)\\ &= (\dot{\Omega}(x,t)y_n, y_n) + (\dot{y}_n, L(t)y_n) + (L(t)y_n, \dot{y}_n)\\ &= (\dot{\Omega}(x,t)y_n, y_n) + \xi_n(t)\frac{\partial(y_n, y_n)}{\partial t}\\ &= (\dot{\Omega}(x,t)y_n, y_n).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z) = \int_0^\pi \big[y_1(x)\bar{z}_1(x) + y_2(x)\bar{z}_2(x)\big]\,dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

равенство (2.3) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n(t) = 2\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_t\,dx.$$

Используя формулу (1.2), получим следующее равенство

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)' q_t\,dx + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) q q_t\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{2.4}$$

Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде:

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n}\big[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)\big]q_t(0,t) - \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q_{xt}\,dx + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)qq_t\,dx.$$

Из системы уравнения (0.1) имеем

$$qq_t = -\frac{\mu_{xt}}{2}, \quad q_{xt} = -2q\mu_t + \int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)\,d\lambda.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n}\big[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)\big]q_t(0,t) + \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q\mu_t\,dx -\\ -\frac{1}{2\xi_n}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)\left(\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)\,dx\right)d\lambda -\\ -\frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)\mu_{xt}\,dx.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл в равенстве (2.5):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)\left(\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)\,dx\right)d\lambda. \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)\left(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-\right)dx =$$

$$= -\int\limits_0^\pi \left(y_{n,1}^2\psi_1^+\psi_2^- - y_{n,2}^2\psi_2^+\psi_1^- + y_{n,1}^2\psi_2^+\psi_1^- - y_{n,2}^2\psi_1^+\psi_2^-\right)dx =$$

$$\begin{gathered}= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big\{(y_{n,1}\psi_1^+ - y_{n,2}\psi_2^+)(y_{n,1}\psi_2^- + y_{n,2}\psi_1^-) + (y_{n,1}\psi_1^+ + y_{n,2}\psi_2^+)(y_{n,1}\psi_2^- - y_{n,2}\psi_1^-) +\\ + (y_{n,1}\psi_2^+ - y_{n,2}\psi_1^+)(y_{n,1}\psi_1^- + y_{n,2}\psi_2^-) + (y_{n,1}\psi_2^+ + y_{n,2}\psi_1^+)(y_{n,1}\psi_1^- - y_{n,2}\psi_2^-)\big\}\,dx.\end{gathered}$$

Пользуясь тождествами

$$y_{n,1}\psi_1^+ - y_{n,2}\psi_2^+ = \frac{1}{\lambda+\xi_n}(y_{n,1}\psi_2^+ + y_{n,2}\psi_1^+)', \quad y_{n,1}\psi_1^- - y_{n,2}\psi_2^- = \frac{1}{\lambda+\xi_n}(y_{n,1}\psi_2^+ + y_{n,2}\psi_1^+)',$$
$$y_{n,1}\psi_1^+ + y_{n,2}\psi_2^+ = \frac{1}{\lambda-\xi_n}(y_{n,1}\psi_2^+ - y_{n,2}\psi_1^+)', \quad y_{n,1}\psi_1^- + y_{n,2}\psi_2^- = \frac{1}{\lambda-\xi_n}(y_{n,1}\psi_2^- - y_{n,2}\psi_1^-)',$$

получим

$$\int\limits_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)\,dx = \frac{\lambda}{\xi_n^2-\lambda^2}\cdot\big[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)\big].$$

Подставляя это выражение в (2.6) выводим, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)\left(\frac{\lambda}{\xi_n^2-\lambda^2}\cdot\big[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)\big]\right)d\lambda = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2-\lambda^2}\,d\lambda\right)\cdot\big[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)\big]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Интегрируем по частям последний интеграл

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)\mu_{xt}\,dx = \\ &= -\frac{1}{2\xi_n}\big[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)\big]\mu_t(0,t) + \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2+y_{n,1}^2)'\mu_t\,dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

На основании (1.3) равенство (2.8) примет вид

$$I_2 = -\frac{1}{2\xi_n}\big[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)\big]\mu_t(0,t) - \frac{1}{\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q\mu_t\,dx. \tag{2.9}$$

Из (2.5), (2.7) и (2.9) выводим, что

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) &= \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)]\cdot \\ &\cdot\left(q_t(0,t)-\mu_t(0,t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2-\lambda^2}\,d\lambda\right), \quad n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Используя (2.10) и равенство [6]

$$y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi),$$

получим (2.2).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi) = y(0)$ или антипериодическими $y(\pi) = -y(0)$ граничными условиями, то вместо уравнения (2.10) имеем $\dot{\lambda}_n = 0$. Значит, собственные значения λ_n, $n\in\mathbb{Z}$, периодической и антипериодической задачи не зависят от параметра t. □

С л е д с т в и е 2.1. *Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ, t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ, t: $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n\in\mathbb{Z}$. В этом случае система* (2.2) *примет вид*

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = \frac{(-1)^n}{\xi_n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\cdot\left(q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\gamma(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n^2-\lambda^2}\,d\lambda\right), \quad n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{2.11}$$

Здесь

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},\ \text{где}\ \ a_0=1\ \ \text{и}\ \ a_k=k\ \ \text{при}\ \ k\neq 0.$$

Используя формулу следов

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)$$

и равенство $\mu_x=-q^2$, получим, что

$$\begin{aligned} q_t(\tau,t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t},\\ \mu(\tau,t)&=\mu_0(t)-\int_0^{\tau}q^2(s,t)\,ds,\\ \mu_t(\tau,t)&=\mu_0'(t)-2\int_0^{\tau}q(s,t)q_t(s,t)\,ds. \end{aligned}\tag{2.12}$$

С л е д с т в и е 2.2. *Теорема* 2.1 *дает метод решения задачи* (0.1)–(0.3). *Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Далее, решаем задачу Коши*

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\quad n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

для системы уравнений Дубровина (2.11). *После этого по формуле следов*

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}$$

определяем $q(x,t)$, и затем из формулы (2.12) *определяем $\mu(x,t)$. После этого нетрудно найти решения $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$, $s_1(x,\lambda,t)$.*

Заключение

На основе полученных результатов решение модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ) отрицательного порядка с интегральным источником может быть получено методом обратной спектральной задачи для системы уравнений Дирака. Основным отличительным моментом от результатов, полученных для уравнения КдФ положительного порядка с самосогласованным источником, является существенное отличие в основном уравнении Дубровина–Трубовица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // Journal of the Physical Society of Japan. 1972. Vol. 32. No. 6. P. 1681. https://doi.org/10.1143/JPSJ.32.1681
2. Итс А. Р. Точное интегрирование в римановых θ-функциях нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза: дис. … канд. физ.-матем. наук / ЛГУ. Л., 1977.
3. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114. https://www.mathnet.ru/rus/sm920

4. Mel'nikov V. K. Exact solutions of the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source // Physics Letters A. 1988. Vol. 128. Issue 9. P. 488–492. https://doi.org/10.1016/0375-9601(88)90881-X
5. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1990. Vol. 23. No. 8. P. 1385–1403. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/8/013
6. Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 536–543. https://doi.org/10.1134/S0374064114040116
7. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV and negative-order KP equations: multiple soliton solutions // Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences. 2017. Vol. 87. Issue 2. P. 291–296. https://doi.org/10.1007/s40010-017-0349-6
8. Wazwaz A.-M., Xu Gui-Qiong. Negative-order mKdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. Vol. 39. Issue 4. P. 661–667. https://doi.org/10.1002/mma.3507
9. Gomes J. F., França G. S., de Melo G. R., Zimerman A. H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. No. 44. 445204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/44/445204
10. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. No. 11. 115213. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/11/115213
11. Gomes J. F., de Melo G. R., Zimerman A. H. A class of mixed integrable models // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. No. 27. 275208. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275208
12. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 523–533. https://doi.org/10.35634/vm230309
13. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239. https://doi.org/10.35634/vm220205
14. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Балтаева И. И. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2023. Т. 44. С. 31–43. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31
15. Хасанов М. М., Рахимов И. Д. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 2 (88). С. 266–275. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54783378
16. Уразбоев Г. У., Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. 2023. Т. 217. № 2. С. 317–328. https://doi.org/10.4213/tmf10580
17. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1978. Т. 30. № 2. С. 90–101. https://zbmath.org/0441.34020
18. Джаков П. Б., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи математических наук. 2006. Т. 61. Вып. 4 (370). С. 77–182. https://doi.org/10.4213/rm2121
19. Currie S., Roth T. T., Watson B. A. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2017. Vol. 60. Issue 3. P. 615–633. https://doi.org/10.1017/S0013091516000389
20. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. https://zbmath.org/0657.34002

Поступила в редакцию 15.04.2024

Принята к публикации 10.05.2024

Уразбоев Гайрат Урозалиевич, д. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики и математической физики, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Олимжона, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Хасанов Музаффар Машарипович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики и математической физики, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Олимжона, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2347-1484
E-mail: hmuzaffar@mail.ru

Исмоилов Охунжон Бахрам угли, младший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Хорезмское отделение, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Олимжона, 14.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2742-9974
E-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Цитирование: Г. У. Уразбоев, М. М. Хасанов, О. Б. Исмоилов. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 80–90.

G. U. Urazboev, M. M. Khasanov, O. B. Ismoilov

Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source

Keywords: modified Korteweg–de Vries equation of negative order, Dirac system, inverse spectral problem, Dubrovin–Trubowitz system of equations, trace formulas.

MSC2020: 35P25, 35P30, 35Q51, 35Q53, 37K15

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-06

In this paper, it is shown that the modified Korteweg–de Vries (mKdV) equation of negative order with an integral source can be integrated by the method of the inverse spectral problem. The main result of this work is the derivation of the evolution of the spectral data of the Dirac system with a periodic potential associated with the solution of the negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. The obtained results allow us to apply the inverse problem method to solve the negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source.

REFERENCES

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, vol. 32, no. 6, p. 1681. https://doi.org/10.1143/JPSJ.32.1681
2. Its A. R. *Exact integration in Riemannian θ-functions of the nonlinear Schrödinger equation and the modified Korteweg–de Vries equation*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Leningrad, 1977. (In Russian).
3. Smirnov A. O. Elliptic solutions of the nonlinear Schrödinger equation and the modified Korteweg–de Vries equation, *Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, 1995, vol. 82, issue 2, pp. 461–470. https://doi.org/10.1070/SM1995V082N02ABEH003575
4. Mel'nikov V. K. Exact solutions of the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source, *Physics Letters A*, 1988, vol. 128, issue 9, pp. 488–492. https://doi.org/10.1016/0375-9601(88)90881-X
5. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1990, vol. 23, no. 8, pp. 1385–1403. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/8/013
6. Yakhshimuratov A. B., Khasanov M. M. Integration of the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 4, pp. 533–540. https://doi.org/10.1134/S0012266114040119
7. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV and negative-order KP equations: multiple soliton solutions, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 2017, vol. 87, issue 2, pp. 291–296. https://doi.org/10.1007/s40010-017-0349-6
8. Wazwaz A.-M., Xu Gui-Qiong. Negative-order mKdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, vol. 39, issue 4, pp. 661–667. https://doi.org/10.1002/mma.3507
9. Gomes J. F., França G. S., de Melo G. R., Zimerman A. H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 44, 445204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/44/445204
10. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 11, 115213. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/11/115213
11. Gomes J. F., de Melo G. R., Zimerman A. H. A class of mixed integrable models, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 27, 275208. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275208

12. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Ismoilov O. B. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 523–533 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230309
13. Urazboev G. U., Hasanov M. M. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 228–239 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220205
14. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Baltaeva I. I. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a special source, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 44, pp. 31–43 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31
15. Khasanov M. M., Rakhimov I. D. Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions, *Chebyshevskii Sbornik*, 2023, vol. 24, no. 2 (88), pp. 266–275. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54783378
16. Urazboev G. U., Yakhshimuratov A. B., Khasanov M. M. Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2023, vol. 217, issue 2, pp. 1689–1699. https://doi.org/10.1134/S0040577923110053
17. Misyura T. V. Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator. I, *Teoriya Funktsii, Funktsional'nyi Analiz i ikh Prilozheniya*, 1978, vol. 30, no. 2, pp. 90–101. https://zbmath.org/0441.34020
18. Djakov P. B., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators, *Russian Mathematical Surveys*, 2006, vol. 61, issue 4, pp. 663–766. https://doi.org/10.1070/RM2006v061n04ABEH004343
19. Currie S., Roth T. T., Watson B. A. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 2017, vol. 60, issue 3, pp. 615–633. https://doi.org/10.1017/S0013091516000389
20. Levitan B. M., Sargsjan I. S. *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Dordrecht: Springer, 1991. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3748-5

Received 15.04.2024

Accepted 10.05.2024

Gayrat Urazalievich Urazboev, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Muzaffar Masharipovich Khasanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2347-1484
E-mail: hmuzaffar@mail.ru

Okhunjon Bahram ugli Ismoilov, Junior Researcher, Department of Differential Equations, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Khorezm branch, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2742-9974
E-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Citation: G. U. Urazboev, M. M. Khasanov, O. B. Ismoilov. Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 63, pp. 80–90.