Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2024. Том 63. С. 91–113

УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский*

# К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ГИБРИДНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО СОСТОЯНИЮ

Для линейных автономных систем нейтрального типа предложен подход к задачам проектирования управления в виде обратной связи на базе нового класса гибридных регуляторов. В структуру гибридных регуляторов в обязательном порядке включается разностное уравнение, поэтому замкнутая система становится дифференциально-алгебраической. Отличительной чертой гибридных регуляторов является существование элементарных преобразований уравнений замкнутой системы, позволяющих получить независимую подсистему нейтрального типа. При этом указанная подсистема нейтрального типа однозначно определяет поведение решения $x(t)$ исходной разомкнутой системы (возможно, как векторной компоненты вектора-решения замкнутой системы). К основным достоинствам использования гибридных регуляторов следует отнести возможность их применения к системам, не удовлетворяющим «традиционным» свойствам управляемости. Изучены свойства гибридных регуляторов. Приведен пример применения этих регуляторов для решения новой задачи управления коэффициентами характеристического квазиполинома в случае, когда известные в литературе подходы не применимы. Продемонстрирована возможность использования гибридных регуляторов для решения задачи 0-управляемости при помощи метода финитного управления.

*Ключевые слова*: система нейтрального типа, гибридный регулятор, обратная связь, свойства, модальная управляемость, метод финитного управления.

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-07

## Введение

Проблемам устойчивости и стабилизации для систем с последействием, а также другим вопросам, связанным с задачами проектирования регуляторов, посвящено достаточно много исследований [1–9] (см. также Введение в монографиях [10, 11]). В настоящей статье предлагается новый тип регуляторов, использование которых позволяет управлять объектом при помощи обратной связи в случае отсутствия у него «традиционных» свойств управляемости.

Как правило, свойство управляемости (в том или ином смысле) является структурным свойством, то есть инвариантным относительно невырожденных преобразований в пространстве состояний и преобразований типа обратных связей [12, с. 15]. Следовательно, задачу управления «неуправляемым» объектом можно решить только в том случае, если ослабить цель управления. Разработанный тип гибридных регуляторов позволяет достаточно естественно это сделать, а вопрос построения управляющего воздействия свести к использованию известных методов. Поясним сказанное на примере задачи модального управления [10, 11, 13–17], которая занимает одно из центральных мест в теории управления. Попутно введем ряд обозначений, используемых далее в работе.

Для определенности рассмотрим статью [16], в которой используются два типа регуляторов: постоянной и переменной структур. В качестве объекта исследования выступает линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} \big(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)\big), \quad t > 0,$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $x$ — вектор решения, $u$ — вектор управления, $h = \text{const} > 0$. Пусть $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ — единичная матрица, $0_{i\times j} \in \mathbb{R}^{i\times j}$ — нулевая матрица, $\lambda_h$ — оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h^k f(t) = f(t-kh)$, $k = 0, 1, \ldots$ (для произвольной функции $f$). Определим полиномиальные матрицы $D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$ и перепишем исходную систему в операторном виде

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0. \tag{0.1}$$

Для описания регуляторов введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{PC}^{(\delta)}\big(\mathbb{R}^n\big)$ — множество кусочно-непрерывных функций $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, имеющих кусочно-непрерывные производные до порядка $\delta$ включительно. Определим множество $\mathbf{O}_\delta^{r\times n}$, состоящее из операторов $\mathcal{R}\colon \mathbf{PC}^{(\delta)}\big(\mathbb{R}^n\big) \to \mathbf{PC}^{(\delta)}\big(\mathbb{R}^r\big)$, для которых существуют $R_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $i = \overline{0,\delta}$ ($\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ — множество полиномиальных матриц размера $r \times n$), кусочно-непрерывная матричная функция $\widehat{R}(s)$ размера $r \times n$, представляющая собой на множествах непрерывности конечные суммы слагаемых вида

$$e^{\beta_1 s}\big(\widehat{R}_1(s)\sin(\beta_2 s) + \widehat{R}_2(s)\cos(\beta_2 s)\big), \quad \widehat{R}_1(s), \widehat{R}_2(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s], \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

и число $h_{\mathcal{R}}$ (считаем, что число $h_{\mathcal{R}}$, зависящее от оператора $\mathcal{R}$, кратно $h$) такие, что

$$\mathcal{R}\colon \varphi(t) \to R_1(\lambda_h)\varphi(t) + \sum_{i=1}^{\delta} R_i(\lambda_h)\varphi^{(i)}(t-h) + \int_0^{h_{\mathcal{R}}} \widehat{R}(s)\varphi(t-s)\,ds. \tag{0.2}$$

Функцию, получаемую в результате действия оператора $\mathcal{R}$, будем обозначать $\mathcal{R}[\varphi_t]$,

$$\mathcal{R}[\varphi_t] = R_1(\lambda_h)\varphi(t) + \sum_{i=1}^{\delta} R_i(\lambda_h)\varphi^{(i)}(t-h) + \int_0^{h_{\mathcal{R}}} \widehat{R}(s)\varphi(t-s)\,ds. \tag{0.3}$$

Оператору (0.2) (функции (0.3)) поставим в соответствие матрицу

$$R(p) = R_1(e^{-ph}) + e^{-ph}\sum_{i=1}^{\delta} p^i R_i(e^{-ph}) + \int_0^{h_{\mathcal{R}}} \widehat{R}(s)e^{-ps}ds. \tag{0.4}$$

Операцию, которая каждой функции (0.3) (оператору $\mathcal{R}$) ставит в соответствие матрицу (0.4), обозначим $\sigma$, при этом будем писать $\mathcal{R} \overset{\sigma}{\mapsto} R(p)$.

Пусть $W(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (0.1), $W(p,\lambda) = p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda)$, $\big|W(p, e^{-ph})\big|$ — характеристический квазиполином разомкнутой ($u \equiv 0$) системы (0.1), $\big|W(p, e^{-ph})\big| = \sum_{i=0}^{n} p^i g_i(e^{-ph})$, где $g_i(\lambda)$ — полиномы, $g_n(0) = 1$.

Традиционный подход к задаче управления спектром предполагает использование регуляторов вида

$$u(t) = \mathcal{W}_0\big[X_t\big], \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{W}_1\big[X_t\big], \quad t > 0, \tag{0.5}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вспомогательная переменная, $X = \operatorname{col}[x, x_1]$, $\mathcal{W}_0 \in \mathbf{O}_\delta^{r\times(n+n_1)}$, $\mathcal{W}_1 \in \mathbf{O}_\delta^{n_1\times(n+n_1)}$. Через $W_0(p)$ будем обозначать характеристическую матрицу системы (0.1), замкнутой регулятором (0.5).

В работе [16] используются два класса регуляторов: класс регуляторов вида (0.5) при $\delta = 1$ (постоянной структуры) и класс регуляторов переменной структуры, который впервые был предложен в [15]. В работе [16] этот класс описывается уравнениями

$$u(t) = T\psi(t) + \mathcal{W}_0[X_t], \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{W}_1[X_t], \quad \psi(t) = S\psi(t-h) + \mathcal{W}_2[X_t], \quad t > 0, \tag{0.6}$$

где $\psi \in \mathbb{R}^{r_1}$ — вспомогательная переменная, $T \in \mathbb{R}^{r\times r_1}$, $\mathcal{W}_2 \in \mathbf{O}_1^{r_1\times(n+n_1)}$, остальные обозначения те же, что и в (0.5) ($\delta = 1$).

Для того, чтобы акцентировать внимание на отличительной черте регулятора (0.6), определим понятие решения замкнутой системы (0.1), (0.6). При любой заданной кусочно-непрерывной функции $\psi(t) = \psi_0(t)$, $t \in [-h, 0]$, на каждом полуинтервале $(kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, \ldots$, функция $\psi(t)$ выражается через величины $X(\tau)$, $\dot{X}(\tau - h)$, $\tau \leqslant t$, и $S^{k+1}\psi_0\big(t-(k+1)h\big)$, согласно разностному (третьему по счету) уравнению в (0.6). После ее подстановки в первое уравнение в (0.6), получаем функцию $u(t)$, $t \in (kh, (k+1)h]$, зависящую от $X(\tau)$, $\dot{X}(\tau-h)$, $\tau \leqslant t$, и $S^{k+1}\psi_0\big(t-(k+1)h\big)$, которая в совокупности со вторым уравнением в (0.6) на полуинтервале $(kh, (k+1)h]$ определяет регулятор вида (0.5). Замыкая им систему (0.1) на полуинтервале $(kh, (k+1)h]$, $k = m, m+1, \ldots$, получим линейную неоднородную дифференциально систему нейтрального типа с неоднородной частью $B(\lambda_h)TS^{k+1}\psi_0\big(t-(k+1)h\big)$. На следующем полуинтервале описанный процесс повторяется. Определенную таким образом дифференциальную систему будем называть системой (0.1), замкнутой регулятором (0.6), а под ее решением будем понимать функцию $X$. Из сказанного также следует, что на каждом полуинтервале $(kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, \ldots$, регулятор (0.6) меняет свою структуру как функция состояния. Соответственно на этих же полуинтервалах может менять свою структуру и замкнутая система (0.1), (0.6). В работе [16] показано, что существуют регуляторы вида (0.6) такие, что при $t > t_0$ ($t_0 > 0$ — некоторое число) замкнутая система (0.1), (0.6) не меняет свою структуру и является линейной однородной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа, не зависящей от функции $\psi$, какова бы ни была функция $\psi_0$. Соответственно характеристическая матрица такой системы при $t > t_0$ также является постоянной. Пусть $W_1(p)$ — характеристическая матрица замкнутой системы (0.1), (0.6) при $t > t_0$. Существование регуляторов (0.6), при которых система (0.1), (0.6) при $t > t_0$ имеет постоянную структуру, соответствующую матрице $W_1(p)$, позволяет ввести [15, 16] свойства модальной управляемости в классах регуляторов постоянной и переменной структур.

Определение 0.1. Систему (0.1) назовем *модально управляемой в классе регуляторов постоянной структуры* (*переменной структуры*), если найдется фиксированное число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого наперед заданного полинома $d(p, \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n^*} p^i \widetilde{d}_i(\lambda)$, где $\widetilde{d}_i(\lambda)$ — полиномы, $\widetilde{d}_{n^*}(0) = 1$, $n^* \geqslant n_0$, существует регулятор (0.5) (число $t_0$ и регулятор (0.6)) такой (такие), что система (0.1), (0.5) (система (0.1), (0.6) при $t > t_0$) является линейной автономной системой нейтрального типа с характеристической матрицей $W_0(p)$ $\big(W_1(p)\big)$ и $\big|W_0(p)\big| = d(p, e^{-ph})$ $\Big(\big|W_1(p)\big| = d(p, e^{-ph})\Big)$.

Замечание 1. Под системой нейтрального типа понимаем систему, у которой характеристический квазиполином имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{n_0} p^i \widetilde{g}(e^{-ph}) + \widehat{g}(p, e^{-ph})$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — порядок замкнутой системы, $\widetilde{g}(\lambda)$ — полиномы, причем $\widetilde{g}(0) = 1$, $\widehat{g}(p, \lambda)$ — дробно-рациональная функция, правильная по переменной $p$. При этом обыкновенные системы и системы запаздывающего типа рассматриваем как частные случаи системы нейтрального типа.

В работах [15–17] показано, что существует некоторая матрица $G(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_0}[\lambda]$ такая, что система (0.1) модально управляема в классе регуляторов переменной структуры тогда и только тогда, когда система

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)v_1(t) + G(\lambda_h)v_2(t), \quad t > 0, \tag{0.7}$$

где $\operatorname{col}[v_1(t), v_2(t)]$ — управление, модально управляема в классе регуляторов постоянной структуры. Таким образом, замена классического свойства модальной управляемости на свойство модальной управляемости в классе регуляторов (0.6) позволяет расширить множество модально управляемых систем, а вопрос построения регулятора (0.6) свести к вопросу построения классического регулятора вида (0.5), но для системы (0.7).

Дальнейшее использование регуляторов переменной структуры позволило расширить множество систем, для которых разрешимы задачи успокоения решения (финитной стабилизации) [18] и спектральной приводимости [19]. Позже было замечено, что свойство систем, замкнутых регуляторами переменной структуры, сохранять характеристическую матрицу при $t > t_0$ постоянной, отвечающей линейной автономной системе нейтрального типа, можно описать в терминах элементарных преобразований уравнений некоторой дифференциально-алгебраической системы с запаздыванием [10, с. 262]. Это обстоятельство мотивировало к построению алгебраического подхода реализации регуляторов переменной структуры. При этом новая точка зрения сделала использование термина «регулятор переменной структуры» не совсем уместным, и он был заменен термином [10, с. 262] «регулятор гибридной структуры» (или «гибридный регулятор»). В настоящей статье доказываются основные свойства гибридного регулятора, обобщающие [10, с. 262]. Далее в качестве приложений решается новая задача модального управления для системы нейтрального типа и предлагается подход, адаптирующий метод финитного управления к задаче 0-управляемости.

## § 1. Гибридный регулятор

Определим регулятор следующими формулами

$$u(t) = T_\psi(\lambda_h)\psi(t) + \mathcal{U}_1[x_t], \quad \psi(t) = S_\psi(\lambda_h)\psi(t-h) + \mathcal{U}_2[x_t], \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathcal{U}_1 \in \mathbf{O}_\delta^{r\times n}, \mathcal{U}_2 \in \mathbf{O}_\delta^{r_1\times n}$, $S_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda^{j-1} S_j^\psi$, $T_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda^{j-1} T_j^\psi$, где $S_j^\psi \in \mathbb{R}^{r_1\times r_1}$, $T_j^\psi \in \mathbb{R}^{r\times r_1}$, причем некоторые из матриц $S_j$ или $T_j$ могут быть нулевыми. Зададим для системы (0.1), (1.1) начальные условия

$$x(t) = \eta(t),\ \ t \in [-h_0, 0], \quad \psi(t) = \psi_0(t),\ \ t \in [-m_0 h, 0], \quad u(t) \equiv 0,\ \ t \in [-mh, 0], \tag{1.2}$$

где $\eta$ — непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывные производные не ниже порядка $\delta$, $\psi_0$ — кусочно-непрерывная функция, $h_0 = \max\{mh,\ h_{\mathcal{U}_1},\ h_{\mathcal{U}_2}\}$.

Регулятор (1.1) содержит наряду с интегральными и дифференциальными связями еще и алгебраические связи, определяемые в (1.1) неоднородным разностным уравнением относительно функции $\psi$. По аналогии с тем, как уравнения, содержащие одновременно дифференциальные и алгебраические связи, называют гибридными (дескрипторными или дифференциально-алгебраическими), регуляторы вида (1.1) будем называть *гибридными регуляторами*.

Ниже изучается ряд свойств гибридного регулятора (1.1), которые связаны с существованием определенных элементарных преобразований уравнений замкнутой системы (0.1), (1.1). Поэтому вначале, следуя [20, с. 135], конкретизируем, что будем понимать под элементарными преобразованиями уравнений системы (0.1), (1.1).

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *элементарными преобразованиями уравнений системы* вида (0.1), (1.1) будем понимать:

(1) перестановку уравнений системы местами;

(2) умножения обеих частей какого-либо уравнения системы на оператор сдвига $a\lambda_h^k$, где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(3) прибавление к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого уравнения этой системы, предварительно умноженных на оператор сдвига $a\lambda_h^k$.

Обозначим через $\widehat{W}_0(p)$ характеристическую матрицу системы (0.1), (1.1), то есть

$$\widehat{W}_0(p) = \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})T_\psi(e^{-ph}) \\ -U_2(p) & I_{r_1} - e^{-ph}S_\psi(e^{-ph}) \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{U}_i \overset{\sigma}{\mapsto} U_i(p)$, $i = 1, 2$.

Описанные в определении 1.1 элементарные преобразования уравнений системы (0.1), (1.1) равносильны умножению слева характеристической матрицы $\widehat{W}_0(p)$ замкнутой системы (0.1), (1.1) на некоторую унимодулярную матрицу $P(e^{-ph})$ (невырожденную матрицу с постоянным определителем).

З а м е ч а н и е 2. Укажем причины, по которым мы не используем преобразования, определяемые умножением слева характеристической матрицы системы на некоторую унимодулярную матрицу, зависящую от переменной $p$, как, например, в [20, с. 135]. Такие преобразования предполагают многократное дифференцирование, а решения систем вида (0.1), (1.1) могут не иметь производных, имеющих порядок выше чем $\delta$.

Рассмотрим систему (0.1), замкнутую регулятором (1.1). Предположим, что при помощи элементарных преобразований систему (0.1), (1.1) можно привести к квазитреугольному виду, причем такому, что поведение функции $x(t)$ однозначно определяется линейной автономной системой нейтрального типа. Покажем, что в этом случае существует гибридный регулятор вида (1.1), в котором матрицы $T_\psi(\lambda)$ и $S_\psi(\lambda)$ не зависят от $\lambda$, $T_\psi(\lambda) = T_\psi$, $S_\psi(\lambda) = S_\psi$, обладающий аналогичным свойством, причем в обоих случаях подсистемы нейтрального типа совпадают.

Л е м м а 1.1. *Пусть для регулятора* (1.1) *существует матрица* $P_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda]$ *такая, что имеет место равенство*

$$\begin{bmatrix} I_n & P_0(e^{-ph}) \\ 0_{r_1\times n} & I_{r_1} \end{bmatrix} \widehat{W}_0(p) = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{01}(p) & 0_{n\times r_1} \\ -U_2(p) & I_{r_1} - e^{-ph}S_\psi(e^{-ph}) \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

*где* $\widehat{W}_{01}(p) = W(p, e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) - P_0(e^{-ph})U_2(p)$. *Тогда существует регулятор*

$$u(t) = \widetilde{T}_\psi\widetilde{\psi}(t) + \mathcal{U}_1[x_t], \quad \widetilde{\psi}(t) = \lambda_h\widetilde{S}_\psi\widetilde{\psi}(t) + \widetilde{\mathcal{U}}_2[x_t], \tag{1.4}$$

*для которого найдется матрица* $\widetilde{P}_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times m_0r_1}[\lambda]$ *такая, что выполняется равенство*

$$\begin{bmatrix} I_n & \widetilde{P}_0(e^{-ph}) \\ 0_{r_1m_0\times n} & I_{r_1m_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})\widetilde{T}_\psi \\ -\widetilde{U}_2(p) & I_{r_1m_0} - e^{-ph}\widetilde{S}_\psi \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \widehat{W}_{01}(p) & 0_{n\times r_1m_0} \\ -\widetilde{U}_2(p) & I_{r_1m_0} - e^{-ph}\widetilde{S}_\psi \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

*Здесь* $\widetilde{\mathcal{U}}_2 \in \mathbf{O}_\delta^{m_0r_1\times n}$, $\widetilde{\mathcal{U}}_2 \overset{\sigma}{\mapsto} \widetilde{U}_2(p)$, *матрицы* $\widetilde{T}_\psi \in \mathbb{R}^{r\times r_1m_0}$, $\widetilde{S}_\psi \in \mathbb{R}^{r_1m_0\times r_1m_0}$ *не зависят от* $\lambda$, *оператор* $\mathcal{U}_1$ *— тот же, что и в* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В формулах (1.4) положим

$$\widetilde{T}_\psi = \left[T_1^\psi, \ldots, T_{m_0}^\psi\right], \quad \widetilde{U}_2(p) = \operatorname{col}\left[U_2(p),\, 0_{r_1(m_0-1)\times n}\right],$$

$$\widetilde{S}_\psi = \begin{bmatrix} S_1^\psi & S_2^\psi & \ldots & S_{m_0-1}^\psi & S_{m_0}^\psi \\ I_{r_1} & 0_{r_1\times r_1} & \ldots & 0_{r_1\times r_1} & 0_{r_1\times r_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{r_1\times r_1} & 0_{r_1\times r_1} & \ldots & I_{r_1} & 0_{r_1\times r_1} \end{bmatrix}.$$

Используя введенные этими равенствами матрицы, запишем характеристическую матрицу системы (0.1), (1.4):

$$\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})\widetilde{T}_\psi \\ -\widetilde{U}_2(p) & I_{r_1 m_0} - e^{-ph}\widetilde{S}_\psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})T_1^\psi & -B(e^{-ph})T_2^\psi & \dots & -B(e^{-ph})T_{m_0}^\psi \\ -U_2(p) & I_{r_1} - e^{-ph}S_1^\psi & -e^{-ph}S_2^\psi & \dots & -e^{-ph}S_{m_0}^\psi \\ 0_{r_1\times n} & -e^{-ph}I_{r_1} & I_{r_1} & \dots & 0_{r_1\times r_1} \\ 0_{r_1\times n}F & 0_{r_1\times r_1} & -e^{-ph}I_{r_1} & \dots & 0_{r_1\times r_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{r_1\times n} & 0_{r_1\times r_1} & 0_{r_1\times r_1} & \dots & I_{r_1} \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

Покажем, что существует матрица $\widetilde{P}_0(\lambda)$, обеспечивающая (1.5). Введем матрицы

$$\widetilde{P}_{11}(\lambda) = \left[0_{n\times r_1}, B(\lambda)\sum_{i=2}^{m_0}\lambda^{i-2}T_i^\psi,\, B(\lambda)\sum_{i=3}^{m_0}\lambda^{i-3}T_i^\psi, \dots, B(\lambda)T_{m_0}^\psi\right],$$

$$\widetilde{P}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \widetilde{P}_{11}(\lambda) \\ 0_{r_1 m_0\times n} & I_{r_1 m_0} \end{bmatrix}.$$

Используя (1.6), непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\widetilde{P}_1(e^{-ph})\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})\widetilde{T}_\psi \\ -\widetilde{U}_2(p) & I_{r_1 m_0} - e^{-ph}\widetilde{S}_\psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) & -B(e^{-ph})T_\psi(e^{-ph}) & 0_{n\times r_1} & \dots & 0_{n\times r_1} \\ -U_2(p) & I_{r_1} - e^{-ph}S_1^\psi & -e^{-ph}S_2^\psi & \dots & -e^{-ph}S_{m_0}^\psi \\ 0_{r_1\times n} & -e^{-ph}I_{r_1} & I_{r_1} & \dots & 0_{r_1\times r_1} \\ 0_{r_1\times n} & 0_{r_1\times r_1} & -e^{-ph}I_{r_1} & \dots & 0_{r_1\times r_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{r_1\times n} & 0_{r_1\times r_1} & 0_{r_1\times r_1} & \dots & I_{r_1} \end{bmatrix}. \qquad (1.7)$$

Пусть

$$\widetilde{P}_{22}(\lambda) = \left[P_0(\lambda), P_0(\lambda)\sum_{i=2}^{m_0}\lambda^{i-1}S_i^\psi, P_0(\lambda)\sum_{i=3}^{m_0}\lambda^{i-2}S_i^\psi, \dots, P_0(\lambda)\lambda S_{m_0}^\psi\right],$$

$$\widetilde{P}_2(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \widetilde{P}_{22}(\lambda) \\ 0_{r_1 m_0\times n} & I_{r_1 m_0} \end{bmatrix}.$$

Умножив равенство (1.7) слева на матрицу $\widetilde{P}_2(e^{-ph})$, получим матрицу, стоящую в правой части соотношения (1.5). Значит, в качестве матрицы $\widetilde{P}_0(\lambda)$ можно взять соответствующий блок произведения матриц $\widetilde{P}_2(\lambda)\widetilde{P}_1(\lambda)$, то есть можно положить $\widetilde{P}_0(\lambda) = \widetilde{P}_{22}(\lambda) + \widetilde{P}_{11}(\lambda)$. Лемма доказана. □

Важную роль при исследовании свойств гибридных регуляторов (1.1) играют свойства дескрипторного разностного уравнения с дискретным временем, построенного по неоднородной части уравнения (0.1):

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \dots \qquad (1.8)$$

Результаты подробного исследования уравнения (1.8) изложены в работах [21,22]. Приведем некоторые факты и введем обозначения, необходимые далее.

Последовательность $g(k)$, $k = m, m+1, \dots$, определяемая уравнением (1.8) и заданными начальными условиями $g(i) = \widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$, $\widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$, существует в том и только в том случае [21], когда $\widetilde{g}_{m+1-i} = T_i c$, $i = \overline{1,m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) — некоторые матрицы (возможен случай нулевых матриц $T_i$), $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор, причем один и тот же для всех матриц $T_i$. Матрицы $\{T_i,\ i = \overline{1,m}\}$, взятые в указанном порядке, назовем *базисными матрицами*. Процедура построения базисных матриц $T_i$ всегда возможна и заключается в решении конечной цепочки однородных алгебраических систем [21]. Матрицы $T_i$ определяются с точностью до постоянного множителя. Если имеем набор базисных матриц $\{T_i,\ i = \overline{1,m}\}$, определенных выше, то любой другой набор базисных матриц будет иметь вид $\{T_iC,\ i = \overline{1,m}\}$, где $C \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ — любая невырожденная матрица (одна и та же для всех матриц $T_i$).

Зафиксируем любой набор базисных матриц $\{T_i,\ i = \overline{1,m}\}$, который обозначим $\widehat{T}$, то есть $\widehat{T} = \big\{T_i,\ i = \overline{1,m}\big\}$. Положим $T = T_m$ и определим любую матрицу $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$, являющуюся решением системы уравнений

$$B_0T_1S + \sum_{i=1}^{m} B_iT_i = 0, \quad T_kS = T_{k-1}, \quad k = \overline{2,m}. \tag{1.9}$$

Существование решения этой системы обосновано в статье [21]. Более того, в общем случае матрица $S$, удовлетворяющая уравнению (1.9), является не единственной. При этом в некоторых случаях (в зависимости от матриц $B_i$) можно построить матрицу $S$ с наперед заданным спектром или заданной частью спектра (детали см. в [22]). Множество всех матриц $S$, отвечающих набору базисных матриц $\widehat{T}$ и удовлетворяющих уравнению (1.9), обозначим через $\mathbf{S}_{\widehat{T}}$.

Построим матрицы $G_0 = B_0T$, $G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i = \overline{1, m-1}$, $G(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i$. Далее понадобится следующая формула [21]

$$B(\lambda)T = G(\lambda)(I_n - \lambda S). \tag{1.10}$$

Рассмотрим регулятор (1.1). Цель дальнейших рассуждений — выяснить вид матрицы $P_0(\lambda)$ из леммы 1.1.

Л е м м а 1.2. *Пусть $\widehat{T}$ — любой фиксированный набор базисных матриц и $S \in \mathbf{S}_{\widehat{T}}$. Предположим, что существует регулятор* (1.1)*, у которого матрицы $T_\psi(\lambda) = T_\psi$ и $S_\psi(\lambda) = S_\psi$ не зависят от $\lambda$, такой, что при некоторой матрице $P_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda]$ имеет место соотношение* (1.3)*. Тогда найдутся такие $k_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $J_* \in \mathbb{R}^{r_0\times r_1}$, что*

$$P_0(\lambda) = B(\lambda)T_\psi \sum_{j=0}^{k_0-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j + \lambda^{k_0} G(\lambda)J_* \tag{1.11}$$

(*если $k_0 = 0$, то слагаемое, содержащее знак суммы, отсутствует*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем матрицу $E(\lambda) = I_{r_1} - \lambda S_\psi$. Можно записать следующую цепочку равенств:

$$I_{r_1} = \lambda S_\psi + E(\lambda) = \lambda S_\psi I_{r_1} + E(\lambda) = \big(\lambda S_\psi\big)^2 + \big(\lambda S_\psi + I_{r_1}\big)E(\lambda) = \dots$$
$$\dots = \big(\lambda S_\psi\big)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Используя формулу (1.12), выполним следующие преобразования ($k \in \mathbb{N}$):

$$B(\lambda)T_\psi = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i T_\psi I_{r_1} = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \left( \big(\lambda S_\psi\big)^{m-i} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda) \right) +$$

$$+ \lambda^m B_m T_\psi = \lambda^m \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m-i} + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda) =$$

$$= \lambda^m \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m-i} I_{r_1} + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda) =$$

$$= \lambda^m \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m-i} \left( \big(\lambda S_\psi\big)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda) \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \big(\lambda S_\psi\big)^j E(\lambda). \quad (1.13)$$

Отдельно преобразуем сумму матриц с множителем $E(\lambda)$:

$$\lambda^m \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m-i} \sum_{j=0}^{k-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \big(\lambda S_\psi\big)^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{k+m-i-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j =$$

$$= B(\lambda)T_\psi \sum_{j=0}^{k-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j + \lambda^k \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \lambda^j S_\psi^{k+j}.$$

С учетом последней формулы и цепочки равенств (1.13) приходим к следующим соотношениям

$$B(\lambda)T_\psi = \lambda^{m+k} \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m+k-i} + C_k(\lambda)E(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad (1.14)$$

где

$$C_k(\lambda) = B(\lambda)T_\psi \sum_{j=0}^{k-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j + \lambda^k \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \lambda^j S_\psi^{k+j}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \lambda^j S_\psi^j.$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$B(\lambda)T_\psi = P_0(\lambda)\big(I_{r_1} - \lambda S_\psi\big). \quad (1.15)$$

На основании (1.14), (1.15) имеем равенства

$$\lambda^{m+k} \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m+k-i} + C_k(\lambda)E(\lambda) = P_0(\lambda)E(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots. \quad (1.16)$$

Учитывая, что $E(\lambda) = I_{r_1} - \lambda S_\psi$, в силу (1.16) запишем формулу

$$\lambda^{m+k} \sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m+k-i} = \big(P_0(\lambda) - C_k(\lambda)\big) - \big(P_0(\lambda) - C_k(\lambda)\big)\lambda S_\psi, \quad k = 0, 1, \ldots. \quad (1.17)$$

Проанализируем соотношения (1.17). Слагаемое $C_k(\lambda)$ представляет собой сумму полиномиальных матриц, степени элементов которых не превышают числа $m+k-1$. Выберем число $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, чтобы $\deg P_0(\lambda) \leqslant m+k_0-1$. Тогда при $k \geqslant k_0$ степень матрицы $\big(P_0(\lambda)-C_k(\lambda)\big)$ не превышает числа $m+k-1$, а степень $\big(P_0(\lambda)-C_k(\lambda)\big)\lambda S_\psi$ — числа $m+k$. Что же касается левой части равенства (1.17), то очевидно, что если она не равна нулю, то степени всех ненулевых элементов матрицы в левой части (1.17) равны $m+k$. Приравнивая матрицы при одинаковых степенях в обеих частях равенства (1.17) получим, что

$$P_0(\lambda) = C_k(\lambda), \quad k \geqslant k_0. \tag{1.18}$$

В силу (1.18) из (1.17) следуют соотношения

$$\sum_{i=0}^{m} B_i T_\psi \big(S_\psi\big)^{m+k-i} = 0, \quad k \geqslant k_0. \tag{1.19}$$

Обозначим $J(k) = T_\psi\big(S_\psi\big)^{k_0+k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из (1.19) имеем

$$B_0 J(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i J(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots. \tag{1.20}$$

Из определения базисного набора матриц $\widehat{T}$ следует, что соотношение (1.20) имеет место в том и только в том случае, если найдется матрица $J_* \in \mathbb{R}^{r_0 \times r_1}$ такая, что

$$J(i) = T_\psi\big(S_\psi\big)^{k_0+i-1} = T S^{i-1} J_*, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.21}$$

В силу соотношений (1.14), (1.19) получаем, что

$$B(\lambda) T_\psi = C_k(\lambda) E(\lambda), \quad k \geqslant k_0. \tag{1.22}$$

Формулу (1.22) рассмотрим при $k = k_0$. Используя (1.21), преобразуем выражение

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \lambda^j S_\psi^{k_0+j},$$

входящее в формулу, определяющую величину $C_{k_0}(\lambda)$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T_\psi \sum_{j=0}^{m-1-i} \lambda^j S_\psi^{k_0+j} = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i T \sum_{j=0}^{m-1-i} (\lambda S)^j J_* =$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i \sum_{j=0}^{i} B_i T S^{i-j} J_* = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i J_* = G(\lambda) J_*.$$

На основании этой цепочки равенств запишем

$$C_{k_0}(\lambda) = B(\lambda) T_\psi \sum_{j=0}^{k_0-1} \big(\lambda S_\psi\big)^j + \lambda^{k_0} G(\lambda) J_*. \tag{1.23}$$

Формула (1.11) следует из (1.18) и (1.23). Лемма доказана. □

Рассмотрим систему (0.1), (1.1). Будем считать, что в регуляторе (1.1) матрицы $T_\psi(\lambda) = T_\psi$ и $S_\psi(\lambda) = S_\psi$ не зависят от $\lambda$.

Л е м м а 1.3. *Для того чтобы существовала матрица* $P_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda]$, *обеспечивающая равенство* (1.3), *в котором матрицы* $\widehat{W}_{01}(p)$, $\widehat{W}_0(p)$ *являются характеристическими матрицами некоторых линейных однородных автономных систем нейтрального типа, необходимо и достаточно, чтобы нашлись момент времени* $t_0 > 0$ *и оператор* $\mathcal{E} \in \mathbf{O}_\delta^{n\times n}$ *такие, что векторная компонента* $x$ *решения* $\mathrm{col}\,[x,\psi]$ *системы* (0.1), (1.1), *порожденная любым начальным условием* (1.2), *при* $t > t_0$ *была решением линейной автономной однородной системы нейтрального типа*

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + \mathcal{E}[x_t]. \qquad (1.24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Если имеет место (1.3), то из блочно треугольного вида матрицы в правой части равенства (1.3) следует, что функция $x$ удовлетворяет некоторой подсистеме системы (0.1), (1.1) с характеристической матрицей $\widehat{W}_0(p)$. Поскольку матрица $\widehat{W}_0(p)$ есть характеристическая матрица некоторой линейной однородной автономной системы нейтрального типа, то указанная выше подсистема представляет собой систему нейтрального типа.

**Достаточность.** Из второго уравнения в (1.1) имеем цепочку равенств

$$\psi(t) = S_\psi\psi(t-h) + \mathcal{U}_2[x_t] = S_\psi^2\psi(t-2h) + \big(\lambda_h S_\psi + I_{r_1}\big)\mathcal{U}_2[x_t] = \dots$$
$$\dots = S_\psi^k\psi(t-kh) + \sum_{j=0}^{k-1}\big(\lambda_h S_\psi\big)^j\mathcal{U}_2[x_t], \quad t > kh. \qquad (1.25)$$

Рассмотрим величину $B(\lambda_h)T_\psi(\lambda_h)\psi(t)$. Используя рассуждения, которые приводят величину $B(\lambda)T_\psi(\lambda)$ к виду (1.14), получаем равенство (в данном случае вместо формулы (1.12) используем (1.25))

$$B(\lambda_h)T_\psi(\lambda_h)\psi(t) = \big(\lambda_h\big)^{m+k}\sum_{i=0}^{m}B_iT_\psi\big(S_\psi\big)^{m+k-i}\psi(t) +$$
$$+ C_k(\lambda_h)E(\lambda_h)\psi(t), \quad t > (m+k)h, \quad k = 0,1,\dots, \qquad (1.26)$$

где все обозначения — те же, что и в формуле (1.14). Учитывая, что $E(\lambda_h)\psi(t) = \mathcal{U}_2[x_t]$, $t > 0$, соотношение (1.26) перепишем в виде

$$B(\lambda_h)T_\psi(\lambda_h)\psi(t) = \big(\lambda_h\big)^{m+k}\sum_{i=0}^{m}B_iT_\psi\big(S_\psi\big)^{m+k-i}\psi(t) +$$
$$+ C_k(\lambda_h)\mathcal{U}_2[x_t], \quad t > (m+k)h, \quad k = 0,1,\dots.$$

Значит, функция $x$ удовлетворяет уравнению

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)\mathcal{U}_1[x_t] +$$
$$+ \big(\lambda_h\big)^{m+k}\sum_{i=0}^{m}B_iT_\psi\big(S_\psi\big)^{m+k-i}\psi(t) + C_k(\lambda_h)\mathcal{U}_2[x_t], \quad t > (m+k-1)h. \qquad (1.27)$$

Равенства (1.27) справедливы при любом $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и любой кусочно-непрерывной функции $\psi(t) = \psi_0(t)$, $t \in (-h, 0]$. В то же время при $t > t_0$ функция $x$ есть решение линейной автономной однородной системы нейтрального типа (1.24). Значит, при некотором $t > t_0$ соотношение (1.27) не должно явно зависеть от $\psi$. Поэтому найдется число $k_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ такое, что $\sum_{i=0}^{m}B_iT_\psi\big(S_\psi\big)^{m+k-i} = 0$, $k = k_0, k_0+1, \dots$. Очевидно, что в этом случае можно взять $P_0(\lambda) = C_{k_0}(\lambda)$. Лемма доказана. □

Перейдем к обсуждению содержательных аспектов лемм 1.1–1.3. Пусть, вначале, в регуляторе (1.1) матрицы $T_\psi$, $S_\psi$ не зависят от $\lambda$. Тогда, выражая на множествах $\big(kh,(k+1)h\big]$, $k=0,1,\dots$, функцию $\psi=\psi(t,x,\dots,x^{(\delta)})$ согласно начальному условию (1.2) и второму уравнению в (1.1), находим

$$\psi(t,x,\dots,x^{(\delta)})=\big(\lambda_h S_\psi\big)^k\psi_0(t)+\sum_{i=0}^{k-1}\big(\lambda_h S_\psi\big)^i\mathcal{U}_2[x_t],\quad t\in\big(kh,(k+1)h\big],\quad k=1,2,\dots.$$

На основании этого равенства имеем

$$\begin{gathered}u(t,x,\dots,x^{(\delta)})=T_\psi\Bigg(\big(\lambda_h S_\psi\big)^k\psi_0(t)+\sum_{i=0}^{k-1}\big(\lambda_h S_\psi\big)^i\mathcal{U}_2[x_t]\Bigg)+\mathcal{U}_1[x_t],\\ t\in\big(kh,(k+1)h\big],\quad k=1,2,\dots.\end{gathered}\tag{1.28}$$

Из этого равенства видно, что регулятор $u(t,x,\dots,x^{(\delta)})$ на каждом полуинтервале $\big(kh,(k+1)h\big]$ в общем случае может менять свою структуру как функция переменных $x,\dots$ $\dots,x^{(\delta)}$. Поэтому на каждом из этих полуинтервалов замкнутая система (0.1), (1.28) в общем случае также будет менять свою структуру, а значит не будет линейной автономной системой нейтрального типа.

Среди всех регуляторов $u(t,x,\dots,x^{(\delta)})$ вида (1.28) рассмотрим те, которые обладают следующим свойством.

С в о й с т в о 1.1. *Существует число $t_0>0$ такое, что при $t>t_0$ структура величины $B(\lambda_h)u(t,x,\dots,x^{(\delta)})$ как функция переменных $x,\dots,x^{(\delta)}$ остается постоянной, какова бы ни была функция $\psi_0$, а система* (1.1)*,* (1.28) *при $t>t_0$ является системой нейтрального типа.*

Легко видеть, что свойство 1.1 равносильно тому, что выполняется равенство

$$B(\lambda)T_\psi\big(\lambda_h S_\psi\big)^k=0_{r\times r_1},\quad k\geqslant k_0\quad \exists\, k_0\in\mathbb{N}.$$

При этом система нейтрального (1.1), (1.28) имеет вид

$$(I_n-D(\lambda_h))\dot{x}(t)=A(\lambda_h)x(t)+B(\lambda_h)\Bigg(T_\psi\sum_{i=0}^{k_0-1}\big(\lambda_h S_\psi\big)^i\mathcal{U}_2[x_t]+\mathcal{U}_1[x_t]\Bigg).\tag{1.29}$$

Покажем, что вопрос наличия указанного свойства 1.1 у гибридных регуляторов вида (1.1) можно заменить вопросом существования некоторой унимодулярной полиномиальной матрицы, описывающей элементарные преобразования уравнений системы.

Рассмотрим равенство (1.3). Это равенство показывает существование элементарных преобразований уравнений системы (0.1), (1.1), при помощи которых получается подсистема с характеристической матрицей $\widehat{W}_{01}(p)$, описывающая динамику функции $x$ — векторной компоненты решения $\operatorname{col}[x,\psi]$ системы (0.1), (1.1). Здесь элементарные преобразования сначала выполняются над последними $r_1$ уравнениями системы (0.1), (1.1), то есть над уравнениями разностной системы, описывающей поведение функции $\psi(t)$. После этого полученные уравнения прибавляются к первым $n$ уравнениям системы. Такие преобразования описываются упомянутой выше матрицей $P(\lambda)$ вида

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix}I_n & P_0(\lambda)\\ 0_{r_1\times n} & I_{r_1}\end{bmatrix},\quad P_0(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda].\tag{1.30}$$

Заметим, что при помощи элементарных преобразований строк (что равносильно умножению слева на унимодулярную матрицу) любую унимодулярную матрицу можно привести к виду (1.30).

В лемме 1.1 утверждается следующее. Пусть существует некоторый гибридный регулятор (1.1) такой, что из замкнутой системы можно при помощи элементарных преобразований, соответствующих матрице (1.30), выделить подсистему с характеристической матрицей $\widehat{W_{01}}(p)$, описывающую поведение вектора $x$. Тогда существует гибридный регулятор вида (1.1), но с матрицами $T_\psi$, $S_\psi$, не зависящими от $\lambda$, обладающий аналогичным свойством, причем оговоренная выше подсистема остается прежней. При этом лемма 1.2 дает описание элементарных преобразований, позволяющих получить эту подсистему.

Рассмотрим регулятор (1.1) с постоянными матрицами $T_\psi$, $S_\psi$. Выше было показано, что его можно переписать в виде (1.28). Лемма 1.3 говорит о том, что гибридный регулятор (1.28) обладает свойством 1.1 в том и только в том случае, если существует матрица $P_0(\lambda)$ из леммы 1.1, обеспечивающая (1.3) с матрицей $\widehat{W_{01}}(p)$, причем существует система нейтрального типа, у которой характеристическая матрица совпадает с матрицей $\widehat{W_{01}}(p)$. То есть существуют элементарные преобразования системы (0.1), (1.1), задаваемые матрицей (1.30), где $P_0(\lambda)$ определяется в (1.11), позволяющие получить подсистему нейтрального типа (1.29).

Пусть теперь в регуляторе (1.1) матрицы $T_\psi(\lambda)$, $S_\psi(\lambda)$ зависят от $\lambda$. Предположим, что этот регулятор (1.1) также обладает свойством, аналогичным свойству 1.1: найдется число $t_0 > 0$, такое, что при $t > t_0$ структура величины $B(\lambda_h)u(t, x, \ldots, x^{(\delta)})$ как функция переменных $x, \ldots, x^{(\delta)}$, остается постоянной, какова бы ни была функция $\psi_0$, а замкнутая система имеет нейтральный тип. Тогда, согласно лемме 1.1, найдется регулятор (1.1), обладающий свойством 1.1, матрицы $T_\psi$, $S_\psi$ которого не зависят от $\lambda$.

Остановимся теперь на одном условии существования решения системы (0.1), (1.1). Здесь под решением системы (0.1), (1.1) понимаем непрерывную функцию $x(t)$, $t \geqslant -h_0$, имеющую кусочно-непрерывные производные не ниже порядка $\delta$, и кусочно-непрерывную функцию $\psi(t)$, $t > -m_0 h$, которые удовлетворяют условиям (1.2) и уравнениям (0.1), (1.1) при $t > 0$ за исключением точек, кратных $h$.

Л е м м а 1.4. *Пусть для системы* (0.1), (1.1) *существует матрица* $P_0(\lambda)$, *обеспечивающая равенство* (1.3). *Если матрицы* $\widehat{W_0}(p)$, $\widehat{W_{01}}(p)$ *являются характеристическими матрицами некоторых линейных однородных автономных систем нейтрального типа, то решение системы существует и единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что систему (0.1), (1.1) можно интегрировать по шагам. На каждом полуинтервале $\big(kh, (k+1)h\big]$, $k = 0, 1, \ldots$, вначале из (1.1) находим функции $\psi(t)$ и $u(t)$, которые подставляем в (0.1). Получаем линейную автономную неоднородную систему. Для обоснования существования решения этой системы докажем, что она имеет нейтральный тип. Запишем характеристическую матрицу соответствующей однородной системы в виде $\widetilde{W}(p) = p\widetilde{D}(p, e^{-ph}) - \widetilde{A}(p)$, а матрицу $\widehat{W_{01}}(p)$ в виде $\widehat{W_{01}}(p) = p\widehat{D}(p, e^{-ph}) - \widetilde{A}(p)$. Здесь $\widetilde{D}(p, \lambda)$, $\widehat{D}(p, \lambda)$ — некоторые полиномиальные матрицы, $\widetilde{A}(p)$, $\widehat{A}(p)$ — некоторые функциональные матрицы (очевидно, что указанные матрицы определяются однозначно). Из (1.3) легко видеть, что $B(\lambda)T_\psi(\lambda) = P_0(\lambda)\big(I_{r_1} - \lambda S_\psi(\lambda)\big)$. Отсюда следует, что $B_0 T_\psi(0) = P_0(0)$. Поэтому $\widetilde{D}(p, 0) = \widehat{D}(p, 0)$.

Поскольку матрицы $\widehat{W_0}(p)$, $\widehat{W_{01}}(p)$ являются характеристическими матрицами некоторых линейных однородных автономных систем нейтрального типа, то $\widehat{D}(p, 0) = I_n$, откуда $\widetilde{D}(p, 0) = I_n$. Поэтому в силу замечания 1 матрица $\widetilde{W}(p)$ также является характеристической матрицей некоторой линейной однородной автономной системы нейтрального типа. Лемма доказана. □

При использовании гибридного регулятора (1.1) для решения задач управления системой его часто удобно представить в виде

$$u(t) = T_\psi(\lambda_h)\psi(t) + v_1(t), \quad \psi(t) = \lambda_h S_\psi(\lambda_h)\psi(t) + v_2(t), \quad t > 0, \tag{1.31}$$

где $v_1(t)$, $v_2(t)$ — некоторые функции, которые могут быть как программным управлением, так и управлением в виде обратной связи, остальные обозначения — те же, что и в (1.1). Система, замкнутая управлением (1.31), будет иметь вид

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)\big(T_\psi(\lambda_h)\psi(t) + v_1(t)\big), \tag{1.32}$$

$$\psi(t) = \lambda_h S_\psi(\lambda_h)\psi(t) + v_2(t), \quad t > 0. \tag{1.33}$$

Пусть выполняются условия леммы 1.1. Действуя на (1.33) оператором $P_0(\lambda_h)$ слева и прибавляя затем полученное равенство к соотношению (1.32), получим, что функция $x(t)$ определяется уравнением

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)v_1(t) + P_0(\lambda_h)v_2(t). \tag{1.34}$$

Система (1.34) отличается от исходной системы (0.1) присутствием матрицы дополнительных входов $P_0(\lambda)$. Наличие этой матрицы, если рассматривать систему (1.34) без учета соотношений (1.31), в общем случае расширяет возможности управления системой (1.34) в сравнении с возможностью управления системой (0.1), то есть существования функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, обеспечивающих системе (1.34) (или ее решению) заданные свойства.

Предположим, что для исходной системы (0.1) не существует управления, реализующего некоторую заданную цель, но существуют функции $v_1 = v_1^0(t)$, $v_2 = v_2^0(t)$, обеспечивающие реализацию этой цели системе (1.34). Подставив $v_1 = v_1^0(t)$, $v_2 = v_2^0(t)$ в (1.31) получим, что поведение функции $x(t)$, $t > t_0$ ($t_0 > 0$ — некоторое число), которая является решением исходной системы (0.1), описывается системой (1.34). Причем для этой системы реализована исходная цель управления. Таким образом, если управление $\operatorname{col}[v_1(t),\, v_2(t)]$ обеспечивает решению $x(t)$, $t > t_0$, системы (1.34) определенные свойства, то при $v_1 = v_1^0(t)$, $v_2 = v_2^0(t)$ этими же свойствами обладает компонента $x(t)$, $t > t_0$, решения $\operatorname{col}[x, \psi]$ системы (1.32), (1.33). Однако в то же время за счет уравнений (1.31) найденные функции $v_1^0(t)$, $v_2^0(t)$ могут наделять систему (1.32), (1.33) (или управление $u(t)$) некоторыми новыми свойствами, которых не имеет система (1.34) и которые могут быть «нежелательными». Например, среди собственных значений системы (1.32), (1.33) могут появиться корни уравнения $\big|I_{r_1} - e^{-ph}S_\psi(e^{-ph})\big| = 0$ (см. формулу (1.3)), которые не являются собственными значениями системы (1.34). Или управление $\operatorname{col}[v_1(t),\, v_2(t)]$, обеспечивающее тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$ ($t_1 > 0$ — некоторое число), может являться финитной функцией, а функция $u(t)$ финитной уже не будет. Приведем примеры, иллюстрирующие применение описанного подхода.

## § 2. Примеры использования гибридного регулятора

Возможности использования гибридного регулятора проиллюстрируем на примере решения новой задачи управления коэффициентами характеристического уравнения в случае, когда система не обладает «традиционным» свойством модальной управляемости. Кроме этого, покажем, как с помощью гибридного регулятора можно применять метод финитного управления для построения програмного управления, которое не является финитной функцией.

### § 2.1. Задача модального управления

В статье [14] приводятся достаточные условия модальной управляемости посредством дифференциально-разностных регуляторов, содержащих производные высоких порядков, а значит, предполагающих достаточную гладкость начальной функции. Данный недостаток ликвидирован в статьях [16, 17]. Однако в работе [14], в отличие от [16], динамика изменения переменной $x$ описывается системой нейтрального типа того же порядка, что и исходная система, но с наперед заданным характеристическим квазиполиномом. То есть предложенные в [14] регуляторы являются статическими и не увеличивают размерность замкнутой системы, что актуально с точки зрения задачи минимальной реализации. Покажем, как можно обеспечить аналогичное свойство переменной $x$ в случае, когда условия модальной управляемости статьи [14] не выполняются.

Рассмотрим систему (0.1). Введем полином двух переменных

$$d(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n} p^i d_i(\lambda), \tag{2.1}$$

где $d_i(\lambda)$ — некоторые полиномы, причем $d_n(0)=1$.

Определим дифференциально-разностный регулятор

$$u(t)=R_0(\lambda_h)x(t)+\sum_{i=1}^{\delta} R_i(\lambda_h)x^{(i)}(t-h), \tag{2.2}$$

где $R_i(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$. В статье [14] свойство модальной управляемости понимается в следующем смысле.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что система (0.1) *модально управляема в классе дифференциально-разностных регуляторов*, если для любого полинома $d(p,\lambda)$ вида (2.1) существует регулятор (2.2) такой, что

$$\Bigl|W(p,e^{-ph})-B(e^{-ph})\bigl(R_0(e^{-ph})+e^{-ph}\sum_{i=1}^{\delta} p^i R_i(e^{-ph})\bigr)\Bigr|=d(p,e^{-ph}).$$

Обозначим $Q(p,\lambda)=pD(\lambda)+A(\lambda)$, $b_i(\lambda)$ — столбцы матрицы $B(\lambda)$,

$$B(\lambda)=\bigl[b_1(\lambda),\ldots,b_r(\lambda)\bigr].$$

Приведем достаточное условие модальной управляемости в классе дифференциально-разностных регуляторов [14].

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы система* (0.1) *была модально управляема в классе дифференциально-разностных регуляторов достаточно, чтобы нашлись числа* $\alpha$, $\theta_i\in\mathbb{N}$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\theta_1+\ldots+\theta_\alpha=n$, *и векторы* $b_{j_i}(\lambda)$, $i=\overline{1,\alpha}$, *такие, что* $\bigl|R^{\theta_1,\ldots,\theta_\alpha}_{j_1,\ldots,j_\alpha}(\lambda)\bigr|=\mathrm{const}\neq 0$, *где*

$$R^{\theta_1,\ldots,\theta_\alpha}_{j_1,\ldots,j_\alpha}(\lambda)=\Bigl[b_{j_1}(\lambda),\ldots,b_{j_1}(\lambda)\bigl(Q(p,\lambda)\bigr)^{\theta_1-1},b_{j_2}(\lambda),\ldots,b_{j_2}(\lambda)\bigl(Q(p,\lambda)\bigr)^{\theta_2-1},\ldots,$$
$$\ldots,b_{j_\alpha}(\lambda),\ldots,b_{j_\alpha}(\lambda)\bigl(Q(p,\lambda)\bigr)^{\theta_\alpha-1}\Bigr].$$

Предположим, что для системы (0.1) условия теоремы 2.1 не выполняются. Покажем, как в этом случае можно расширить класс систем, позволяющих управлять коэффициентами характеристического уравнения. Введем гибридный дифференциально-разностный регулятор

$$\begin{gathered}u(t)=L_0(\lambda_h)x(t)+\sum_{i=1}^{\delta} L_i(\lambda_h)x^{(i)}(t-h)+T_\psi(\lambda_h)\psi(t),\\ \psi(t)=S_\psi(\lambda_h)\psi(t-h)+M_0(\lambda_h)x(t)+\sum_{i=1}^{\delta} M_i(\lambda_h)x^{(i)}(t-h),\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $L_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $M_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times n}[\lambda]$, матрицы $T_\psi(\lambda)$, $S_\psi(\lambda)$ — те же, что и в (1.1).

Обозначим

$$U_1(p) = L_0(e^{-ph}) + e^{-ph}\sum_{i=1}^{\delta} p^i L_i(e^{-ph}), \quad U_2(p) = M_0(e^{-ph}) + e^{-ph}\sum_{i=1}^{\delta} p^i M_i(e^{-ph}). \quad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что система (0.1) *слабо модально управляема в классе гибридных дифференциально-разностных регуляторов*, если для любого полинома $d(p,\lambda)$ вида (2.1) существует регулятор (2.3) такой, что выполняются следующие условия:

(1) существует матрица $P_0(\lambda)$ такая, что имеет место равенство (1.3);

(2) $\left|\widehat{W}_{01}(p)\right| = d(p, e^{-ph})$, где $U_1(p)$, $U_2(p)$ определяются формулами (2.4).

Из леммы 1.1 следует утверждение.

Т е о р е м а 2.2. *Для того чтобы система* (0.1) *была слабо модально управляема в классе гибридных дифференциально-разностных регуляторов необходимо и достаточно, чтобы система* (1.34) *была модально управляема в классе дифференциально-разностных регуляторов.*

Зафиксируем произвольный набор базисных матриц $\widehat{T} = \{T_i,\ i = \overline{1,m}\}$, обозначим $T = T_m$, вычислим любую матрицу $S \in \mathbf{S}_{\widehat{T}}$ и построим матрицу $G(\lambda)$. В регуляторе (2.3) положим $T_\psi(\lambda) = T$, $S_\psi(\lambda) = S$. Обозначим $g_i(\lambda)$, $i = \overline{1,r_0}$, — столбцы матрицы $G(\lambda)$. Легко видеть, что если управление $\operatorname{col}[v_1(t), v_2(t)]$ обеспечивает для системы (1.34) при $P_0(\lambda) = G(\lambda)$ решение задачи модальной управляемости в классе дифференциально-разностных регуляторов, то регулятор (2.3) в силу (1.10) обеспечивает системе (0.1) решение задачи слабой модальной управляемости в классе гибридных дифференциально-разностных регуляторов. При этом система нейтрального типа, описывающая поведение вектора-решения $x(t)$, отвечает характеристической матрице $\widehat{W}_{01}(p) = W(p, e^{-ph}) - B(e^{-ph})U_1(p) - G(e^{-ph})U_2(p)$. Из теоремы 2.1 получаем следующее достаточное условие слабой модальной управляемости в классе гибридных дифференциально-разностных регуляторов.

С л е д с т в и е 2.1. *Для того чтобы система* (0.1) *была слабо модально управляема в классе гибридных дифференциально-разностных регуляторов достаточно, чтобы нашлись числа* $\alpha \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\beta \in \mathbb{N}$ $(\alpha \leqslant \beta)$, $\theta_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,\beta}$, $\theta_1 + \ldots + \theta_\beta = n$, *и векторы* $b_{j_i}(\lambda)$, $i = \overline{1,\alpha}$, $g_{k_i}(\lambda)$, $i = \overline{1,\beta-\alpha}$, *такие, что* $\left|\widehat{R}^{\theta_1,\ldots,\theta_\beta}_{j_1,\ldots,j_\alpha,k_1,\ldots,k_{\beta-\alpha}}(\lambda)\right| = \mathrm{const} \neq 0$, *где*

$$\widehat{R}^{\theta_1,\ldots,\theta_\beta}_{j_1,\ldots,j_\alpha,k_1,\ldots,k_{\beta-\alpha}}(\lambda) = \Big[b_{i_1}(\lambda),\ldots,b_{i_1}(\lambda)\big(Q(p,\lambda)\big)^{\theta_1-1}, b_{i_2}(\lambda),\ldots,b_{i_2}(\lambda)\big(Q(p,\lambda)\big)^{\theta_2-1},\ldots,$$
$$b_{i_\alpha}(\lambda),\ldots,b_{i_\alpha}(\lambda)\big(Q(p,\lambda)\big)^{\theta_\alpha-1}, g_{k_1}(\lambda),\ldots,g_{k_1}(\lambda)\big(Q(p,\lambda)\big)^{\theta_{\alpha+1}-1},\ldots,$$
$$g_{k_{\beta-\alpha}}(\lambda),\ldots,g_{k_{\beta-\alpha}}(\lambda)\big(Q(p,\lambda)\big)^{\theta_\beta-1}\Big].$$

П р и м е р 2.1. Приведем числовой пример, иллюстрирующий описанный подход к проблеме модальной управляемости. Пусть система нейтрального типа определяется следующими характеристической матрицей $W(p,\lambda)$ и матрицей $B(\lambda)$ (число $h > 0$ — произвольное):

$$W(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - p\lambda & 1-\lambda \\ -2 & p+\lambda \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что при $p_0 = 0$ имеем $\operatorname{rank}\big[W(p_0, e^{-p_0 h}),\ B(e^{-p_0 h})\big] = 1$. Поэтому очевидно, что условие теоремы 2.1 выполняться не может. Найдем [21] матрицы $T$, $S$, $G(\lambda)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = 1, \quad G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Условия следствия 2.1 для системы (1.34) выполнены. Построим гибридный регулятор для случая, например, $d(p,\lambda) = d(p) = (p+1)(p+2)$. Для этого строим регулятор вида (2.2), обеспечивающий системе (1.34) ($P_0(\lambda) = G(\lambda)$), замкнутой этим регулятором, характеристический полином $d(p)$. После несложных расчетов согласно [14] имеем

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3+\lambda_h & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad v_2(t) = \big[-3+\lambda_h,\ -\lambda_h\big] x(t) + [-1, 0]\dot{x}(t-h). \tag{2.6}$$

Используя (2.6), выпишем требуемый регулятор (2.3) ($T_\psi(\lambda) = T$, $S_\psi(\lambda) = S$), подставив найденные $v_1(t)$, $v_2(t)$ в (1.31):

$$\begin{gathered} u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \psi(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3+\lambda_h & 0 \end{bmatrix} x(t), \\ \psi(t) = \psi(t-h) + \big[-3+\lambda_h, -\lambda_h\big] x(t) + \big[-1, 0\big]\dot{x}(t-h). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Для того чтобы убедиться в том, что регулятор (2.7) обеспечивает выполнение условий определения 2.2 при $d(p,\lambda) = d(p)$, достаточно выписать характеристическую матрицу замкнутой системы, которую затем следует слева умножить на матрицу

$$\begin{bmatrix} I_2 & G(\lambda) \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем, как еще можно провести проверку полученного регулятора (2.7) в более наглядном виде. Используя первое соотношение в (2.7), имеем:

$$\begin{aligned} B(\lambda_h)u(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t-h) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \big(\psi(t) - \psi(t-h)\big) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3\lambda_h + \lambda_h^2 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Заменяя в (2.8) выражение $\psi(t) - \psi(t-h)$ согласно второму уравнению в (2.7), имеем

$$\begin{aligned} B(\lambda_h)u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big(\big[-3+\lambda_h, -\lambda_h\big] x(t) + \big[-1, 0\big]\dot{x}(t-h)\Big) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3\lambda_h + \lambda_h^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) = \\ = \begin{bmatrix} -3+\lambda_h & -\lambda_h \\ -3\lambda_h + \lambda_h^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t-h). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь, используя (2.9), запишем характеристическую матрицу $\widehat{W}(p)$ замкнутой системы в случае, когда $B(\lambda_h)u(t)$ определяется соотношением (2.9):

$$\begin{gathered} \widehat{W}_1(p) = W(p, e^{-ph}) - B(\lambda_h)u(t) = W(p, e^{-ph}) - \begin{bmatrix} -3 + e^{-ph} & -e^{-ph} \\ -3e^{-ph} + e^{-2ph} & 0 \end{bmatrix} - \\ - pe^{-ph} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - e^{-ph} + 3 & 1 \\ -2 + 3e^{-ph} - e^{-2ph} & p + e^{-ph} \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

Таким образом получили, что функция $x(t)$, являющаяся решением исходного уравнения (0.1) с матрицами (2.5), после замыкания регулятором (2.7) стала определяться уравнением с характеристической матрицей $\widehat{W}_1(p)$, и $\big|\widehat{W}_1(p)\big| = (p+1)(p+2)$.

## § 2.2. Решение задачи 0-управляемости методом финитного управления

В теории управления большое распространение получил метод финитного управления, который применим как к обыкновенным системам, так и к системам с распределенными параметрами. Идейная основа этого метода описывается в монографии [23, с. 176], а дальнейшее его развитие для систем с последействием — в статье [24] при исследовании задачи полной 0-управляемости (полного успокоения). История исследования задачи полной 0-управляемости представлена в статьях [18,25,26] и монографии [10, с. 33], поэтому здесь не приводится. В цитируемой выше работе [24] вводится также свойство 0-управляемости (уточним, что в [24] это свойство определяется как «полная управляемость по состоянию»). Свойство 0-управляемости предполагает приведение траектории системы в ноль, а затем удержание ее там постоянно действующим управлением. В результате управляющее воздействие в общем случае финитной функцией не является. Этот факт не позволил в [24] исследовать задачу 0-управляемости методом финитного управления, и ее решение было дано позже в [25,26] при помощи принципиально иного подхода. Покажем, как с помощью идеи гибридного регулятора можно решать задачу 0-управляемости методом финитного управления. Ограничимся случаем системы запаздывающего типа (в системе (0.1) матрица $D(\lambda)$ является нулевой)

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0. \tag{2.10}$$

Считаем, что задано начальное условие

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0], \tag{2.11}$$

где $\eta$ — непрерывная функция.

О п р е д е л е н и е 2.3. Систему (2.10) назовем 0-*управляемой*, если для любой непрерывной начальной функции $\eta$ существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t > 0$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{2.12}$$

Если тождество (2.12) возможно обеспечить управлением, удовлетворяющим условию $u(t) \equiv 0$, $t > t_1$, то систему (2.10) назовем *полностью* 0-*управляемой*.

Критерий полной 0-управляемости имеет следующий вид [24].

Т е о р е м а 2.3. *Для того чтобы система* (2.10) *была полностью* 0-*управляема необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\operatorname{rank}\left[pI_n - A(e^{-ph}),\, B(e^{-ph})\right] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

Как и ранее, зафиксируем произвольный набор базисных матриц $\widehat{T} = \{T_i,\ i = \overline{1,m}\}$, положим $T = T_m$, вычислим любую матрицу $S \in \mathbf{S}_{\widehat{T}}$ и построим матрицу $G(\lambda)$. В статье [26] доказан критерий 0-управляемости.

Т е о р е м а 2.4. *Для того чтобы система* (2.10) *была* 0-*управляема необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\operatorname{rank}\left[pI_n - A(e^{-ph}),\, B(e^{-ph}),\, G(e^{-ph})\right] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

Пусть задана система (2.10) с начальным условием (2.11). Предположим, что для этой системы (2.10) условие (2.13) не имеет места, но выполняется условие теоремы 2.4. Тогда в силу (2.14) и теоремы 2.3 система (1.34) при $D(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = G(\lambda)$ полностью

0-управляема. Зададим для системы (1.34) начальные условия $x(t) = \eta(t)$, $v_i(t) \equiv 0$, $t \in [-mh, 0]$, $i = 1, 2$. Для заданной начальной функции $\eta$, используя метод финитного управления [24], решим задачу полной 0-управляемости. То есть построим управление $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t > 0$ ($v_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$), обеспечивающее тождества $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, $v_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $t > t_1$. Подставим найденные $v_1(t)$, $v_2(t)$ в (1.31) при $T_\psi(\lambda) = T$, $S_\psi(\lambda) = S$ и, кроме того, положим $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [-mh, 0]$. Легко видеть, что определяемое таким образом управление $u(t)$, $t > 0$, обеспечит (2.12).

## Заключение

Для линейных автономных систем нейтрального типа предложен подход к задачам проектирования управления в виде обратной связи на базе нового класса гибридных регуляторов. К основным достоинствам использования гибридных регуляторов следует отнести возможность их применения к системам, не удовлетворяющим «традиционным» свойствам управляемости. В качестве одного из возможных приложений применения гибридных регуляторов изучена новая задача управления коэффициентами характеристического квазиполинома системы нейтрального типа. Получены достаточные условия разрешимости задачи модальной управляемости в классе гибридных регуляторов, применимые в случае, когда известные в литературе [14] достаточные условия модальной управляемости не выполняются. В качестве другого приложения гибридных регуляторов предложена методика их использования для реализации метода финитного управления при решения задачи 0-управляемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pekař L., Gao Q. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results // IEEE Access. 2018. Vol. 6. P. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453
2. Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C. T., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay // IEEE Control Systems Magazine. 2011. Vol. 31. Issue 1. P. 38–65. https://doi.org/10.1109/MCS.2010.939135
3. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. Vol. 39. Issue 10. P. 1667–1694. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5
4. Gu K., Niculescu S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2003. Vol. 125. Issue 2. P. 158–165. https://doi.org/10.1115/1.1569950
5. Zhou Bin, Duan Guang-Ren. Pole assignment of high-order linear systems with high-order time-derivatives in the input // Journal of the Franklin Institute. 2020. Vol. 357. Issue 3. P. 1437–1456. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.10.030
6. Zaitsev V., Kim I. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 17. Article number: 2158. https://doi.org/10.3390/math9172158
7. Gu Da-Ke, Liu Guo-Ping, Duan Guang-Ren. Robust stability of uncertain second-order linear time-varying systems // Journal of the Franklin Institute. 2019. Vol. 356. Issue 16. P. 9881–9906. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.09.014
8. Carniato L. A., Carniato A. A., Teixeira M. C. M., Cardim R., Mainardi Junior E. I., Assunção E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback // International Journal of Control. 2020. Vol. 93. Issue 5. P. 1127–1146. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1495341
9. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Mathematical Journal. 2022. Vol. 63. Issue 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X
10. Хартовский В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022.

11. Зайцев В. А., Ким И. Г. Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2022.
12. Борухов Т. В., Гайшун И. В., Тимошпольский В. И. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики. Минск: Беларуская навука, 2009.
13. Марченко В. М. Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16525910
14. Марченко В. М., Якименко А. А. О модальном управлении многовходных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1534–1543. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11602165
15. Павловская А. Т., Хартовский В. Е. Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа регуляторами с обратной связью динамической структуры // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 3–18. https://doi.org/10.7868/S0002338814030123
16. Метельский А. В., Хартовский В. Е. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0374064116110078
17. Хартовский В. Е. Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 11. С. 3–19. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30624362
18. Метельский А. В., Хартовский В. Е., Урбан О. И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. https://doi.org/10.1134/S0374064116030122
19. Хартовский В. Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390. https://doi.org/10.1134/S0374064117030086
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
21. Хартовский В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 290–311. https://doi.org/10.35634/vm200211
22. Хартовский В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 102–121. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-08
23. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
24. Марченко В. М. О полной управляемости систем с запаздыванием // Проблемы управления и теории информации. 1979. Т. 8. № 5–6. P. 421–432. https://zbmath.org/0431.93010
25. Хартовский В. Е. Об управлении не полностью управляемыми дифференциально-разностными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 47–58. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15557467
26. Хартовский В. Е. Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 3–11. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12988545

Поступила в редакцию 20.12.2023

Принята к публикации 25.02.2024

Хартовский Вадим Евгеньевич, д. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7531-8711
E-mail: hartovskij@grsu.by

**Цитирование:** В. Е. Хартовский. К вопросу управления системами нейтрального типа гибридными регуляторами с обратной связью по состоянию // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 91–113.

*V. E. Khartovskii*

**On the issue of control of neutral-type systems by hybrid controllers with state feedback**

*Keywords:* neutral type system, hybrid controller, feedback, properties, modal controllability, finite control method.

MSC2020: 93C41, 34K34, 34K35

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-07

For linear autonomous systems of neutral type, an approach to control design problems in the form of feedback based on a new class of hybrid controllers is proposed. The structure of hybrid regulators necessarily includes a differential equation, so the closed system becomes differential-algebraic. A distinctive feature of hybrid controllers is the existence of elementary transformation of equations of a closed-loop system, which make it possible to obtain an independent subsystem of neutral type. In this case, the specified subsystem of neutral type uniquely determines the behavior of the solution $x(t)$ of the original open-loop system (possibly as a vector component of the solution vector of the closed-loop system). The main advantages of using hybrid controllers include the possibility of their application to systems that do not satisfy the "traditional" controllability properties. The properties of hybrid controllers have been studied. The author gives an example of using these controllers to solve a new problem of controlling the coefficients of a characteristic quasi-polynomial in the case where the approaches known in the literature are not applicable. The possibility of using hybrid controllers to solve the 0-controllability problem using the finite control method is demonstrated.

REFERENCES

1. Pekař L., Gao Q. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results, *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453
2. Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C. T., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay, *IEEE Control Systems Magazine*, 2011, vol. 31, issue 1, pp. 38–65. https://doi.org/10.1109/MCS.2010.939135
3. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, 2003, vol. 39, issue 10, pp. 1667–1694. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5
4. Gu K., Niculescu S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2003, vol. 125, issue 2, pp. 158–165. https://doi.org/10.1115/1.1569950
5. Zhou Bin, Duan Guang-Ren. Pole assignment of high-order linear systems with high-order time-derivatives in the input, *Journal of the Franklin Institute*, 2020, vol. 357, issue 3, pp. 1437–1456. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.10.030
6. Zaitsev V., Kim I. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 17, article number: 2158. https://doi.org/10.3390/math9172158
7. Gu Da-Ke, Liu Guo-Ping, Duan Guang-Ren. Robust stability of uncertain second-order linear time-varying systems, *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, issue 16, pp. 9881–9906. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.09.014
8. Carniato L.A., Carniato A. A., Teixeira M. C. M., Cardim R., Mainardi Junior E. I., Assunção E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback, *International Journal of Control*, 2020, vol. 93, issue 5, pp. 1127–1146. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1495341
9. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, issue 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X

10. Khartovskii V. E. *Upravlenie lineinymi sistemami neitral'nogo tipa: kachestvennyi analiz i realizatsiya obratnykh svyazei* (Control of linear systems of neutral type: qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: Yanka Kupala State University of Grodno, 2022.
11. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Modal'noe upravlenie i stabilizatsiya lineinykh sistem staticheskoi obratnoi svyaz'yu po vykhodu* (Modal control and stabilization of linear systems by static output feedback), Izhevsk: Udmurt State University, 2022.
12. Borukhov V. T., Gaishun I. V., Timoshpol'skii V. I. *Strukturnye svoistva dinamicheskikh sistem i obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* (Structural properties of dynamic systems and inverse problems of mathematical physics), Minsk: Belaruskaya navuka, 2009.
13. Marchenko V. M. Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to the type of feedback, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, issue 7, pp. 1014–1028. https://doi.org/10.1134/S0012266111070111
14. Marchenko V. M., Yakimenko A. A. Modal control of multi-input systems of neutral type with retarded argument, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, issue 11, pp. 1595–1604. https://doi.org/10.1134/S0012266108110116
15. Pavlovskaya A. T., Khartovskii V. E. Control of neutral delay linear systems using feedback with dynamic structure, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, issue 3, pp. 305–319. https://doi.org/10.1134/S1064230714030125
16. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 11, pp. 1453–1468. https://doi.org/10.1134/S0012266116110070
17. Khartovskii V. E. Modal controllability for systems of neutral type in classes of differential-difference controllers, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, issue 11, pp. 1941–1954. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017
18. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E., Urban O. I. Solution damping controllers for linear systems of the neutral type, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 3, pp. 386–399. https://doi.org/10.1134/S0012266116030125
19. Khartovskii V. E. Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, issue 3, pp. 366–381. https://doi.org/10.1134/S0012266117030089
20. Gantmacher F. R. *The theory of matrices. Vol. 1*, Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 2000.
21. Khartovskii V. E. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Application to the 0-controllability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 290–311 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200211
22. Khartovskii V. E. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. II. Canonical representation and structural properties, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 102–121 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-08
23. Butkovskii A. G. *Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* (Methods for controlling systems with distributed parameters), Moscow: Nauka, 1975.
24. Marchenko V. M. On complete controllability of systems with delay, *Problems of Control and Information Theory*, 1979, vol. 8, nos. 5–6, pp. 421–432 (in Russian). https://zbmath.org/0431.93010
25. Khartovskii V. E. Control of incompletely controllable differential-difference systems with delay, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, issue 7, pp. 1142–1153. https://doi.org/10.1134/S0005117908070059
26. Khartovskii V. E. A generalization of the problem of complete controllability for differential systems with commensurable delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, issue 6, pp. 847–855. https://doi.org/10.1134/S106423070906001X

Received 20.12.2023

Accepted 25.02.2024

Vadim Evgen’evich Khartovskii, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Y. Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7531-8711
E-mail: hartovskij@grsu.by

**Citation:** V. E. Khartovskii. On the issue of control of neutral-type systems by hybrid controllers with state feedback, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 63, pp. 91–113.