

УДК 519.651.2

© *А. В. Чернов*

О ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИЙ ГАУССА И ЛАПЛАСА В СОЧЕТАНИИ С ТЕОРЕМОЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследуется специальный класс аппроксимаций измеримых функций многих переменных на единичном координатном кубе. Основу построения этого класса составляет теорема Колмогорова (в версии Шпрехера–Голубкова) о представлении произвольной непрерывной функции f многих переменных в виде конечной суперпозиции непрерывных функций одного переменного: так называемых внешних (зависящих от f) и одной внутренней Ψ (не зависящей от f и монотонной). Изучаемый класс в случае непрерывных функций f получается посредством аппроксимации внешних функций линейными комбинациями квадратичных экспонент (функций Гаусса), а внутренней функции Ψ — линейными комбинациями функций Лапласа. Измеримая функция f , как известно, аппроксимируется непрерывной в соответствии с классической теоремой Лузина (с точностью до множества малой меры). Эффективность такого подхода основана на утверждениях о возможности сколь угодно точной аппроксимации на любом фиксированном конечном отрезке материнского вейвлета «мексиканская шляпа» линейной комбинацией двух функций Гаусса, а также о возможности сколь угодно точной равномерной аппроксимации непрерывных монотонных функций монотонной линейной комбинацией сдвигов и сжатий интеграла Лапласа (функций Лапласа). Доказывается всюду плотность изучаемого класса аппроксимаций в классе непрерывных функций многих переменных на координатном кубе. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность аппроксимаций изучаемого класса на примере непрерывных и кусочно непрерывных функций двух переменных.

Ключевые слова: аппроксимация функций многих переменных, теорема Колмогорова, функция Гаусса, интеграл Лапласа, квадратичная экспонента.

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-08

Введение

Проблема аппроксимации функций многих переменных имеет важное теоретическое и прикладное значение. Указанная задача часто возникает из потребностей компьютерной томографии, теории нейронных сетей и теории обучения и поэтому вообще достаточно актуальна. Автора эта проблема интересует, главным образом, с точки зрения отыскания эффективных способов понижения размерности аппроксимируемых задач математического программирования, возникающих в результате параметрической дискретизации управляющей функции при численном решении распределенных задач оптимального управления. В рамках применения так называемых прямых методов численного решения таких задач за счет предположения об однозначной разрешимости управляемой системы для каждого допустимого управления функционалы задачи сводятся к функциям конечного числа переменных — параметров аппроксимации управляющей функции, а исходная бесконечномерная задача оптимизации — к конечномерной, которая в этом случае и понимается как аппроксимирующая задача. Актуальным является поиск такого класса \mathcal{E} функций, аппроксимирующих неизвестное управление, который обеспечивал бы высококачественную аппроксимацию для управляющих функций из достаточно обширного множества при использовании не слишком большого количества параметров аппроксимации. Известные

параметры аппроксимации определяются путем минимизации значения целевого функционала, вычисляемого на функциях из класса \mathcal{E} , если они являются допустимыми по смыслу задачи, либо на допустимых суперпозициях, содержащих функции класса \mathcal{E} . Подробнее см. в [1].

В [2] (в качестве решения 13-й проблемы Гильберта) была доказана

Теорема А. Н. Колмогорова. *При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\psi^{p,q}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{p,q}(x_p) \right],$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

Впоследствии это утверждение неоднократно уточнялось и развивалось, см., например, [3–5] (там же см. дальнейшую библиографию). О подходах к аппроксимации функций многих переменных, идейно близких теореме Колмогорова, см. обзор в [1].

Между тем, необходимо отметить, что внутренние и внешние функции в представлении А. Н. Колмогорова не годятся для практического использования по следующим причинам: 1) алгоритм их построения очень сложен; 2) будучи непрерывными, они ни в одной точке не дифференцируемы; 3) они не допускают построения графика. Однако для практических целей точное представление не требуется, достаточно лишь указать способ их эффективной аппроксимации функциями некоторой простой, унифицированной структуры. Довольно естественно здесь возникает мысль использовать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами (или одно из ее обобщений), см., например, [5]. Однако представление многочленами не всегда удобно в виду того, что может потребоваться учет высоких степеней (что приведет к неустойчивости аппроксимации) и того, что отдельные слагаемые в таком представлении неравноценны. Поэтому актуальным является поиск иных способов. Один из таких способов был предложен в [1]. При этом использовалась модификация теоремы А. Н. Колмогорова в стиле [3, 4]. А именно, результаты работы [4, разделы «Введение», «Построение внутренних функций»], опирающейся в свою очередь на [3] — их можно суммировать в следующем утверждении.

Л е м м а 0.1. *При произвольно заданных числах — натуральном $n \geq 2$, алгебраическом $\lambda > 0$ степени $\deg \lambda \geq n$, натуральном $\gamma \geq 2(n+1)$ и $\sigma = \frac{1}{\gamma-1}$ существует действительная непрерывная монотонно возрастающая функция одного переменного $\Psi(y)$, $y \geq 0$, такая, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде*

$$f(x) = \sum_{q=0}^{2n} F_q[G_q(x)], \quad G_q(x) = \sum_{p=1}^n \lambda^p \Psi(x_p + \sigma q), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

где семейство действительных непрерывных функций одного переменного $\{F_q(y), q = \overline{0, 2n}\}$ определяется по функции f .

Отметим, что способ построения функции Ψ , описанный в [4], сложный и многоэтапный, причем сама функция представляется в виде бесконечного ряда. Поэтому его практическое использование затруднительно. Кроме того, функция Ψ определяется неоднозначно.

В [1] основу аппроксимации непрерывных функций одного переменного в представлении Колмогорова составлял класс линейных комбинаций функций Гаусса:

$$\Gamma = \{ \Phi = \Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \nu \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \},$$

где функции $\Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma]$ определяются формулой

$$\Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma](x) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x), \quad \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[-\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right],$$

$\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число (нужное для того только, чтобы избежать нуля в знаменателе). Отрезок $[a; b]$ выбирается достаточно большим для того, чтобы выполнялись условия

$$t + \sigma q \in [a; b], \quad \sum_{p=1}^n \lambda^p \Psi(x_p + \sigma q) \in [a; b] \quad \forall t \in [0; 1], \quad x \in E^n, \quad q = \overline{0, 2n},$$

где числа n, σ, λ и функцию Ψ считаем фиксированными и выбранными в соответствии с тем, как указано в лемме 0.1.

Соответственно, класс аппроксимаций \mathcal{E} в [1] определяется как множество

$$\left\{ \sum_{q=0}^{2n} \widehat{F}_q[\widehat{G}_q(x)], \widehat{G}_q(x) = \sum_{p=1}^n \lambda^p \widehat{\Psi}(x_p + \sigma q), \right. \\ \left. \widehat{\Psi}, \widehat{F}_q \in \Gamma, q = \overline{0, 2n} : \widehat{G}_q(x) \in [a; b] \forall x \in E^n \right\}.$$

В [1] была установлена справедливость следующих утверждений.

Л е м м а 0.2. Класс Γ является всюду плотным в $C[a; b]$.

Л е м м а 0.3. Класс \mathcal{E} является всюду плотным в $C(E^n)$.

Эффективность использования класса Γ базируется на доказанном в [6] утверждении о возможности сколь угодно точной аппроксимации на любом конечном отрезке материнского вейвлета «мексиканская шляпа» линейной комбинацией двух квадратичных экспонент; для вейвлета указанного типа такая эффективность известна.

Между тем, как указано в лемме 0.1, функция Ψ должна быть монотонной. Однако при использовании для ее аппроксимации функций класса Γ монотонность, очевидно, не гарантируется. Более того, в ряде численных экспериментов, представленных в [1], полученная аппроксимация функции Ψ оказалась немонотонной. А это, в свою очередь, ставит вопрос об отношении леммы 0.1 к теоретическому обоснованию полученных численных результатов и вообще об эффективности и применимости всей методики. Интересным, с практической точки зрения, является также вопрос и о том, какая именно аппроксимация (монотонная или необязательно монотонная) функции Ψ более эффективна при численной реализации исследуемой методики. Забегая вперед, скажем, что ответ оказался заранее неочевидным.

Проблема построения монотонной аппроксимации монотонных непрерывных функций исследовалась в [7]; монотонных кусочно непрерывных функций — в [8]. В частности, в [8] для кусочно непрерывной монотонной функции $\Psi(x)$ было предложено строить аппроксимацию в виде:

$$C + Q(x), \quad C \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \widehat{\Phi}_0 \left(\frac{x - \beta_i}{\gamma_i^2} \right), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \quad (0.1)$$

где

$$\widehat{\Phi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

— известный из математической статистики интеграл Лапласа. В [8] см. также соображения касательно эффективности такого способа аппроксимации.

Выражения для производных по параметрам получаются очевидным образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} Q(x) &= 2\alpha_j \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j^2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \beta_j} Q(x) &= -\frac{\alpha_j^2}{\gamma_j^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \beta_j}{\gamma_j^2}\right)^2\right], \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_j} Q(x) &= 2 \frac{x - \beta_j}{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial \beta_j} Q(x). \end{aligned}$$

По сравнению с применением для аппроксимации непосредственно квадратичных экспонент, здесь можно усмотреть лишь некоторое неудобство, связанное с тем, что интеграл Лапласа не выражается в элементарных функциях. Но с практической точки зрения, при использовании любого математического пакета, квадратичная экспонента (так же, как и интеграл Лапласа) вычисляется все равно приближенно. Кроме того, существуют математические пакеты (в частности, MATLAB), в которых реализована *функция ошибки (error function)*:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ясно, что $\widehat{\Phi}_0(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})$.

Подобно функции Гаусса, интеграл Лапласа обладает свойством локализации: достаточно знать его значения на $[0; 5]$, поскольку это нечетная функция, а при $x > 5$ значения ее практически не отличаются от $1/2$; на $[0; 5]$ из математической статистики известны таблицы значений, которые можно использовать в готовом виде, не тратя времени на вычисления (в точках между узлами сетки можно использовать линейную интерполяцию).

Следует отметить, что в [8] акцент был сделан именно на кусочно непрерывных монотонных функциях. Поэтому доказывалась возможность сколь угодно точной их «почти равномерной» аппроксимации вида (0.1), то есть равномерной, с точностью до множества сколь угодно малой меры. Функция $\Psi(x)$ из леммы 0.1 непрерывна. Можно было бы использовать для нее равномерные аппроксимации, построенные в [7]. Однако они существенно более громоздки. В данной статье мы доказываем возможность сколь угодно точной равномерной аппроксимации непрерывной монотонной функции в виде (0.1). Соответственно, в качестве класса \mathcal{E} выбирается

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\nearrow} &= \left\{ \sum_{q=0}^{2n} \widehat{F}_q[\widehat{G}_q(x)], \widehat{G}_q(x) = \sum_{p=1}^n \lambda^p \widehat{\Psi}(x_p + \sigma q), \right. \\ &\quad \left. \widehat{F}_q \in \Gamma, q = \overline{0, 2n}, \widehat{\Psi} \in \Upsilon, \widehat{G}_q(x) \in [a; b] \forall x \in E^n \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Upsilon = \{ \Psi = \Psi_\nu[\alpha, \beta, \gamma, C] \in \mathbf{C}^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \nu \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R} \},$$

функции $\Psi_\nu[\alpha, \beta, \gamma, C]$ определяются формулой

$$\Psi_\nu[\alpha, \beta, \gamma, C](x) = C + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - \beta_i}{\gamma_i^2}\right).$$

И соответственно, доказывается аналог леммы 0.3.

Сделаем краткий обзор о применении квадратичных экспонент для аппроксимации функций одного переменного (в частности, непрерывных, гладких, многочленов и т. д.). Интерполяция функциями Гаусса (их еще иногда называют ядрами Гаусса — Gaussian kernels) непрерывных функций рассматривалась, главным образом, на дискретной сетке, как правило, с равномерным шагом на всей числовой оси, либо на конечном множестве отрезка числовой оси, см., например, [9]. Соответствующие алгоритмы аппроксимации иногда называют *сеточными (grid)*. См., например, [10]. Исследовались также и многомерные аналоги, см., например, [11]. В основном, внимание исследователей концентрировалось на оценке погрешности аппроксимаций [12, 13]. Эффективность сеточных алгоритмов аппроксимации функциями Гаусса обосновывалась, например, в [14]. Помимо простой, равномерной сетки, используются также и более сложные конструкции типа многоуровневых сеток, см., например, [15]. Параметрами аппроксимации выступают обычно весовые коэффициенты функций Гаусса в соответствующих линейных комбинациях. Укажем также работу [11], где исследовался вопрос о наилучшем выборе параметров формы.

§ 1. Основной результат

Л е м м а 1.1. Пусть $\omega(\cdot)$ — кусочно постоянная неубывающая функция вида:

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m_1, \\ h_i, & x \in (m_i; m_{i+1}], \quad i = \overline{1, k-1}, \\ h_k, & x > m_k, \end{cases}$$

$$0 < h_i < h_{i+1}, \quad m_i < m_{i+1}, \quad i = \overline{1, k-1};$$

$$Q_\gamma(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - m_i}{\gamma}\right), \quad \gamma > 0, \quad \alpha_1 = h_1, \quad \alpha_i = h_i - h_{i-1}, \quad i = \overline{2, k}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и соответствующие множества

$$\Pi'_\delta = \bigcup_{i=1}^k (m_i - \delta; m_i + \delta), \quad \text{mes } \Pi'_\delta < \varepsilon, \quad \Pi_\delta = \mathbb{R} \setminus \Pi'_\delta,$$

такие, что

$$\omega(x) = C + Q_\gamma(x) + R(x), \quad C = \frac{h_k}{2},$$

где $|R(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \Pi_\delta$, причем

$$\sup_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \leq h_k = \sup_{x \in \Pi'_\delta} \omega(x), \quad \inf_{x \in \Pi'_\delta} \{C + Q_\gamma(x)\} \geq 0 = \inf_{x \in \Pi'_\delta} \omega(x).$$

Всякая функция вида $Q_\gamma(x)$ при $\alpha_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, возрастает на \mathbb{R} .

Доказательство см. в [8, теорема 2.3].

Л е м м а 1.2. Пусть $\Psi(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на $[a; b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $Q \in \Upsilon$ такая, что $|\Psi(x) - Q(x)| \leq \varepsilon \forall x \in [a; b]$.

Доказательство. Пользуясь теоремой Кантора, выберем разбиение

$$a = s_1 < s_2 < \dots < s_k = b$$

так, чтобы

$$\max_{i=1, k-1} \max_{x, y \in [s_i; s_{i+1}]} |\Psi(x) - \Psi(y)| < \varepsilon.$$

Положим

$$\lambda = \max_{i=1, k-1} (s_{i+1} - s_i), \quad \omega_\varepsilon(x) = \left\{ h_i = \frac{\Psi(s_i) + \Psi(s_{i+1})}{2}, x \in [s_i; s_{i+1}]; i = \overline{1, k-1} \right\}.$$

Для упрощения последующих рассуждений будем считать, что числа h_i образуют строго возрастающую последовательность (из дальнейшего текста доказательства ясно, что это несущественное допущение). По построению, функция $\omega_\varepsilon(x)$ кусочно постоянная, неубывающая и имеет место оценка

$$\sup_{x \in [a; b]} |\omega_\varepsilon(x) - \Psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, согласно лемме 1.1, с учетом сделанного допущения, найдутся числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $C \in \mathbb{R}$, и соответствующие множества

$$\Pi'_\delta = \bigcup_{i=2}^{k-1} (s_i - \delta; s_i + \delta), \quad \text{mes } \Pi'_\delta < \frac{\lambda}{10}, \quad \Pi_\delta = [a; b] \setminus \Pi'_\delta,$$

такие, что

$$\omega_\varepsilon(x) = C + Q_\gamma(x) + R(x), \quad Q_\gamma(x) = \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \widehat{\Phi}_0\left(\frac{x - s_i}{\gamma}\right), \quad \alpha_i > 0,$$

где $|R(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \Pi_\delta$. По построению очевидно, что

$$|C + Q_\gamma(x) - \Psi(x)| \leq |C + Q_\gamma(x) - \omega_\varepsilon(x)| + |\omega_\varepsilon(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Pi_\delta.$$

С другой стороны, в силу монотонности функции $C + Q_\gamma(x)$,

$$\begin{aligned} \{C + Q_\gamma(x) : x \in [s_i - \delta; s_i]\} &\subset [C + Q_\gamma(s_i - \delta); C + Q_\gamma(s_i)] \subset \\ &\subset [h_{i-1} - \varepsilon/2; h_{i-1} + \varepsilon/2], \quad i = \overline{2, k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|C + Q_\gamma(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [s_i - \delta; s_i], \quad i = \overline{2, k-1}.$$

Аналогично,

$$|C + Q_\gamma(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [s_i; s_i + \delta], \quad i = \overline{2, k-1}.$$

Стало быть,

$$|C + Q_\gamma(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Остается заметить, что $C + Q_\gamma(\cdot) \in \Upsilon$. □

Непосредственно из лемм 0.1, 0.2, 1.2 вытекает

Теорема 1.1. Класс \mathcal{E}_γ является всюду плотным в $C(E^n)$.

Напомним формулировку теоремы Н. Н. Лузина [16, теорема VI.6.4, с. 145].

Л е м м а 1.3. *Если функция f измерима и почти всюду конечна на множестве $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная во всем \mathbb{R}^n функция φ , что*

$$\text{mes} \{x \in \Pi: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

Непосредственно из теоремы 1.1 и леммы 1.3 вытекает

Т е о р е м а 1.2. *Пусть функция f измерима и почти всюду конечна на E^n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция Φ_ε класса \mathcal{E}_ν и подмножество $\Pi_\varepsilon \subset E^n$ такие, что $\text{mes} E^n \setminus \Pi_\varepsilon < \varepsilon$,*

$$|\Phi_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E^n \setminus \Pi_\varepsilon.$$

Из доказательства теоремы Н. Н. Лузина ясно, что в случае кусочно непрерывной функции $f(x)$ множество Π_ε , фактически, будет представлять собой малую окрестность линий (поверхностей) разрыва функции $f(x)$.

§ 2. Результаты численных экспериментов

При проведении численных экспериментов везде использовались значения параметров $\lambda = \sqrt[n]{2}$, $\gamma = 2(n+1)$, $\sigma = \frac{1}{\gamma-1}$, $n = 2$. Что касается параметров a и b , в тексте программ их задавать не требовалось, поскольку функции класса $\Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma]$ естественно определены на всей числовой оси, а не только на $[a; b]$. Формально можно считать, что $a < 0$, $b > 0$, причем $|a|$, $|b|$ достаточно велики. Фиксированный (достаточно большой) отрезок $[a; b]$ нужен был только для того, чтобы доказать плотность вложения класса аппроксимаций в класс непрерывных функций. Представленные далее тестовые функции 1–3 мы берем из работы [1] для того, чтобы можно было сравнить с результатами использования описанной там методики (отличающейся тем, что для необязательно монотонной аппроксимации функции Ψ использовались функции класса Γ).

Тест № 1. Рассмотрим на квадрате E^2 функцию двух переменных, см. рис. 1, $f(x_1, x_2) = 3 \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi^2 x_1 x_2)$. Эта функция выбиралась из следующего соображения: должно быть несколько локальных «всплесков» и «впадин», чтобы график не имел слишком простой для аппроксимации формы. Выберем разбиение сторон квадрата

$$0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_\ell = 1, \quad 0 = \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_m = 1,$$

с равномерным шагом. Будем брать $\ell = m = 25$. Таким образом, получаем сетку из 625 контрольных точек (ξ_i, η_j) , $i = \overline{1, \ell}$, $j = \overline{1, m}$. В этих точках мы будем сравнивать значение аппроксимации и аппроксимируемой функции. Заметим, что в аппроксимации функции Ψ в контексте ее использования как аргумент аппроксимаций внешних функций Колмогорова $F_q(t)$ можно взять $C = 0$. Действительно, прибавление опускаемого выражения $C \sum_{p=1}^n \lambda^p$ к аргументу t равносильно тому, что указанное выражение вычитается из параметров β в $\Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma](t)$, см. ниже. Поэтому переход от произвольного C к нулевому C означает указанное преобразование параметров β . При заданном $\nu \in \mathbb{N}$ определим подклассы (с учетом сделанного выше замечания принимаем $C = 0$ в аппроксимации функции Ψ):

$$\Gamma_\nu = \left\{ \Phi = \Phi_\nu^\varepsilon[\alpha, \beta, \gamma] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu} \right\},$$

$$\Upsilon_\nu = \left\{ \Psi = \Psi_\nu[\alpha, \beta, \gamma, 0] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu} \right\},$$

$$\mathcal{E}_\nu^\nu = \left\{ \sum_{q=0}^{2n} \widehat{F}_q[\widehat{G}_q(x)], \widehat{G}_q(x) = \sum_{p=1}^n \lambda^p \widehat{\Psi}(x_p + \sigma q), \widehat{F}_q \in \Gamma_\nu, q = \overline{0, 2n}, \widehat{\Psi} \in \Upsilon_\nu \right\}.$$

Отметим, что каждая функция класса $\mathcal{E}_{\gamma}^{\nu}$ определяется набором параметров $v \in \mathbb{R}^{\mu}$, $\mu = 3\nu 2(n+1)$, состоящим из троек $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$, относящихся к функциям \widehat{F}_q , $q = \overline{0, 2n}$, класса Γ_{ν} и функции $\widehat{\Psi}$ класса Υ_{ν} . Соответствующий класс векторов v будем обозначать $V_{\nu} \subset \mathbb{R}^{\mu}$. В этом смысле будем писать $Q = Q[v]$, $v \in V_{\nu}$, для $Q \in \mathcal{E}_{\gamma}^{\nu}$.

Поставим задачу найти по возможности наилучшую аппроксимацию функции $f(x)$ функцией класса $\mathcal{E}_{\gamma}^{\nu}$. Для этого произведем минимизацию квадратичной невязки — суммы квадратов отклонений аппроксимации от аппроксимируемой функции в контрольных точках:

$$\mathcal{K}[v] = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \{f(\xi_i, \eta_j) - Q[v](\xi_i, \eta_j)\}^2 \rightarrow \min_{v \in V_{\nu}}. \quad (2.1)$$

Известно, что задача вида (2.1) является, вообще говоря, некорректной. Поэтому для обеспечения устойчивости процесса численного решения имеет смысл рассматривать ее регуляризованный аналог:

$$\mathcal{K}_{\rho}[v] = \mathcal{K}[v] + \rho |v|^2 \rightarrow \min_{v \in V_{\nu}}, \quad (2.2)$$

с малым параметром (регуляризации) $\rho > 0$. Мы брали $\rho = 10^{-15}$ и меньше. Задачу (2.2) мы решали методами DFP (Дэвидона–Флетчера–Пауэлла) и BFS (Бройдена–Флетчера–Шенно). Собственно, BFS оказался более успешным, особенно на завершающем этапе минимизации. Для одномерного поиска использовались методы квадратичной интерполяции с регуляризацией шага, Брента (сочетание методов золотого сечения и квадратичной интерполяции) и Moré–Thuente [17]. Другие методы (в том числе квазиньютоновские — BFGS и Бройдена) не давали удовлетворительных результатов. Чтобы убедиться в улучшении качества аппроксимации при увеличении параметра ν , мы рассматривали два случая: $\nu = 5$ (то есть $\mu = 90$) и $\nu = 10$ (то есть $\mu = 180$). Мы брали $\varepsilon = 10^{-25}$. При использовании методов первого порядка для решения задачи минимизации квадратичной невязки требуется знать формулы ее частных производных по параметрам

$$w = (w_0, \dots, w_{2n}, w_{2n+1}), \quad w_i = (\alpha^i, \beta^i, \gamma^i) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \quad i = \overline{0, 2n+1}.$$

Об этом см. в работе [1].

Случай $\nu = 5$. Получены следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 30.545. Среднее отклонение в контрольных точках: 0.17214. Максимальное отклонение: 0.58883. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -3 до 3 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.02869$, $\delta_m = 0.0981383(3)$, см. рис. 2, 3. Приведем значения параметров по строкам $q = \overline{0, 5}$.

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{ccccc} -18\,160.731 & 8\,032.3631 & 7\,313.987 & 2\,428\,973.1579 & 6\,022.8794 \\ 706.4059 & 545.8296 & 201.623 & -6\,071.7639 & 7\,206.8312 \\ -26\,166.5939 & 2\,070.1402 & 1\,731.4516 & 7\,456\,329.2556 & -12.1132 \\ -6\,009.6619 & -15\,570\,038.0987 & -17\,666.2733 & 33\,563.2057 & 149.6749 \\ -1\,294.8535 & -675.0109 & -6\,019.0963 & -5\,407.6236 & -9\,168.0444 \\ 6.3327 & 13.7433 & -1.279 & -3.1498 & 0.17272 \end{array} \right.$$

$$\beta: \left\{ \begin{array}{ccccc} 516.2113 & 1\,227.6706 & -386.5955 & 186.2347 & 424.6895 \\ 1\,019.8959 & 410.9973 & 345.8397 & -358.4328 & 422.0582 \\ 728.0215 & 415.8755 & 438.2311 & 360.5162 & 401.1182 \\ 419.7423 & 414.946 & 172.8714 & 438.9302 & 330.0951 \\ 148.1186 & 409.562 & 364.0199 & 425.6529 & 411.2099 \\ 0.34916 & 0.22315 & 5.4422e-6 & 0.26428 & 1.86 \end{array} \right.$$

$$\gamma: \begin{cases} -67.8454 & -994.212 & -1\,043.2912 & 0.27412 & 26.3278 \\ -102.8167 & -70.3764 & -182.6996 & -143.0765 & -14.1445 \\ 247.7612 & 119.6029 & 76.3186 & 0.022954 & 6.1165 \\ 11.4042 & 1.331 & -9.8834 & 19.8768 & 0.1621 \\ 651.0508 & -4.4026 & 43.4004 & 40.0144 & -0.78365 \\ -0.70798 & 0.52542 & -2.5274e-5 & -0.25587 & 0.36517 \end{cases}$$

Случай $\nu = 10$. Получены следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 12.2429. Среднее отклонение в контрольных точках: 0.10235. Максимальное отклонение: 0.48556. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -3 до 3 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.017058$, $\delta_m = 0.08092(6)$, см. рис. 4, 5. Значения параметров не приводим в виду громоздкости соответствующего массива данных.

Таким образом, при увеличении количества параметров от $\nu = 5$ до $\nu = 10$ точность аппроксимации возросла.

Тест № 2. Рассмотрим на квадрате E^2 непрерывную функцию двух переменных, см. рис. 6, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$. Остальные параметры выберем такими же, как для теста № 1. Аппроксимация строилась для случая $\nu = 5$. Решая задачу (2.2), получаем следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 2.8543. Среднее отклонение в контрольных точках: 0.052443. Максимальное отклонение: 0.22891. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -1 до 1 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.0262215$, $\delta_m = 0.114455$, см. рис. 7. Приведем значения параметров по строкам $q = \overline{0, 5}$.

$$\alpha: \begin{cases} -18\,616.1511 & 6\,007.7701 & 9\,965.7955 & 28.165 & 10\,297.4572 \\ -231.5916 & 2\,824.8351 & 110.1921 & -6\,140.9554 & 7\,232.2538 \\ -26\,362.4459 & 2\,412.784 & 69.9068 & 10.8647 & -3.5504 \\ -4\,392.3942 & 15\,720.9285 & -1.6173 & 28\,501.2226 & -24\,280.3369 \\ -2\,180.613 & -8\,678.5233 & -7\,694.3704 & -5\,602.6802 & -38\,442.1976 \\ 6.2177 & 13.1047 & -1.8346 & -2.7544 & 0.78473 \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} 456.0497 & 767.5926 & -436.0089 & 226.4563 & 383.3927 \\ 375.2608 & 396.5004 & 456.6355 & -182.2765 & 380.1968 \\ 532.2896 & 510.276 & 362.7308 & 342.177 & 371.8156 \\ 386.3297 & 379.3139 & -0.012706 & 396.0513 & 307.3416 \\ 327.8029 & 384.0787 & 328.8973 & 391.174 & 379.257 \\ 0.29974 & 0.055433 & -0.023885 & 0.18338 & 1.3915 \end{cases}$$

$$\gamma: \begin{cases} -50.601 & -721.9521 & -1\,146.3847 & 0.25721 & 13.4283 \\ 3.8612 & -18.6303 & -133.5954 & -112.102 & -7.504 \\ 88.2956 & 93.9861 & 29.1157 & 0.025955 & 3.6744 \\ 11.0274 & -1.6231 & 0.069347 & 13.6662 & -0.27935 \\ 139.9527 & -4.4498 & 54.6534 & 38.7035 & -0.77595 \\ -0.72196 & 0.59941 & -0.044195 & -0.22516 & 0.69924 \end{cases}$$

Тест № 3. Рассмотрим на квадрате E^2 непрерывную функцию двух переменных, см. рис. 8, $f(x_1, x_2) = 3 \cos(2\pi[(x_1)^2 - (x_2)^2])$. Остальные параметры выберем такими же, как для теста № 1. Аппроксимация строилась для случая $\nu = 5$. Решая задачу (2.2), получаем следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 4.7353. Среднее отклонение в контрольных точках: 0.070869. Максимальное отклонение: 0.60706. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -3 до 3 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.0118115$, $\delta_m = 0.101176(6)$, см. рис. 9, 11. Приведем значения параметров по строкам $q = \overline{0, 5}$.

$$\alpha: \begin{cases} -13\,168.3591 & 248.4419 & 26\,613.164 & 18\,266.394 & -29\,457.4895 \\ -85.8626 & -57\,811.6838 & 2\,079.4766 & 95.6915 & 21\,700.7901 \\ -65\,160.0686 & 2.6452 & 8\,477.5445 & 8\,274.1839 & 7\,084.5805 \\ -16\,258.1506 & 25\,024.9952 & -0.075388 & 18\,752.0944 & -0.26789 \\ 0.082756 & -61.3953 & -26\,629.2243 & -608.3453 & -8\,120.7081 \\ 4.3495 & 6.7207 & -0.20745 & -8.8277 & 3.0545 \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} 192.1245 & 71.1527 & -44.5712 & 82.7896 & 164.2813 \\ 217.6645 & 188.3007 & 172.6877 & -46.132 & 221.2212 \\ 324.9829 & 135.5875 & 228.2436 & 206.5488 & 226.664 \\ 218.7633 & 265.2349 & 0.012035 & 220.0258 & -0.3269 \\ 171.6072 & 233.4002 & 140.9573 & 232.7829 & 262.6152 \\ 1.0373 & -0.31809 & 0.041667 & 0.29712 & 1.5786 \end{cases}$$

$$\gamma: \begin{cases} -36.9832 & -62.6036 & -810.6308 & 0.096038 & -0.067059 \\ -11.027 & -0.11781 & 66.4654 & 41.1754 & -29.0343 \\ 88.0613 & 16.9664 & 42.1658 & -0.0041668 & -24.0006 \\ 25.6798 & -14.7994 & 0.097646 & 26.6535 & -0.31252 \\ 5.6581 & -10.793 & 860.4131 & 21.2593 & -19.9797 \\ -0.54597 & 0.55834 & -1.7633e-7 & -0.66684 & 0.5201 \end{cases}$$

Тест № 4. Рассмотрим на квадрате E^2 разрывную функцию двух переменных $f(x_1, x_2) = 3 \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \operatorname{sign}(\cos(\pi^2 x_1 x_2))$, см. рис. 12. Остальные параметры выберем такими же, как для теста № 1.

Случай $\nu = 5$. Получены следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 186.7182. Среднее отклонение в контрольных точках: 0.38403. Максимальное отклонение: 3.2329. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -3 до 3 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.064005$, $\delta_m = 0.538816(6)$, см. рис. 13, 14. Приведем значения параметров по строкам $q = \overline{0, 5}$.

$$\alpha: \begin{cases} -16\,803.8777 & 9\,348.5924 & 7\,579.743 & 2\,428\,973.4403 & 9\,981.7676 \\ 706.4065 & 201.1072 & 250.2328 & -6\,322.9314 & 7\,354.0321 \\ -27\,615.4516 & 2\,124.199 & 2\,134.9483 & 7\,456\,329.3381 & -176.7243 \\ -4\,730.9195 & -15\,570\,046.3665 & -17\,666.2816 & 30\,923.6748 & 353.0852 \\ -1\,379.5631 & -350.56 & -5\,967.3908 & -5\,062.9308 & -10\,248.8657 \\ 6.2984 & 13.7117 & -2.0624 & -3.1883 & 0.22873 \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} 477.1995 & 1\,404.7939 & -184.0391 & 171.5362 & 415.4631 \\ 1\,019.8961 & 390.3418 & 361.3823 & -289.0265 & 420.6322 \\ 761.055 & 434.9724 & 471.183 & 358.6717 & 411.9375 \\ 419.7883 & 428.5161 & 172.8714 & 441.5392 & 328.7437 \\ -72.1781 & 410.9106 & 364.5577 & 424.8966 & 413.4885 \\ 0.39457 & 0.21789 & -7.2343 & 0.27835 & 1.8868 \end{cases}$$

$$\gamma: \begin{cases} -53.7568 & -734.0726 & -1\,382.9447 & -0.055653 & 24.402 \\ -102.8093 & -56.7377 & -178.608 & -108.6311 & -13.9603 \\ 252.9492 & 114.511 & 73.8812 & -0.053837 & 10.6503 \\ 11.8316 & 5.0693 & -9.8833 & 20.3458 & 0.37622 \\ 666.947 & -4.7805 & 43.6358 & 38.7388 & -0.71542 \\ -0.69903 & 0.52967 & -0.00021873 & -0.25533 & 0.40834 \end{cases}$$

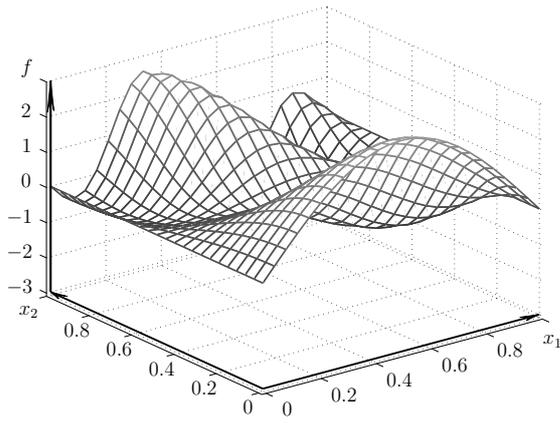


Рис. 1. Тест № 1, функция f

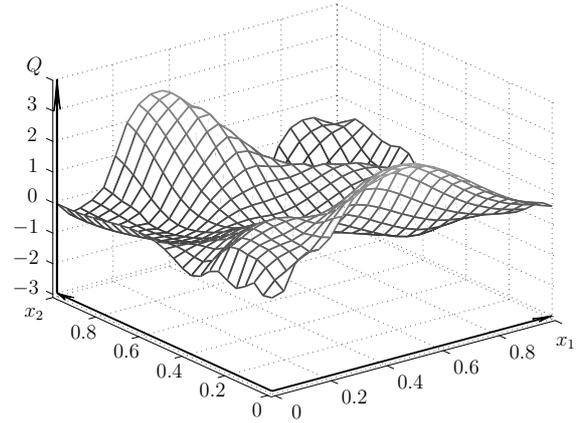


Рис. 2. Тест № 1, $\nu = 5$, аппроксимация $Q[v]$

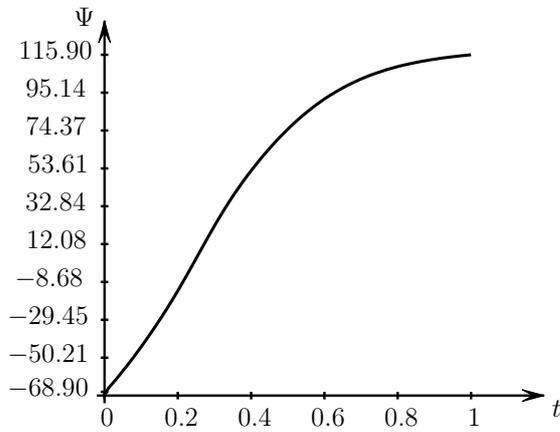


Рис. 3. Тест № 1, $\nu = 5$, аппроксимация функции Ψ

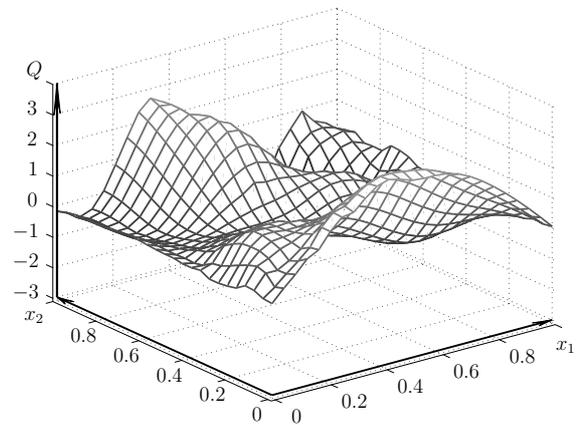


Рис. 4. Тест № 1, $\nu = 10$, аппроксимация $Q[v]$

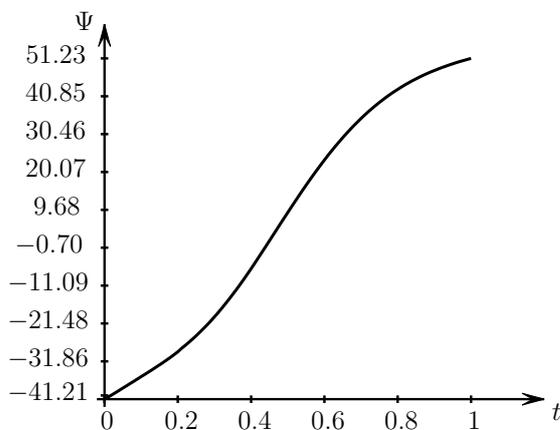


Рис. 5. Тест № 1, $\nu = 10$, аппроксимация функции Ψ

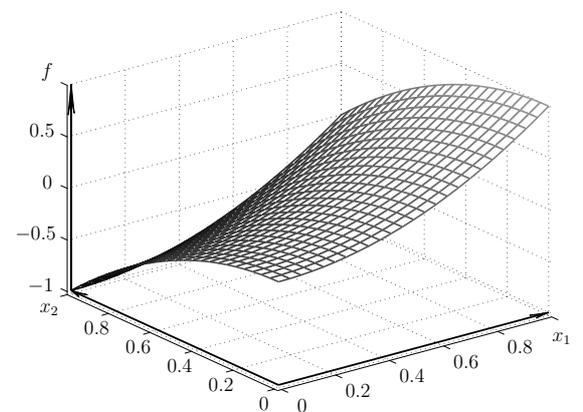


Рис. 6. Тест № 2, функция

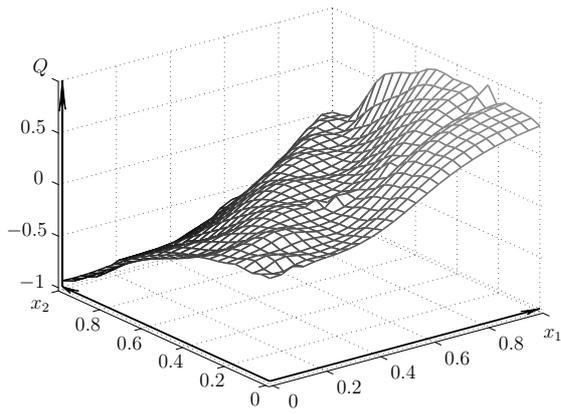


Рис. 7. Тест № 2, аппроксимация

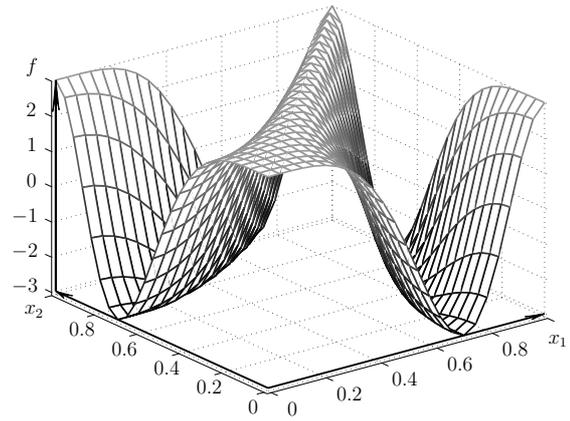


Рис. 8. Тест № 3, функция

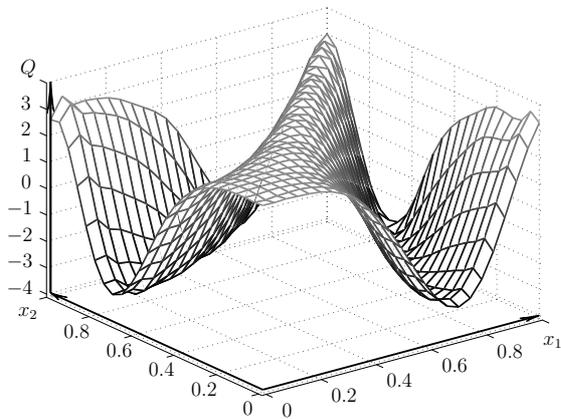


Рис. 9. Тест № 3, аппроксимация

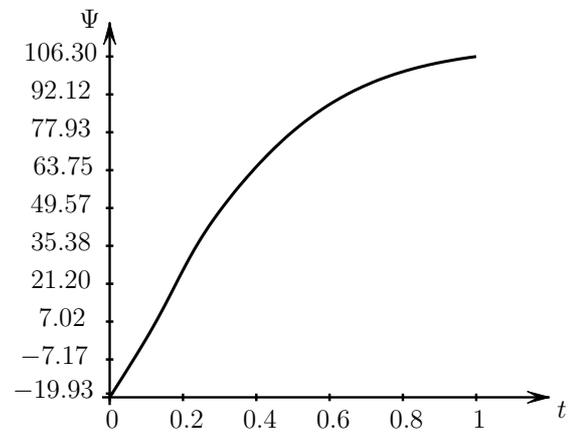


Рис. 10. Тест № 2, аппроксимация функции Ψ

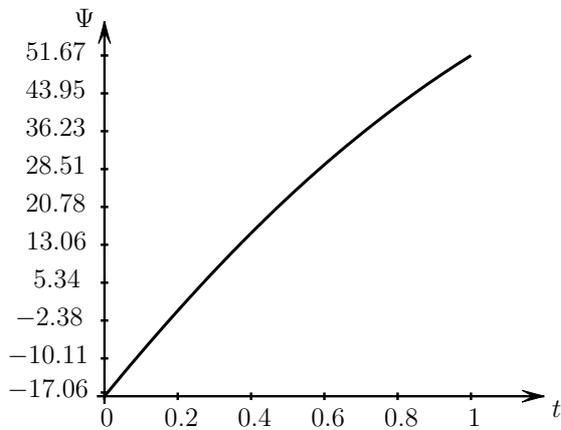


Рис. 11. Тест № 3, аппроксимация функции Ψ

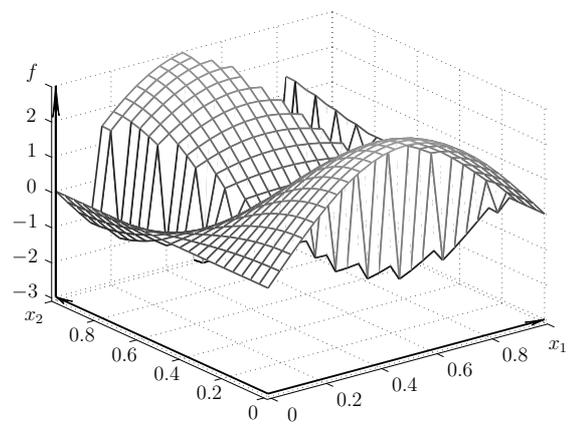


Рис. 12. Тест № 4, аппроксимируемая функция

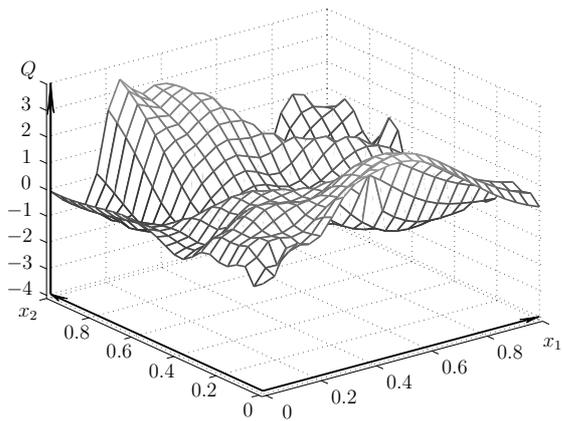


Рис. 13. Тест №4, $\nu = 5$, аппроксимация

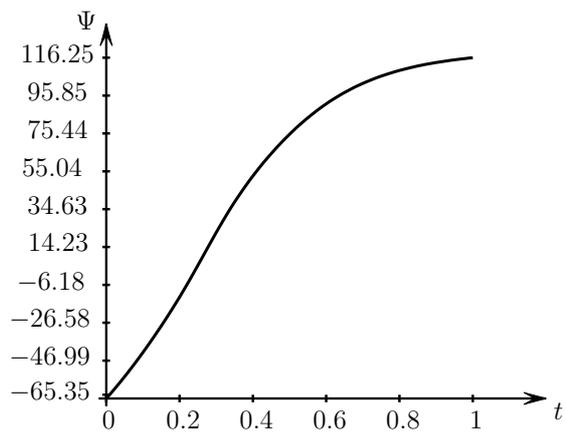


Рис. 14. Тест №4, $\nu = 5$, аппроксимация Ψ

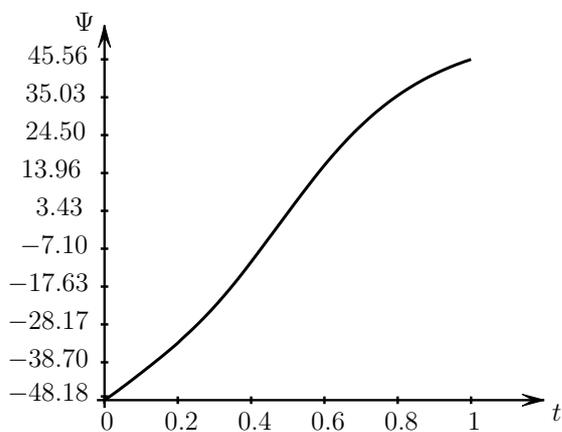


Рис. 15. Тест №4, $\nu = 10$, аппроксимация Ψ

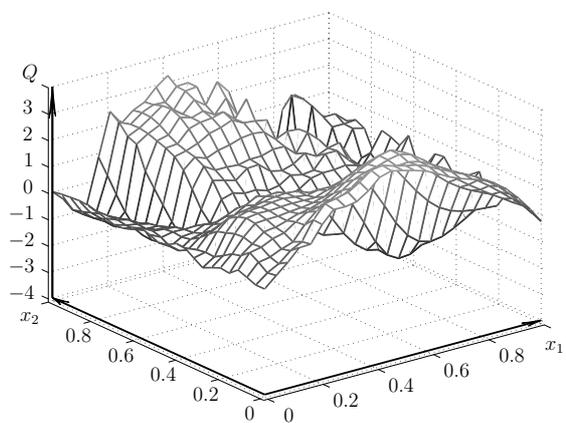


Рис. 16. Тест №4, $\nu = 10$, аппроксимация

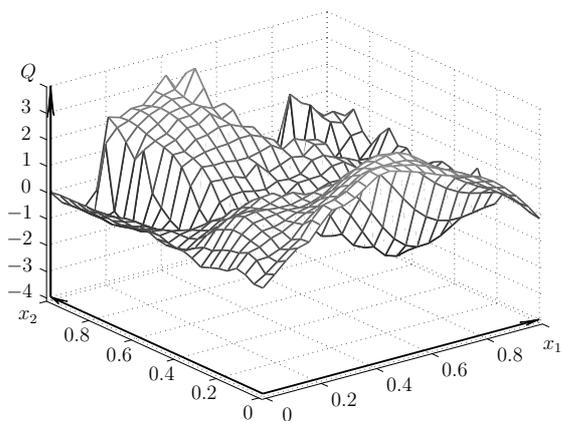


Рис. 17. Тест №4, $\nu = 10$, аппроксимация, $M = 3.0(28)$

Случай $\nu = 10$. Получены следующие результаты. Значение квадратичной невязки: 83.6123. Среднее отклонение в контрольных точках: $\Delta = 0.25501$. Максимальное отклонение: $\Delta_m = 1.7873$. Учитывая, что аппроксимируемая функция принимает значения от -3 до 3 , соответствующие относительные погрешности: $\delta = 0.0425$, $\delta_m = 0.2979$, см. рис. 16, 15. Значения параметров не приводим в виду громоздкости соответствующего массива данных.

При оценке этих результатов следует иметь в виду, что часть узловых точек находится вблизи линий разрыва, поэтому в них бессмысленно ожидать малости отклонений (гладкой) аппроксимации от (разрывной) аппроксимируемой функции. В соответствии с теоремой 1.2, для большей адекватности следует удалить из рассмотрения те узлы, которые близки к линиям разрыва. По этой же причине было бы наивно придавать какое-либо существенное значение величине максимального отклонения в контрольных точках в случае, если указанные узлы не удалены. В связи с указанными обстоятельствами, были проведены дополнительные численные эксперименты, суть которых состояла в том, чтобы, взяв в качестве начального приближения набор параметров, полученных при учете всех узлов, провести дальнейшую минимизацию квадратичной невязки при учете лишь тех узлов, в которых скачок значений аппроксимируемой функции не превосходит некоторой заданной величины M . Приведем кратко полученные результаты (в скобках после значения M указано количество удаляемых узлов, результаты представлены в формате $[Q, \Delta, \Delta_m]$):

$$\begin{array}{ll} M = 4 \quad (11): [67.0358, 0.23241, 1.5563]; & M = 3.8 \quad (14): [65.6462, 0.22634, 1.7594]; \\ M = 3.6 \quad (15): [62.0934, 0.22416, 1.5322]; & M = 3.4 \quad (19): [55.279, 0.21643, 1.5924]; \\ M = 3.2 \quad (25): [52.1901, 0.21353, 1.6248]; & M = 3.0 \quad (28): [48.7282, 0.21071, 1.4867]; \end{array}$$

см. рис. 17.

На основе результатов численных экспериментов, описанных выше, можно сделать следующие *выводы* (выводы работы [1] остаются справедливыми; здесь мы не будем их дублировать).

1. Проведенные численные эксперименты подтверждают предположение о том, что предлагаемый метод аппроксимации функций многих переменных на основе приближения одномерных функций в их представлении А. Н. Колмогорова (здесь и далее — в стиле леммы 0.1) линейными комбинациями функций Гаусса для F_q и линейными комбинациями с неотрицательными коэффициентами сдвигов и сжатий интеграла Лапласа для Ψ с варьируемыми параметрами позволяет получать качественные аппроксимации непрерывных функций с «нехаотическим» графиком при сравнительно малом количестве параметров.
2. Как видно из теста 4, предлагаемая методика оказывается эффективной (с очевидными оговорками) и в отношении кусочно непрерывных функций, в полном соответствии с теоремой 1.2. Среднее отклонение аппроксимации от аппроксимируемой функции в контрольных точках оказывается примерно в два раза больше по сравнению с непрерывным случаем. Но тут следует понимать, что свой вклад сюда вносят отклонения в точках, попадающих в множество $E^n \setminus \Pi_\varepsilon$.
3. По сравнению с методикой, описанной в работе [1] (отличающейся тем, что для необязательно монотонной аппроксимации функции Ψ использовались функции класса Γ_ν) точность аппроксимации оказалась чуть хуже, но порядок достигаемой точности сохраняется. Ухудшение достигаемого качества аппроксимации кажется, на первый взгляд, несколько неожиданным. Но по зрелом размышлении, ничего удивительного в этом нет. Действительно, условие монотонности аппроксимации выступает как, своего рода, дополнительное ограничение в задаче минимизации по параметрам. А стало быть, как бы сужает допустимое множество. Очевидно, что минимальное значение функции на более узком множестве совершенно естественно становится больше. А в лемме 0.1 речь идет о точном представлении непрерывной функции, а не об аппроксимации, основанной на таком представлении. Впрочем, в [1] в качестве критерия останова выбиралось условие малости нормы градиента, тогда как на этот раз — отсутствие существенных улучшений в течение 5000 итераций. Как видно из комментариев к численным экспериментам в [1], продвижение от этой отметки до малых значений нормы

градиента возможно, но оказывается весьма трудоемким при том, что достигаемое уменьшение значения целевой функции (квадратичной невязки) сравнительно невелико, и кроме того, съедается при отклонении значений параметров и координат узлов уже на малые величины (порядка 10^{-7}). Наконец, следует понимать, что достигаемая точность аппроксимации некоторым образом зависит от удачности выбора начального приближения. Теоретически возможно, что существует более удачный выбор начального приближения. В свете сказанного, имеет смысл сравнивать именно порядок достигаемой точности аппроксимации, а не конкретные значения.

4. Вид графика аппроксимации функции Ψ во всех тестах здесь, в отличие от работы [1], оказывается примерно схожим и напоминает дугу сигмоидной функции (играющей важную роль в теории нейросетей).
5. Устойчивость процесса численного решения задачи (2.2) наблюдается при использовании метода BFS в ходе многомерной оптимизации и метода Брента (с автоматическим переключением на метод квадратичной интерполяции в случае затруднений) для одномерного поиска (на завершающем этапе минимизации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. О применении функций Гаусса в сочетании с теоремой Колмогорова для аппроксимации функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 5. С. 784–801. <https://doi.org/10.31857/S0044466920050075>
2. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956. <https://www.mathnet.ru/rus/dan22050>
3. Sprecher D. A. On the structure of continuous functions of several variables // Transactions of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 115. P. 340–355. <https://doi.org/10.2307/1994273>
4. Голубков А. Ю. Построение внешних и внутренних функций представления непрерывных функций многих переменных суперпозицией непрерывных функций одного переменного // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 1. С. 27–38. <https://www.mathnet.ru/rus/fpm628>
5. Бутырский Е. Ю., Кувалдин И. А., Чалкин В. П. Аппроксимация многомерных функций // Научное приборостроение. 2010. Т. 20. № 2. С. 82–92. <https://elibrary.ru/item.asp?id=14307440>
6. Чернов А. В. О применении квадратичных экспонент для дискретизации задач оптимального управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 558–575. <https://doi.org/10.20537/vm170406>
7. Чернов А. В. О равномерной монотонной аппроксимации непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 4. С. 580–596. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf11383>
8. Чернов А. В. О монотонной аппроксимации кусочно непрерывных монотонных функций с помощью сдвигов и сжатий интеграла Лапласа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 187–205. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-10>
9. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007. <https://doi.org/10.1090/surv/141>
10. Riemenschneider S. D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: A survey // The Journal of Analysis. 2000. Vol. 8. P. 157–178. <https://zbmath.org/0972.41009>
11. Luh Lin-Tian. The shape parameter in the Gaussian function // Computers and Mathematics with Applications. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 687–694. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032>
12. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J. D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. Vol. 18. Issue 1. P. 67–86. <https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2>

13. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions // *Journal of Approximation Theory*. 2015. Vol. 189. P. 101–122.
<https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011>
14. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems // *Iterative methods in linear algebra. Proceedings of the IMACS international symposium, Brussels, Belgium, 2–4 April, 1991. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 263–281.*
<https://zbmath.org/0785.65101>
15. Georgoulis E. H., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2013. Vol. 35. Issue 2. P. A815–A831. <https://doi.org/10.1137/110859610>
16. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). М.: Наука, 1973.
17. Moré J. J., Thuente D. J. Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1994. Vol. 20. No. 3. P. 286–307.
<https://doi.org/10.1145/192115.192132>

Поступила в редакцию 29.01.2024

Принята к публикации 18.03.2024

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1464-8249>

E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О применении функций Гаусса и Лапласа в сочетании с теоремой Колмогорова для аппроксимации функций многих переменных // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2024. Т. 63. С. 114–131.

On application of Gaussian kernels and Laplace functions combined with Kolmogorov's theorem for approximation of functions of several variables

Keywords: approximation of functions of several variables, Kolmogorov's theorem, Gaussian function, Laplace integral, quadratic exponential.

MSC2020: 41A29, 41A30, 65D10, 65D15

DOI: 10.35634/2226-3594-2024-63-08

A special class of approximations of measurable functions of several variables on the unit coordinate cube is investigated. The class is constructed on the base of Kolmogorov's theorem (in version by Sprecher–Golubkov) stating that a continuous function f of several variables can be represented as a finite superposition of continuous single-variable functions — so called outer functions (which depend of f) and inner one Ψ (which is independent of f and is monotone). In the case of continuous functions f the class under study is obtained with outer functions approximated by linear combinations of quadratic exponentials (also known as Gaussian functions or Gaussian kernels) and with the inner function Ψ approximated by Laplace functions. As is known, a measurable function f can be approximated by a continuous one (up to a set of small measure) with the help of classical Luzin's theorem. The effectiveness of such approach is based on assertions that, firstly, the Mexican hat mother wavelet on any fixed bounded interval can be approximated as accurately as desired by a linear combination of two Gaussian functions, and, secondly, that a continuous monotone function on such an interval can be approximated as accurately as desired by a linear combination of translations and dilations of the Laplace integral (in other words, Laplace functions). It is proved that the class of approximations under study is dense everywhere in the class of continuous multivariable functions on the coordinate cube. For the case of continuous and piecewise continuous functions of two variables, numerical results are presented that confirm the effectiveness of approximations of the studied class.

REFERENCES

1. Chernov A. V. Gaussian functions combined with Kolmogorov's theorem as applied to approximation of functions of several variables, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, issue 5, pp. 766–782. <https://doi.org/10.1134/S0965542520050073>
2. Kolmogorov A. N. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1957, vol. 114, no. 5, pp. 953–956 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/dan22050>
3. Sprecher D. A. On the structure of continuous functions of several variables, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1965, vol. 115, pp. 340–355. <https://doi.org/10.2307/1994273>
4. Golubkov A. Yu. The tracing of external and internal representation functions of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of one variable, *Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika*, 2002, vol. 8, issue 1, pp. 27–38 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/fpm628>
5. Butyrsky Eu. Yu., Kuvaldin I. A., Chalkin V. P. Multidimensional functions' approximation, *Nauchnoe Priborostroenie*, 2010, vol. 20, no. 2, pp. 82–92 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=14307440>
6. Chernov A. V. On the application of Gaussian functions for discretization of optimal control problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 558–575 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170406>
7. Chernov A. V. On uniform monotone approximation of continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 4, pp. 564–580. <https://doi.org/10.1134/S0965542522040042>

8. Chernov A.V. On monotone approximation of piecewise continuous monotone functions with the help of translations and dilations of the Laplace integral, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 187–205.
<https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-10>
9. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007. <https://doi.org/10.1090/surv/141>
10. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: A survey, *The Journal of Analysis*, 2000, vol. 8, pp. 157–178. <https://zbmath.org/0972.41009>
11. Luh Lin-Tian. The shape parameter in the Gaussian function, *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 687–694. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032>
12. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J.D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2012, vol. 18, issue 1, pp. 67–86.
<https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2>
13. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions, *Journal of Approximation Theory*, 2015, vol. 189, pp. 101–122.
<https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011>
14. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems, *Iterative methods in linear algebra. Proceedings of the IMACS international symposium, Brussels, Belgium, 2–4 April, 1991*, Amsterdam: North-Holland, 1992, pp. 263–281.
<https://zbmath.org/0785.65101>
15. Georgoulis E.H., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2013, vol. 35, issue 2, pp. A815–A831. <https://doi.org/10.1137/110859610>
16. Vulikh B.Z. *Kratkii kurs teorii funktsii veshchestvennoi peremennoi (vvedenie v teoriyu integrala)* (A brief course of the theory of real variable functions (introduction to the theory of integral)), Moscow: Nauka, 1973.
17. Moré J.J., Thuente D.J. Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1994, vol. 20, no. 3, pp. 286–307.
<https://doi.org/10.1145/192115.192132>

Received 29.01.2024

Accepted 18.03.2024

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1464-8249>

E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A.V. Chernov. On application of Gaussian kernels and Laplace functions combined with Kolmogorov's theorem for approximation of functions of several variables, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 63, pp. 114–131.